

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

90. Band, Heft 1

30. Oktober 1961

S. 1-240

Allgemeines. Didaktik. Bibliographisches.

• **Buffara, Regina und Jayme Machado Cardoso** (zusammengestellt von): **Mathematik. Ausgewählte Bibliographie.** [Matemática. Bibliografia seletiva.] (Série Bibliografia e Documentação.) Curitiba, Brasil: Universidade do Paraná 1959. VII, 89 S. [Portugiesisch].

Verarbeitet ist in knapp 1500 Nummern der Bestand an mathematischen Büchern (keine Schulbücher oder Logarithmentafeln) und Monographien (auch Dissertationen) von 11 Bibliotheken in Curitiba (Paraná), mit Autorenregister.

• **Die Arbeiten des IV. rumänischen Mathematikerkongresses.** [Lucrările celui de al IV lea congres al matematicienilor romîni.] București: Editura Academiei Republicii Populare Romîne 1960. 227 S. Lei 8,55.

Der Band enthält nach den offiziellen Ansprachen (in rumänischer Sprache) Zusammenfassungen der auf dem Kongreß gehaltenen Vorträge (überwiegend auf französisch, einige auch auf deutsch, englisch oder russisch), nach Sektionen gegliedert: I. Algebra, Topologie, Funktionalanalysis, Mathematische Logik (40 Vorträge), II. Funktionentheorie (30 Vorträge), III. Differentialgeometrie (44 Vorträge), IV. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen und Funktionalgleichungen (32 Vorträge), V. Angewandte Mathematik (39 Vorträge), VI. Methodologie und Geschichte der Mathematik (13 Vorträge). — Fünf große Berichte über die Entwicklung der Mathematik in Rumänien sind gesondert veröffentlicht worden (dies Zbl. 74, 1).

• **Denbow, Carl H. and Victor Goedicke: Foundations of mathematics.** (Harper's Mathematics Series.) New York: Harper & Brother's, Publishers 1959. XVIII, 620 p. \$ 6,00.

Diese Einführung in die Grundlagen der Mathematik ist für die große Gruppe von amerikanischen „freshman“-Studenten bestimmt, die sich während ihres Studiums auch mit Mathematik zu befassen haben. Die zum Verständnis erforderlichen Vorkenntnisse sind gering (Buchstabenrechnen und etwas über graphische Darstellungen genügen schon; die Trigonometrie wird in dem Buche von Anfang an entwickelt). In einer Einleitung (44 S.) und einem Teil I (68 S.) liefern die Verff. einen empirischen Aufbau der mathematischen Grundlagen (Zahlensysteme, algebraische Terminologie, graphische Darstellungen). Teil II (153 S.) schildert den logisch-axiomatischen Aufbau von Gruppentheorie und der Körper von rationalen, reellen und komplexen Zahlen; das letzte Kapitel enthält Logik- und Mengen-Algebra. Die wichtigsten Kapitel des letzten Teiles (301 S.) handeln über Wahrscheinlichkeit, Statistik, „Problem solving“, Trigonometrie, Analytische Geometrie, Infinitesimalrechnung und Zahlentheorie. Eine große Menge von „Illustrations“ und Aufgaben (mit Antworten) dient zur Kontrolle der erworbenen Kenntnisse. Die Schreibweise ist breit und einfach; ein redliches Maß an Strenge ist innegehalten; Resultate, welche nicht bewiesen werden konnten, sind deutlich als solche angegeben. Auch Laien-Liebhabern der Mathematik kann das Buch bestens empfohlen werden.

J. Ridder.

• **Altwerger, Samuel I.: Modern Mathematics. An introduction.** New York: The Macmillan Company 1960. XII, 462 p. \$ 6,75.

„Es ist möglich, durch eine Vermischung des Alten und Neuen in der Mathematik ein Verständnis der mathematischen Bedürfnisse unserer modernen Zeit zu erlangen“. Dies ist das Ziel dieses neuen amerikanischen Lehrbuchs für College-Studenten, dem es ohne Zweifel recht gut gelingt, Dinge höherer Art, wie den Dedekindschen Schnitt, den Begriff der Stetigkeit usw. in einer das Wesentliche sehr anschaulich hervorhebenden Art dem jungen Leser verständlich zu machen. Ähnlich gut werden die Anfangsgründe der Cantorsche Mengenlehre, die Grundsätze der

Nichteuklidischen Geometrie, der Begriff des vierdimensionalen Raumes erläutert. Ableitung, Integral und transzendente Funktionen beschließen, in ähnlichem Stil behandelt, das Buch, das u. a. auch ausführlicher auf die Grundsätze der symbolischen Logik eingeht und sonst natürlich alles enthält, was in Textbüchern dieser Collegeart üblich ist. Zahlreiche Beispiele und Aufgaben, einige Funktionstabellen und die Lösung vieler Aufgaben bilden den Schluß des sehr klaren und anschaulichen Buches, das gut geeignet ist, Interesse für Mathematik zu erregen. Ein Mangel des Buches sind die vielen geometrisch falschen Figuren.

K. Strubecker.

Ohe, Seizo: Application of mathematical group concept to human perceptual systems, visual and auditory. Ann. Japan. Assoc. Philos. Sci. 1, 101—118 (1957).

Es wird dargetan, daß folgenden Systemen die Gruppeneigenschaft zukommt: 1. Den Farben, wobei als Gruppengesetz das Mischen zweier Farben genommen wird, komplementäre Farben sind invers zueinander und Weiss ist das Einheitsselement. Die neutralen Farben von Weiß zu schwarz bilden nur eine Halbgruppe. 2. Die wohltemperierte Tonskala wird abgebildet auf die arithmetische Gruppe der Restklassen modulo 12. 3. Das System der fünf Vokale *a, e, i, o* und *u* bildet in zweifacher Hinsicht eine Gruppe: Einmal mit den Grundlauten *a, i, u*, die sich der Verf. in den Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks denkt, *e* ist dann Komposition von *a* und *i*, *o* von *a* und *u*. Ein Teilsystem hiervon wird von *a, e* und *u* gebildet, das Einheitsselement ist ein neutrales *a*, das Gruppengesetz liefert die Umlaute, und geht man von einem Element über das Neutrale, so erhält man das inverse Element.

J. J. Burckhardt.

● **Abbreviated proceedings of the Oxford mathematical conference for school-teachers and industrialists.** At Trinity College, Oxford, april 8—18, 1957. London: Technology (The Times Publishing Company Ltd.) 1957. 111 p.

Campedelli, Luigi: Preparazione universitaria e progetti di riforma. Archimede 12, 269—275 (1960).

Nachtergaele, Jean M.: Tendances actuelles de l'enseignement des mathématiques en humanités. Revue Questions sci. 131 (V. Sér. 21), 485—492 (1960).

Löffler, Eugen: Der Mathematikunterricht. Mathematikunterricht 5, Heft 2, 3—47 (1959).

Die Schriftenreihe „Der Mathematikunterricht“ sucht, moderner Mathematik durch schulgerechte Darstellung Eingang in den Unterricht zu ermöglichen. So geht es im vorliegenden Heft, das ausschließlich einer Arbeit „Geometrischer Vorkurs für die beiden untersten Klassen an Gymnasien“ von Professor Dr. J. E. Hofmann gewidmet ist, nicht mehr nur — wie in früheren Arbeiten — um die Pflege des kindlichen Anschauungsvermögens, sondern vielmehr um das Erwecken von gruppentheoretischen, abbildungsgeometrischen und topologischen Vorstellungen im Geiste des Kindes. Entsprechend dem kindlichen Aufnahme- und Denkvermögen wird auf Begriffsbildungen, Fachwörter, ja selbst auf einen lehrgangsmäßigen Aufbau verzichtet, ohne daß jedoch die wissenschaftliche Genauigkeit darunter litte. Im gemeinsamen Wechselgespräch soll das Kind zum „Erlebnis von Form, Farbe und Anordnung“ gelangen, und zwar in einer Weise, die dem kindlichen Spiel- und Tätigkeitsdrang möglichst weit entgegenkommt. „Ein Gran Verständnis ist in mathematis mehr Wert als Zentner toten Wissens.“ Während im ersten Teil der Würfel in verschiedenen Darstellungen mit Netzen, Rückkehrzügen und einfachsten Farbenproblemen betrachtet wird, behandelt der zweite Teil das regelmäßige Tetraeder und Oktaeder mit schwierigeren Farbenproblemen. Schließlich werden im dritten Teil Punktgruppen, Geflechte und Rückkehrzüge bei ebenen Figuren sowie anhangsweise magische Quadrate, Zahlenbeispiele und das Vierfarbenproblem erörtert. Kein Lehrbuch will diese Schrift sein, sie möchte nur Anregungen geben; und das vermag sie in einer solchen Fülle, daß nicht nur der Mathematikunterricht an höheren Schulen, sondern auch der Raumlehreunterricht an Volks- und Mittelschulen befruchtet werden kann.

W. Orlikowsky.

Campedelli, Luigi: Dell'insegnar matematica. A proposito della scuola dell'obbligo. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 15, 58—63 (1960).

Behnke, Heinrich: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Schulmathematik. Enseignement math., II. Sér. 5, 176—183 (1960).

Drenckhahn, Friedrich: Der mathematische Unterricht der 6- bis 15-jährigen Jugend in der Bundesrepublik Deutschland. Enseignement math., II. Sér. 5, 183—195 (1960).

Kurepa, G.: Scientific foundations of school mathematics. Enseignement math., II. Sér. 5, 196—202 (1960).

Kurepa, G.: Des principes de l'enseignement mathématique. Enseignement math., II. Sér. 5, 203—212 (1960).

Dubreil, Paul: Rapport sur les bases scientifiques des mathématiques dans l'enseignement du second degré. Enseignement math., II. Sér. 5, 273—277 (1960).

Cairns, S. S.: Scientific foundation of mathematics on the secondary school level. Enseignement math., II. Sér. 5, 278—280 (1960).

Vaughan, Herbert E.: Le projet de la commission de réforme de l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires, instituée par l'université de l'Illinois. Enseignement math., II. Sér. 5, 281—283 (1960).

Kurepa, George: On the teaching of geometry in secondary schools. I. Enseignement math., II. Sér. 6, 69—80 (1960).

● **Hiele-Geldof, Dina van:** The didactics of geometry in the lowest class of the secondary school. Utrecht 1957. 183 p., engl. Zusammenfassung 3 p. Diss. [Holländisch].

● **Hiele, Pierre Marie van:** The problem of insight, in connection with school-children's insight into subject-matter of geometry. Utrecht 1957. 215 p., engl. Zusammenfassung 4 p. Diss. [Holländisch].

Vredenduin, P. G. J.: Pädagogische Studententage zu Arlon über die Begriffe Relation und Funktion. Euclides, Groningen 36, 65—75 (1960) [Holländisch].

Geschichte.

● **Clagett, Marshall** (edited by): Critical problems in the history of science. Proceedings of the Institute for the History of Science at the University of Wisconsin, September 1—11, 1957. Madison: The University of Wisconsin Press 1959. XIV, 555 p. \$ 5,00.

Das vorliegende Werk wird jeder, der an der Geschichte der Naturwissenschaften näher interessiert ist, gern zur Hand nehmen. Es handelt sich um eine Sammlung von Vorträgen führender Wissenschaftshistoriker aus den USA, aus England und aus den Niederlanden, gehalten auf einer Tagung im September 1957 an der University of Wisconsin. Die Behandlung der Themen wird dadurch ungemein lebendig, daß sich den Vorträgen der einzelnen Referenten kritische Stellungnahmen bestimmter Kommentatoren anschließen. Die Hauptgebiete, die — jedes in mehreren speziellen Vorträgen — behandelt werden, sind: 1. Die naturwissenschaftliche Revolution des 17. Jahrhunderts; 2. Die Geschichte der Naturwissenschaften an den Hochschulen; 3. Die Naturwissenschaften und die Französische Revolution; 4. Die Erhaltung der Energie; 5. Der Entwicklungsgedanke in der Biologie des 19. Jahrhunderts; und schließlich 6. Die Struktur der Materie und die chemische und physikalische Theorie.

Der Themenkreis 1 umfaßt sechs Vorträge. **R. Hall** behandelt die wissenschaftssoziologische Frage des Verhältnisses zwischen Praktiker und Wissenschaftler: The Scholar and the Craftsman in the Scientific Revolution (S. 3—23). Die wissenschaftliche Revolution ist primär eine Revolution der Theorie, wenn auch das Handwerk

Material für den Wissenschaftler liefert (kritische Kommentare von **R. K. Merton**, **F. R. Johnson** und **A. C. Crombie**). — Ungemein temperamentvoll spricht **G. de Santillana** über: *The Role of Art in the Scientific Renaissance* (S. 33—65). Es geht vornehmlich um Brunelleschi und sein Schaffen im Gebiet der Perspektive und des Kuppelbaues. Die Erfassung der Außenwelt unter Anwendung der Mathematik (konstruierte Perspektive) bricht sich zuerst in der Kunst Bahn. Verf. vergleicht Brunelleschi mit Galilei (kritischer Kommentar von **A. C. Crombie**). — Es folgt ein Vortrag **A. C. Crombies** über: *The Significance of Medieval Discussions of Scientific Method for the Scientific Revolution* (S. 79—101). Hier werden besonders die Anfänge der neuen Wissenschaft bei Robert Grosseteste zu Beginn des 13. Jahrhunderts (Mathematisierung der Physik), bei Thomas Bradwardine (Wortalgebra) und bei Nicolas d'Oresme (Formlatiduten) im 14. Jahrhundert hervorgehoben (kritische Kommentare von **I. I. Drabkin** und **E. Nagel**, die Crombie vorwerfen, daß er die Entwicklung vom späten Mittelalter bis zum 17. Jahrhundert zu kontinuierlich sehe). — Nun schließt sich ein Vortrag **J. T. Clarks** an: *The Philosophy of Science and the History of Science* (S. 103—140). Der Verf. legt dar, daß die Wissenschaftsgeschichte weniger zeigen soll, wie von der frühesten Behandlung eines wissenschaftlichen Gegenstandes an der spätere Zustand sich zu dem, was er ist, entwickelt hat („von unten bis oben-Methode“). Vielmehr soll unter Anwendung der logischen Analyse auf das historische Material klargelegt werden, wie es kam, daß der Entwicklungsweg so lang war, wie er sich uns darstellt („von oben bis unten-Methode“). Solche Methode bewahre davor, Kontinuität und Vorläuferschaft da zu sehen, wo es nicht angebracht ist. So leugnet denn der Verf. auch besondere wissenschaftliche Verdienste Oresmes um die Entwicklung zur modernen Naturwissenschaft hin (kritische Kommentare von **I. E. Drabkin** und **E. Nagel**). — Im folgenden spricht **E. J. Dijksterhuis** über: *The Origins of Classical Mechanics* (S. 163—184). Er zeichnet in meisterhafter Kürze und Klarheit den Weg der Mechanik von Aristoteles und Archimedes bis Newton (kritische Kommentare von **C. B. Boyer** und **R. Hall**). — In dem sich anschließenden Vortrag von **D. J. de S. Price** über *Contra-Copernicus* (S. 197—218) wird die Leistung des Copernicus im Gebiete der mathematischen Planetentheorie kritisch dargestellt (kritischer Kommentar von **F. R. Johnson**). — Der 2. Themenkreis umfaßt folgende Vorträge: **D. Stimson**, *The Place of the History of Science in a Liberal Arts Curriculum* (S. 223—234) und **H. Guerlac**, *History of Science for Engineering Students at Cornell* (S. 235—240). Kritische Kommentare von **I. B. Cohen**, **M. Boas** und **D. H. D. Roller**. — Über das Thema der Französischen Revolution (3. Themenkreis) handeln **C. C. Gillispie** (*The Encyclopédie and the Jacobine Philosophy of Science*, S. 255—289) und **L. P. Williams** (*The Politics of Science in the French Revolution*, S. 291—308). Diese ausgezeichneten wissenschaftssoziologischen Arbeiten sind trefflich mit Quellenstellen belegt. Williams behandelt u. a. auch die interessante Frage einer teilweise gegen die mathematisch-physikalische Naturbetrachtung Newtonscher Prägung gerichteten Strömung in der Französischen Revolution (kritische Kommentare von **H. B. Hill** und **H. Guerlac**). — Der 4. Themenkreis bringt Vorträge von **T. S. Kuhn** (*Energy Conservation as an Example of Simultaneous Discovery*, S. 321—356) und **I. B. Cohen** (*Conservation and the Concept of Electrical Charge*, S. 357—383), zu denen **C. B. Boyer** und **E. Hiebert** kritische Kommentare lieferten. — Die Themen zur Entwicklungslehre (5. Themenkreis) sind: **J. W. Wilson**, *Biology Attains Maturity in the 19th Century* (S. 401—418) und **J. C. Greene**, *Biology and Social Theory* (S. 419—446). Greenes Arbeit behandelt vornehmlich das gleichzeitige Auftreten von Entwicklungstheorien in der Biologie und in der Soziologie des 19. Jahrhunderts (kritische Kommentare von **R. H. Shryock** und **C. Zirkle**). — Der 6. Themenkreis umfaßt die Vorträge von **C. S. Smith** (*The Development of Ideas on the Structure of Metals*, S. 467—498) und **M. Boas** (*Structure of Matter and Chemical Theory in the 17th and 18th Cen-*

turies, S. 499—514). M. Boas stellt die Theorie der Materie von R. Boyle bis in die Zeit Lavoisiers anschaulich dar (kritische Kommentare von H. Guerlac und A. J. Ihde).

Zum Schluß sei nochmals betont, daß der Band dem Historiker der Mathematik und der exakten Naturwissenschaften wärmstens empfohlen werden kann. Er findet hier viele grundsätzliche Fragen der Wissenschaftsgeschichte von kompetenter Seite unter verschiedenen Blickwinkeln ungemein anregend behandelt.

F. Klemm.

• Michel, P.-H.: *Les nombres figurés dans l'arithmétique pythagoricienne*. (Les Conférences du Palais de la Découverte. Sér. D, No. 56.) Paris: Université de Paris, Palais de la Découverte 1958. 23 p.

In dem vorliegenden Heft der vorzüglichen Reihe „Les Conférences du Palais de la Découverte“ gibt der Verf. einen Überblick über die Pythagoreische Arithmetik, in der die Zahlen figürlich — ohne daß eine andere Symbolik nötig war — durch Punkte oder Steinchen dargestellt wurden, weshalb sich die zahlentheoretischen Untersuchungen vorerst auf niedere ganze Zahlen beschränkten. Das Ergebnis war eine Einsicht in den Aufbau von Zahlensummen und Zahlenprodukten, insbesondere in den Zusammenhang zwischen Potenzen und den Summen aufeinanderfolgender ungerader Zahlen, wie es Nikomachos beschreibt (z. B. $3^2 = 1 + 3 + 5$; $3^3 = 7 + 9 + 11$). Wichtig ist die moderne Erweiterung der Nikomachischen Regel auf höhere Exponenten (z. B. $2^5 = 5 + 7 + 9 + 11$) durch Karpinski und Anning; ihr stellt der Verf. eine Formel für heteromeke und Körperzahlen z. B. von der Form $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$ gegenüber, in der die Summe gerader Zahlen auftritt. So ist z. B. $3 \cdot 4 = 2 + 4 + 6$ oder $3 \cdot 4 \cdot 5 = 12 + 14 + 16 + 18$. Diese neuen Ergebnisse unterstreichen die von Aristoteles mitgeteilte Ansicht der Pythagoräer, daß einerseits das Ungerade, die Potenz und das Unveränderliche, andererseits das Gerade, das Heteromeke und Veränderliche zusammengehören.

K. Vogel.

Schäffer, J. J.: *Die wissenschaftliche Persönlichkeit des Archimedes*. Fac. Ing. Agrimensura Montevideo, Publ. didact. Inst. Mat. Estadist. 1, 57—93 (1958) [Spanisch].

Der Wert vorliegender Monographie liegt in der didaktisch geschickten Übertragung der Analysen und Würdigungen, die das Werk des Archimedes durch Heath, Heiberg, v. d. Waerden u. a. erfahren hat, in den ibero-amerikanischen Kulturkreis. Im 1. Kapitel (Mensch und Werk) wird neben der kurzen Biographie eine Übersicht über die 12 bekannten, die 4 durch antike Erwähnungen und die 3 durch antike Zitationen bekannte Werke des Archimedes in Anschluß an Heaths und ver Eeckes Verzeichnis gegeben. Das 2. Kapitel (Wissenschaftliche Persönlichkeit) würdigt die spezifische Erfindungsgabe, Methodik und Beweisverfahren des Archimedes.

J. Fleckenstein.

Omar Ibn Abraham Al-Khayyami (Omar Khayyam): *Discussion of difficulties in Euclid*. Transl. by Ali R. Amir-Móez. Scripta math. 24, 275—303 (1960).

Verf. gibt eine modern formulierte Übersetzung der Schrift 'Omar Haiyāmīs „Kommentar zu den schwierigen Postulaten Euklids“ (nach der arabischen Übersetzung T. Erani's 1936 oder nach der Leidener Handschrift?). Da keine Texterläuterungen beabsichtigt sind, wird die Interpretation unklarer Stellen dem Leser überlassen. Offenbar ist dem Verf. die Edition von B. A. Rozenfel'd (dies. Zbl. 53, 195) nebst dem ausführlichen Kommentar von Rozenfel'd und A. P. Juškevič (dies. Zbl. 53, 195) nicht bekannt geworden.

K. Vogel.

Neugebauer, O.: *The astronomical tables P. Lond. 1278*. — With a note on „The palaeography of the fragments“ by T. L. Skeat. Osiris 13, Piae memoriae Georgii Sarton oblatum, 93—113 (1958).

Der Papyrus Londinensis 1278 (Kenyon & Bell, Greek Papyri in the British Museum, vol. III, p. 71 (1907)), von welchem das Fragment 5 schon in Halmas Tables astronomiques de Ptolémée et de Théon, Vol. III, p. 34 (1813/16) publiziert wurde, führt nach eingehender Analyse zum Schluß, daß schon in älteren Zeiten mehrere Versionen der „Handlichen Tafeln“ des Ptolemäus in Zirkulation gewesen sind. Der vorliegende Papyrus von 6 verschiedenen Fragmenten stammt aus wahrscheinlich 3 verschiedenen Codices (nicht Rollen), welche in der Zeit zwischen Ptolemäus und Theon um + 200 verfaßt worden sind. Sein Inhalt gliedert sich in Fragment 1^v + 2^v; Geographische Zonen (stimmt überein mit Almagest II, 8); Fragment 5^r: Geographische Tafeln in 6 Längenzonen nach 7 Klimata; Fragment 5^v + 6^r Saisonzeiten (Überschuß der längsten Saisonstunde über 15°); Fragment 3, 6^v 1^r + 2^r: Zeitgleichung; Fragment 4 (von anderer Hand geschrieben!): Saturnbewegung (in mittlerer Länge).

J. Fleckenstein.

Thorndike, Lynn: The study of mathematics and astronomy in the thirteenth and fourteenth centuries as illustrated by three manuscripts. Scripta math. 23, 67—76 (1958).

Verf. vergleicht folgende drei Codices: Brit. Mus. MS. Harley 3647, MS. Vatic. Palat. lat. 1414 (beide 13. Saec.) und Basel F II 33 (14. Saec.). Da der erste in Carmodys Bibliographie von 1956 fehlt, wird eine eingehendere Inhaltsangabe gebracht. Bemerkenswert sind die dort gegebenen Planetenstellungen von 1272, 1279, 1293 (Marginalnoten!) und der völlige Mangel von astrologischen Texten im Gegensatz zum Codex Vatic. Palat. lat. 1414, aus welchem jüngst Millás Vallicrosa (1950) die Canones von Humeniz (Ammonius?) ediert hat. Der Basler Codex als der jüngste enthält im Gegensatz zu diesen beiden Texten nicht nur ein weiteres Interessengebiet, sondern erstreckt sich auch auf eine Zeit vom 4. Jahrhundert v. Chr. bis zum 14. Jahrh. von Hyginus bis Domenico Chiavasso, während der Londoner Text nicht über Messehalla zurückgeht, also nur 4 Jahrhunderte umspannt. Charakterisiert der ältere Codex die mittelalterliche Wissenschaft des 12./13. Jahrhunderts, so ist der jüngere schon ein Spiegel des beginnenden Humanismus. Die Breite der Interessen desselben ergibt folgende Zusammenstellung (Beschreibung von F II 33 bei Björnbo, 1912 (Abhdlng. Gesch. math. Wiss. Heft 26, 3): Arithmetik (4), Dreiecke (2), Sphäre (3), Geometrie (3), Harmonische Zahlen (1), Optik (5), Statik (1), Astronomie (13), Geographie (1), Gezeiten (1).

J. Fleckenstein.

Alter, George: Two renaissance astronomers: David Gans—Joseph Delmedigo. Rozprawę Českosl. Akad. Věd. Ř. mat. přírod. Věd. 68, Nr. 11, 1—77, 15 plates (1958).

In den Werken der beiden jüdischen Prager Gelehrten Rabbi David Gans [1541 (Lipstadt)—1615 (Prag)] und Physikus Joseph Delmedigo [1591 (Kreta)—1655 (Prag)] spiegelt sich die Astronomie im Zeitgeist der Spätrenaissance und des Frühbarock. Während David Gans als erster jüdischer Astronom in Zentraleuropa noch rückblickend das ptolemäische System akzeptiert (Schüler der Rabbis Moshe Isserls und Löw ben Bezalel (!) und Freund Tycho Brahes und Keplers), ist Joseph Delmedigo schon Kopernikaner trotz der kabbalistischen Astrologie, die er noch mitschleppt, während sie Gans schon verworfen hat. Gans verfaßte: 1. Zemach David (Prag 1592) (Eine Geschichte der Astronomie mit besonderer Berücksichtigung der Juden); 2. Magen David (Prag 1612) (Einführung in die Astronomie); 3. Nachmad ve-Naim (Jessnitz 1743) (Astronomisches Textbuch); 4. Gebuloth ha-Arez (Geographisches Handbuch); 5. Maor ha-Katan (Über Geometrie und Arithmetik). Als Hauptwerk ist das Handbuch No. 3. anzusehen, welches den Inhalt des Almagest bringt, wobei aber die Einflüsse von Tycho und Kepler nicht zu verkennen sind. Delmedigo, Sproß einer alten in Kreta ansässigen venetianischen Familie, kam nach langen wissenschaftlichen Wanderfahrten in Italien, Ägypten, der Levante, der Walachei, Polen, Baltikum, Norddeutschland, Holland über Frankfurt schließlich nach Prag. Sein Hauptwerk Elim (Amsterdam 1629) enthält im Teil „Ma'ayan

Gannim“ die sphärische Astronomie, wobei schon die Prosthäphäresis durch Logarithmen ersetzt ist (!) und im Teil Geburoth ha-Schem astronomische und geographische Einzelheiten, wie die Längeneinheiten, das Kopernikanische System mit Keplerschen Ellipsen und Ahnung einer Attraktionskraft, Merkur- und Venusvorübergänge, Beobachtungen mit dem Fernrohr Galileis (dessen Schüler Delmedigo 1606/07 in Padua gewesen war) etc. Hierbei ist interessant, daß die Kometen schon oberhalb der Mondsphäre und das Gewicht der Erde zu 10^{30} Pfund angesetzt werden. Die Novaerscheinungen von 1572, 1600 und 1604 werden gewürdigt; die Triangulationsresultate von Snellius müssen ihm ebenfalls bekannt gewesen sein.

J. Fleckenstein.

Rupert Hall, A.: Correcting the principia. Osiris 13, Piae memoriae Georgii Sartori oblatum, 291—326 (1958).

Die vielen Versehen Newtons — insbesondere im II. Buch der „Principia“ über die Bewegung im widerstehenden Mittel — waren schon Huyghens, Fatio und Leibniz aufgefallen. Das Trinity College besitzt noch einige Exemplare der 1. Auflage (1686), welche Newton eigenhändig verbessert hat, darunter Newtons eigenes Handexemplar, das John Locke gewidmete und das von Bentley, welcher der Hauptinitiator zur verbesserten zweiten Auflage (1713) geworden ist. Diese zweite Auflage wurde bekanntlich nötig, als Johann Bernoulli (1711) öffentlich Newtons Versehen angeprangert hatte und dabei noch aus dessen Versehen den Schluß gezogen hatte, daß Newton nur die Reihenentwicklungen, nicht aber den Infinitesimalkalkül begriffen habe. Bentley gelang es, Cotes als Herausgeber der 2. Auflage zu gewinnen; offenbar hat sich dann Cotes selbständiger erwiesen als Newton vorausgesehen hatte. Es ist nicht mehr möglich, aus dem Briefwechsel zwischen Newton, David Gregory — der wie Fatio vergeblich auf die Herausgeberschaft der 2. Auflage gehofft hatte — Cotes und Keill in der Porthmouth Collection der Cambridge University Library zu eruieren, auf wen im einzelnen die angebrachten Korrekturen zurückgehen, da Cotes die Herkunft verwischt hat. Auf 41 Seiten der Principia von 1686 mußten Verbesserungen angebracht werden. Verf. stellt die entsprechenden Passus der beiden Auflagen gegenüber. In den beigesteuerten 22 Noten nimmt die Note 8 (pp. 313—320) zu dem von Johann Bernoulli gerügten Fall der Zentralbewegung im widerstehenden Mittel naturgemäß den größten Raum ein.

J. Fleckenstein.

Biermann, Kurt-R. and Hans-Günther Körber: Ein bisher unveröffentlichter wissenschaftlicher Brief von Carl Friedrich Gauß an Alexander von Humboldt. Forsch. Fortschr. 33, 136—140 (1959).

Bericht über einen Brief, von dessen Existenz man bisher nur durch Zitationen von Encke (Astron. Nachr. No. 622 (1848)) und von A. v. Humboldt selber [Kosmos, Bd. 3, 278—271 (1859)] anlässlich der Bestimmung des Sonnenapex wußte. Der von Hanno Beck aufgedundene Brief von Gauß betrifft das Problem der Unbegrenztheit der Planetenatmosphären, des Apex des Sonnensystems und der Sonnenabplattung. Dieser Brief vom 12. 10. 1828 setzt eine Diskussion fort, welche Gauß anlässlich der 7. Versammlung der deutschen Naturforscher und Ärzte in Berlin 1828 als Gast Humboldts mit diesem begonnen hatte.

J. Fleckenstein.

Rychlík, Karel: Un manuscrit de Cauchy aux archives de l'Académie Tchécoslovaque des Sciences. Czechosl. math. J. 7 (82), 479—481 (1957).

Es handelt sich um die eigenhändige Niederschrift des Mémoire sur l'intégration des équations différentielles vom Herbst 1835 (in Prag lithographiert 1835, Erstdruck in den Exercices d'Analyse et de Physique Math. I, 327—384 (1840) = Œuvres complètes (2) I, Bd. 11, Paris 1913, 399—465). Es sollte in den Akten der kgl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften veröffentlicht werden, jedoch nicht im Jahrgang 1836, sondern erst im nächstfolgenden. Der Druck unterblieb jedoch, weil

Cauchy Prag schon im Juli 1836 wieder verließ und dort niemand die Korrekturen hätte lesen können.
J. E. Hofmann.

Skof, Fulvia: *Sull'opera scientifica di Mario Pieri.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 15, 63—68 (1960).

Pellegrino, Franco: *In memoria di Luigi Fantappiè.* Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 15, 505—519 (1957).

Mit Schriftenverzeichnis.

Parkus, H.: *Karl Federhofer.* Österreich. Ingenieur-Arch. 14, 243—244 (1960).

Mit einer Ergänzung zu dem im Österreich. Ingenieur-Arch. 9, 73—78 (1955) veröffentlichten Schriftenverzeichnis.

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Wang, Hao: *Eight years of foundational studies.* Dialectica 12, 466—497 (1958).

Eine sehr interessante und lehrreiche Übersicht über Entwicklungen auf dem Gebiete der mathematischen Logik und Grundlagenforschung. Bei der Auswahl der Gegenstände hat Verf. sich von seinem persönlichen Interesse führen lassen. Behandelt werden: 1. Analysis, Reduktion und Formalisierung, 2. Anthropologismus (als strengste Form des) 3. Finitismus, 4. Intuitionismus, 5. und 6. Prädikativismus, 7. Platonismus, 8. Logik im engeren Sinn und 9. Anwendungen. In diesem Zusammenhang werden ausführlicher besprochen: die Versuche Freges und Dedekinds, die Mathematik auf die Logik zu reduzieren, quantorenfreie Methoden als Charakterisierung der finiten Einstellung nach Skolem und Kreisel, Kleenes und Gödels Interpretation der intuitionistischen Arithmetik, prädikative Mengenlehre, Axiomatisierungen der klassischen Mengenlehre, der Aufbau der Zahlentheorie auf mengentheoretischer Grundlage (mit einer unveröffentlichten Definition nach M. Dummett), Bolzanos Charakterisierung der Logik und metamathematische Ergebnisse über klassische und intuitionistische Prädikatenlogik.
E. W. Beth.

● **Novikov, P. S.:** *Elemente der mathematischen Logik.* [Elementy matematičeskoj logiki.] (Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik.) Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1959. 400 S. R. 11,05 [Russisch].

Das vorliegende Buch stellt (abgesehen von Übersetzungen ausländischer Lehrbücher) das erste russische Lehrbuch der mathematischen Logik dar. Es ist (jedenfalls in den ersten 5 Kapiteln) als Einführung gedacht und dementsprechend voraussetzungslos geschrieben. Im allgemeinen dürfte es für Anfänger leicht verständlich sein, wenn auch an einigen kritischen Stellen dem Ref. die Darstellung insbesondere bei Hinweisen auf weitere, nicht im Buche behandelte Probleme für Anfänger etwas zu knapp erscheint. Eine ausführliche Einleitung erläutert u. a. die Bedeutung der Kodifikate für Fragen der Begründung der Mathematik, insbesondere für Widerspruchsfreiheitsbeweise. Es wird der Standpunkt des Hilbertschen Finitismus erläutert und im Zusammenhang damit genauer auf die syntaktischen und algorithmischen Grundlagen der Kalküle und Kodifikate eingegangen. Dann folgen vier Kapitel über Aussagen- und Prädikatenlogik der ersten Stufe. Sowohl für die Aussagenlogik als auch für die Prädikatenlogik ist jeweils je ein Kapitel der inhaltlichen (bzw. mengentheoretischen) Auffassung der Logik und je ein Kapitel den entsprechenden Kodifikaten gewidmet. Die Darstellung umfaßt die für ein einführendes Lehrbuch wichtigsten Tatsachen, die hier nicht einzeln aufgeführt zu werden brauchen. Sie führt bis zum Gödelschen Vollständigkeitssatz, für den im wesentlichen der Gödelsche Beweis vorgeführt wird. Das 5. Kapitel ist der axiomatischen Zahlentheorie

gewidmet und bringt u. a. formale Herleitungen in einem Kodifikat mit Schema der primitiv-rekursiven Definition und mit Induktionsaxiom, ferner formale und inhaltliche Behandlung der primitiv-rekursiven Funktionen und Prädikate. Auf die allgemein-rekursiven Funktionen wird nur kurz eingegangen, die Frage der Vollständigkeit des Kodifikates und der Gödelschen Unvollständigkeitssatz werden nicht berührt. Dagegen werden die Frage der Widerspruchsfreiheit und die aus dem Gödelschen Satz resultierenden Schwierigkeiten für den finiten Standpunkt erörtert. Als Hinweis darauf, was der finite Standpunkt leisten kann, und zugleich als Einführung in die Methoden der Beweistheorie führt Verf. schließlich im letzten (6.) Kapitel einen streng finiten Widerspruchsfreiheitsbeweis für ein eingeschränktes arithmetisches Kodifikat mit Schema der primitiv-rekursiven Definition aber ohne Induktionsaxiom. Er führt hierzu den Begriff der Regularität (regulärnost'), eine Art von Verallgemeinerung der Verifizierbarkeit, für die Formeln des Kodifikates ein. Diese Regularität ist deduktionserblich und kommt den Axiomen zu, aber nicht der Formel $0 \neq 0$. Mit der gleichen Methode wird auch die Unabhängigkeit des Induktionsaxioms von dem erwähnten eingeschränkten arithmetischen Kodifikat und allgemeiner von jedem widerspruchsfreien Kodifikat, das aus dem eingeschränkten arithmetischen Kodifikat durch Hinzunahme weiterer beliebiger Formeln ohne Prädikatenvariable als Axiome entsteht, bewiesen. — Leider enthält das Buch kein Register und fast als einzige Literaturangabe einen allgemein gehaltenen Hinweis auf das bekannte Buch von Kleene.

E. Burger.

• **Bocheński, J. M.:** *A précis of mathematical logic.* Translated from the French and German ed. by **Otto Bird.** (Synthese Library). Dordrecht: D. Reichel Publishing Company 1960. IX. 100 p. 13,75 D. fl.

Vgl. die Besprechung des französ. Originals in diesem Zbl. 34, 5.

Schütte, Kurt: *Aussagenlogische Grundeigenschaften formaler Systeme.* *Dialectica* 12, 422—442 (1958).

Zur Formalisierung der klassischen Mathematik mittels eines typenfreien Systems braucht man die aussagenlogischen Begriffsbildungen in ihrer Allgemeinheit. Wenn man ebenfalls die Widerspruchsfreiheit erhalten will, so sollen nicht alle Gesetze der klassischen Aussagenlogik gelten. Es wird untersucht, welche Schlußregeln in formalen Systemen gelten, die gewissen „Mindestforderungen“ genügen. Unter Verzicht auf die aussagenlogische Vollständigkeit lassen sich die widerspruchsfreien Systeme zur typenfreien Grundlegung der Mathematik verwenden. (Vgl.: K. Schütte, *Beweistheorie*, Berlin 1960).

B. van Rootselaar.

Anderson, Alan Ross and Nuel D. Belnap jr.: *Modalities in Ackermann's "Rigorous Implication".* *J. symbolic Logic* 24, 107—111 (1950).

The structure of modalities in Ackermann's "strenger Implikation" (this Zbl. 72, 1) is shown to be that of S4. Modalities may be introduced without the introduction of Ackermann's Δ ("the absurd") and of the axioms connected with it. Necessity is definable in the pure theory of rigorous implication. *H. Guggenheimer.*

Wang, Hao: *Ordinal numbers and predicative set theory.* *Z. math. Logik Grundl. Math.* 5, 216—239 (1959).

Es handelt sich um einen Versuch, einer Präzisierung des Begriffes der prädikativen Menge, wie er in Arbeiten von Lorenzen u. a. auftritt, näher zu kommen. Da Ordinalzahlindizes bei den prädikativen Mengen wichtig sind, muß eine Theorie der Ordinalzahlen vorausgehen. Verf. gibt verschiedene Bezeichnungssysteme für Ordinalzahlen an. Außer der (nicht konstruktiven) Klasse der rekursiven Ordinalzahlen werden engere, stark effektiv genannte Systeme diskutiert. Es wird dann das Prinzip der Vermeidung eines *circulus vitiosus*, das für die Erzeugung der prädikativen Mengen wesentlich ist, ausführlich diskutiert und darauf hingewiesen, daß es verschiedene Auffassungen davon gibt. Es liegt nahe, die prädikativen Mengen in enge Beziehung zu der hyperarithmetischen Mengenlehre zu bringen. Verf. gibt aber

Gründe dafür an, daß diese Basis nicht für alle Mengen genügt, die man noch als prädikativ ansehen könnte. Eine induktive Definition kann für die prädikativen Mengen anscheinend nicht entbehrt werden, doch ist der allgemeine Begriff einer induktiven Definition keineswegs klar. Zwei provisorische Definitionen der prädikativen Mengen werden gegeben, ohne daß der Verf. diese für endgültig hält. Es ist überhaupt seine Absicht, die Diskussion über das gestellte Problem durch seine Vorschläge erst in die Wege zu leiten.

W. Ackermann.

Kuroda, Sigeatsu: An investigation on the logical structure of mathematics. V: Contradictions of Russell's type. *J. symbolic Logic* 23, 393—407 (1959).

(Teil II—IV vgl. dies. Zbl. 87, 245.) Ein Widerspruch vom Russellschen Typus ist ein solcher, dessen Ableitung nur die definierende Formel einer gewissen Menge voraussetzt; auch die betreffende Menge wird als widerspruchsvoll bezeichnet. Für das System *UL* des Verf. wird der Begriff des Beweises eines Widerspruchs in vereinfachter Weise definiert. Es werden dann notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben für den widerspruchsvollen Charakter einer Menge. Diese Bedingungen sind kombinatorischer Natur und betreffen die Konstituenden der definierenden Formel.

E. W. Beth.

Kuroda, Sigeatsu: An investigation on the logical structure of mathematics. XIII: A method of programming of proofs in mathematics for electronic computing machines. *Nagoya math. J.* 16, 195—203 (1960).

Es wird zunächst ein für die Programmierung geeignetes Beweisverfahren angegeben. Dann wird der universale Charakter der Logik sowie gewisser Rechenanlagen erörtert und zum Schluß wird kurz auf die einschlägigen Ergebnisse Gödels, Churchs und Quines eingegangen. Es werden mehrere Arbeiten verwandten Charakters zitiert, nicht aber die Beiträge Hintikka, Kangers und des Ref., welche ganz ähnliche Beweisverfahren beschreiben.

E. W. Beth.

Gödel, Kurt: Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. *Dialectica* 12, 280—287 (1958).

Angesichts der Tatsache, daß die Widerspruchsfreiheit eines Systems nicht mit geringeren Beweismitteln, als im System vorhanden sind, gezeigt werden kann, kam es zu der Erweiterung des Hilbertschen finiten Standpunktes durch Hinzunahme der konstruktiven Ordinalzahltheorie, womit dann die Widerspruchsfreiheit der klassischen Zahlentheorie gesichert werden konnte. Verf. schlägt vor, statt durch die Ordinalzahltheorie die Erweiterung durch Hinzufügung des Begriffs einer berechenbaren Funktion endlichen einfachen Typs vorzunehmen. Ein Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Zahlentheorie auf dieser Grundlage wird skizziert.

W. Ackermann.

Kreisel, Georg: Hilbert's Programme. *Dialectica* 12, 346—372 (1958).

Verf. diskutiert das Hilbertsche Programm seiner Beweistheorie und gibt einen Überblick darüber, was ausgeführt und was nicht ausgeführt werden konnte. Die Unzulänglichkeit der engeren finiten Einstellung Hilberts führte zu einer Hierarchie progressiv weniger elementarer Methoden, die aber noch in einem gewissen Sinne als konstruktiv betrachtet werden können. (Vgl. auch die vorstehend referierte Abhandlung von Gödel). Verf. hält vor allem eine Präzisierung des Begriffes „finit“ für erforderlich; eine entsprechende Skizzierung wird gegeben, wobei er die Charakterisierung durch einen Kalkül mit freien Variablen versucht. Ferner betont er wie wichtig es ist, bei den nichtkonstruktiven Methoden einen konstruktiven Kern oder ein konstruktives Äquivalent zu finden, und weist in dieser Hinsicht besonders auf die Herbrandschen Methoden hin.

W. Ackermann.

Wang, Hao: Universal Turing machines: An exercise in coding. *Z. math. Logik Grundle. Math.* 3, 69—80 (1957).

The author has previously shown [*J. Assoc. comput. Machin.* 4, 61—92 (1957)] that a Turing Machine with two tape symbols "blank" and "mark" and four opera-

tions: move left (one square), move right, mark scanned square, jump to instruction n if scanned square is marked, is capable of computing all partial recursive functions. In the present paper he gives a "Universal Turing Machine" program for this machine, i. e. a program U which when started on a tape representing (in a uniform and fairly direct way) a program P and a tape content I , will proceed to imitate the effect which could be obtained by using the program P on the initial tape I . By extensive use of sub-routines he manages to present this complicated program in a readable manner.

J. C. Shepherson.

Kolmogorov, A. N. und V. A. Uspenskij: Zur Definition des Algorithmus. *Uspechi mat. Nauk* **13**, Nr. 4 (83), 3—28 (1958) [Russisch].

In dem Bestreben, weitere Gründe für die Annahme zu finden, daß tatsächlich mit dem Begriff der partiell-rekursiven Funktionen der allgemeinste Begriff einer effektiv berechenbaren Funktion erfaßt ist, geben die Verff. eine möglichst weit gefaßte Definition des Begriffes Algorithmus und zeigen, daß jeder solche Algorithmus (vermöge einer geeigneten Arithmetisierung) durch eine partiell-rekursive Funktion beschrieben wird. — Die Definition eines Algorithmus besteht in groben Zügen in folgendem: Die „Zustände“ eines Algorithmus werden definiert durch gewisse endliche eindimensionale Komplexe, deren Ecken Elemente sind, welche endlich vielen Typen T_0, T_1, \dots, T_r angehören können. Jeder Zustand enthält genau eine Ecke vom Typ T_0 oder T_1 . Im ersten Falle heißt der Zustand „Anfangszustand“, im zweiten Falle „Endzustand“. Der „aktive Teil“ eines Zustandes S besteht aus allen Ecken und Kanten von S , die sich durch eine Kette von einer Länge $\leq N$ mit der Ecke vom Typ T_0 bzw. T_1 aus S verbinden lassen. Dabei ist N eine für den betreffenden Algorithmus feste Zahl. Die Operationsweise des Algorithmus wird beschrieben durch eine Liste von endlich vielen Umwandlungsregeln, welche gewisse aktive Teile von Anfangszuständen in bestimmter Weise durch andere Zustände ersetzen.

E. Burger.

Adjan (Adian), S. I.: On algorithmic problems in effectively complete classes of groups. *Doklady Akad. Nauk SSSR* **123**, 13—16 (1958) [Russisch].

Verf. zeigt zunächst, wie sich eine Verallgemeinerung des Hauptlemmas aus einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **85**, 251), das l. e. ohne Beweis mitgeteilt wurde, beweisen läßt mittels der Methoden aus einer anderen Arbeit (dies. Zbl. **80**, 241). Der Beweis ist außerordentlich langwierig. — Aus der verschärften Form des Hauptlemmas wird dann die folgende Verallgemeinerung eines früheren Satzes bewiesen: Eine Klasse K von endlich definierten (e. d.) Gruppen heiße effektiv-vollständig, wenn es einen Algorithmus \mathfrak{N} gibt, der jedes (endliche) definierende Erzeugenden- und Relationensystem einer e. d. Gruppe G in ein solches einer Gruppe aus K die eine zu G isomorphe Untergruppe enthält, umrechnet. Sei K effektiv-vollständig. Sei χ eine isomorphie-invariante Gruppeneigenschaft. Es gebe eine Gruppe F_1 in K , die die Eigenschaft χ besitzt und bei \mathfrak{N} in sich übergeht. Es gebe eine e. d. Gruppe F_2 , die in keine e. d. Gruppe mit der Eigenschaft χ eingebettet werden kann. Dann gibt es keinen Entscheidungsalgorithmus für die Eigenschaft χ in der Klasse K . — Mit demselben Hauptlemma wird ferner bewiesen: Eine e. d. Gruppe G heiße bedingt-trivial in bezug auf ein System $L_i = 1$ ($i = 1, \dots, k$) von identischen Relationen, wenn G durch Hinzufügung einer beliebigen der identischen Relationen $L_i = 1$ zu seinen definierenden Relationen trivial wird. Sei K_1 die Klasse der in bezug auf $L_i = 1$ ($i = 1, \dots, k$) bedingt-trivialen Gruppen. Es gebe eine Gruppe F_1 in K_1 mit der Eigenschaft χ und eine Gruppe F_2 wie oben. Dann gibt es keinen Entscheidungsalgorithmus für χ in der Klasse K . — Verf. merkt an, daß in der oben erwähnten Arbeit (dies. Zbl. **85**, 251) die Definition des Wortes E bei der Konstruktion der Gruppe $F_{a,1}$ versehentlich weggelassen wurde. Es ist $E = p^2 A p^{-1} A p^{-1}$.

E. Burger.

Falevič (Falevich), B. Ja. (B. J.): A new method of proving incomplete theorems for systems with Carnap rule, and its application to the problem of interrelation between classical and constructive analysis. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 120, 1210—1213 (1958) [Russisch].

Verf. betrachtet wie Rosser (dies. Zbl. 17, 242) logisch-arithmetische Kodifikate $S_0, S_1, \dots, S_\omega, S_{\omega+1}, \dots, S_\nu$. Dabei ist S_0 der Prädikatenkalkül mit arithmetischen Axiomen und mit Quantoren für Prädikatenvariable mit entsprechenden Axiomen und Schlußregeln. Die beweisbaren Formeln von $S_{\alpha+1}$ entstehen aus denjenigen von S_α — grob gesagt — durch eine einmalige zusätzliche Benutzung der Regel der unendlichen Induktion, die Rosser (l. c.) als Carnapsche Regel bezeichnet hat. Rosser hatte l. c. die Gödelschen Unvollständigkeitssätze auf die S_i mit $\nu < \omega^2$ übertragen. Verf. skizziert den Beweis einer Übertragung dieses Ergebnisses auf weitere Ordinalzahlen ν und formuliert eine noch weitergehende Verallgemeinerung ohne Beweis. — Weiter bemerkt Verf., daß der von Ackermann (dies. Zbl. 50, 245) geführte Widerspruchsfreiheitsbeweis für sein System A einer konstruktiven Analysis (in welcher gleichfalls eine eingeschränkte Regel der unendlichen Induktion vorkommt) in S_0 formal durchgeführt werden kann. Hieraus folgt dann leicht, daß es kein Modell \tilde{S}_0 von S_0 in A mit gewissen Regularitätseigenschaften hinsichtlich der in S_0 arithmetisierten Beweisbarkeitsprädikate von A, \tilde{S}_0, S_0 geben kann.

E. Burger.

Markov, A.: Unsolvability of certain problems in topology. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 123, 978—980 (1958) [Russisch].

Mit derselben Methode wie in der vorangegangenen Note (ibid. 121, 218) beweist Verf. folgendes Ergebnis über (kombinatorische) Komplexe: Zwei solche Komplexe mögen verwandt heißen, wenn wenigstens einer von ihnen nichtzusammenhängend ist oder wenn beide zusammenhängend sind und sie isomorphe Fundamentalgruppen haben. Es sei \mathfrak{R} eine beliebige binäre Relation zwischen Komplexen, die jedenfalls zwischen kombinatorisch äquivalenten Komplexen besteht und deren Bestehen die Verwandtschaft der Komplexe nach sich zieht. Es sei M^4 der Komplex einer gewissen Triangulation der in der früheren Note konstruierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}(A, \dots, A, 0)$. Dann ist die Frage, ob ein beliebig vorgelegter vierdimensionaler Komplex zu M^4 in der Beziehung \mathfrak{R} steht, algorithmisch unentscheidbar. A fortiori ist also das allgemeine Entscheidungsproblem für die Relation \mathfrak{R} zwischen Komplexen unlösbar. Insbesondere gilt dies für das Entscheidungsproblem der kombinatorischen Äquivalenz von Komplexen — Verf. skizziert weiter eine konstruktive Präzisierung des Homöomorphiebegriffes für Polyeder (= Körper von Komplexen), so daß die konstruktive Homöomorphie ihrer Körper für Komplexe ebenfalls eine Relation \mathfrak{R} von der obengenannten Art ist.

E. Burger.

Algebra und Zahlentheorie.

• **Gonin, E. G.:** Theoretische Arithmetik. [Teoretičeskaja arifmetika.] Ein Lehrmittel für Studenten der physikalisch-mathematischen Fakultäten der pädagogischen Institute. Moskau: Staatsverlag für Lehrbücher und pädagogische Literatur des Bildungsministeriums der RSFSR 1959. 232 S. R. 5,65 [Russisch].

Ein Lehrbuch für pädagogische Institute. Es enthält in ausführlicher und sorgfältiger Darstellung die Grundbegriffe der Mengenlehre, das Wichtigste über algebraische Strukturen und einen systematischen Aufbau des Zahlensystems bis zu den Algebren, insbesondere Quaternionen.

R. Kochendörffer.

Vandiver, H. S.: On the use of abstract algebra as a method for obtaining results involving rational integers only and the reverse of this procedure. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 46, 545—554 (1960).

Eine Aufzählung einiger Sätze der elementaren Zahlentheorie in historischer Reihenfolge, deren Inhalt, oder deren Beweis die Bildung allgemeiner algebraischer Begriffe anregen, oder welche umgekehrt ihren Ursprung den Fortschritten der abstrakten Algebra verdanken.

M. Eichler.

Allgemeines. Kombinatorik:

Nanjundiah, T. S.: On a formula of A. C. Dixon. Proc. Amer. math. Soc. 9, 308—311 (1958).

This paper contains a simple and elementary proof of a well-known formula due to A. C. Dixon [Messenger of Mathematics 20, 79—80 (1891)], viz.

$$(1) \quad \sum_{r=0}^{2n} (-1)^r \binom{2n}{r}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

The following identity is proved

$$(2) \quad \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^p a^{n-r} b^r = \sum_{r=0}^{[n/2]} c_{n,r}^{(p)} \binom{n-r}{r} (a+b)^{n-2r} (ab)^r,$$

p arbitrary integer. For the coefficients $c_{n,r}^{(p)}$ explicit representations are given, both in case $p > 0$ and $p < 0$. In particular $c_{n,r}^{(3)} = \binom{n+r}{r} \binom{n}{r}$ and $c_{n,r}^{(-1)} = (-1)^r \binom{n+1}{r} \binom{n}{r}^{-1}$. Taking $p = 3$, $a = 1$, $b = -1$ and replacing n by $2n$ in (2), the formula (1) is obtained. The author's results for $p = -1$ give nothing but known formulas.

W. Ljunggren.

Hanani, Haim: On the number of monotonic subsequences. Bull. Res. Council Israel, Sect. F 7, 11—13 (1957).

Alle Folgen aus m reellen Zahlen werden in möglichst wenige im weiteren Sinne monotone Teilfolgen zerlegt gedacht. Das Maximum der dabei auftretenden Anzahlen von Teilfolgen heißt $g[m]$. Durch Induktion nach n wird gezeigt, daß $m \leq \frac{1}{2}n(n+3)$ hinreichend für $g[m] \leq n$ ist und durch Angabe eines Beispiels, daß $g[\frac{1}{2}n(n+3)+1] > n$ ist. Die Induktionskonstruktion gestattet weiter einen sehr kurzen Beweis für einen von Erdős und Szekeres benutzten Hilfssatz [Compositio Math. 2, 463—470 (1935), dies. Zbl. 12, 270]: Enthält eine reelle Folge mindestens $n^2 + 1$ Elemente, so enthält sie auch eine i. w. S. monotone Teilfolge mit mindestens $n + 1$ Elementen. (Ein Beispiel für eine Folge aus n^2 Elementen, bei der alle monotonen Teilfolgen höchstens n Elemente besitzen, wird zitiert).

Th. Kaluza.

Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

● Pereira Gomes, S.: Elemente der linearen und multilinearen Algebra. Band I. (Textos de Matemática.) Instituto de Física e Matemática, Universidade do Recife 1959. § 1—7. [Portugiesisch].

Ce premier tome correspond à la partie d'algèbre linéaire; les chapitres traités sont les suivants: Espaces vectoriels. Applications linéaires. Matrices. Projections. Formes linéaires (espace dual). Equations linéaires. Algèbres. De caractère élémentaire, l'exposition est claire et bien ordonnée. De nombreux exemples illustrent efficacement les sujets considérés. [Note du rap. L'affirmation de l'exemple III, pag. 18-V, n'est pas correcte. La multiplication n'étant pas linéaire en y , G n'est pas une algèbre.]

G. Ancochea.

Farnell, A. B.: A special Vandermondian determinant. Amer. math. Monthly 66, 564—569 (1959).

Bewiesen wird $\det ((\cos \pi \mu/m)^p)_{\mu, r=0, \dots, m} = \frac{1}{m^{m-1} \cdot 2^{3-m^2}}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$; $0^0 = 1$). Zum Beweis werden u. a. Identitäten mit Potenzen und Binomialkoeffi-

zienten verwendet, die aus binomischen Entwicklungen folgen. Schon für $m = 20$ ist obige $\det \approx 8 \cdot 10^{-47}$, also sehr klein, was die Bestimmung der Polynome mit Nullstellen in obigen \cos -Abszissen (Tschebyscheff) mittels Determinanten erschwert. Zum Schluß muß es genauer heißen $\det ((\cos \pi (\mu - \frac{1}{2})/m)^{\nu})_{\mu=1, \dots, m; \nu=0, \dots, m-1} = \sqrt{m^m \cdot 2^{-(m-1)^2}}$, was ebenfalls bewiesen wird. I. Paasche.

Butler, M. C. R.: *Module theory and the matrix equation $f(S) = T$* . J. London math. Soc. **34**, 325—336 (1959).

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper F , ferner T ein Endomorphismus von V und $f(t)$ ein nicht-konstantes Polynom aus $F[t]$. Verf. behandelt die Frage, wann es zu T und f einen Endomorphismus S von V mit $f(S) = T$ gibt. Während bei den bisherigen Untersuchungen dieser Frage V als endlich-dimensional vorausgesetzt wurde, verzichtet Verf. auf jede Dimensionsbeschränkung und unterwirft dafür den Endomorphismus T gewissen, weiter unten formulierten Bedingungen. Als wesentliches Hilfsmittel treten die Ulmschen Invarianten von Moduln auf. — Definiert man das Produkt eines Polynoms $g \in F[t]$ mit einem Vektor $x \in V$ durch $gx = g(T)x$, so kann man V als einen $F[t]$ -Modul V_T auffassen. Der Endomorphismus T heißt lokal algebraisch, wenn es zu jedem $x \in V$ ein Polynom $g \in F[t]$ mit $g \neq 0$ und $gx = 0$ gibt. Gleichwertig hiermit ist, daß V_T ein Torsionsmodul ist, der dann durch seine Ulmschen Invarianten bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt wird. T heißt algebraisch, wenn T lokal algebraisch ist und g unabhängig von x gewählt werden kann. Schließlich heißt T lokal nilpotent bzw. nilpotent, wenn jeweils g eine Potenz von t ist. Die oben erwähnten Voraussetzungen über T lauten nun: T ist algebraisch oder bei höchstens abzählbar-unendlicher Dimension von V über F lokal algebraisch. Verf. zeigt, daß das allgemeine Problem auf den Fall zurückgeführt werden kann, bei dem es ein irreduzibles Polynom $p \in F[t]$ gibt, für das $p(T)$ lokal nilpotent ist. Eine weitere Reduktion führt dann auf folgende zwei Spezialfälle: f ist irreduzibel oder eine Potenz von t . Im ersten Fall ist die Gleichung $f(S) = T$ genau dann lösbar, wenn die Ulmschen Invarianten von V_T durch den Grad von f teilbar sind. Die Lösung ist dann bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmt. Der zweite Fall wird in ähnlicher, etwas komplizierterer Weise behandelt.

H.-J. Kowalsky.

Westwick, Roy: *Linear transformations of a Grassmann product space*. Canadian math. Bull. **3**, 216 (1960).

Abstract of Thesis, presented at the University of British Columbia, March 1960.

Portmann, Walter O.: *Hausdorff-analytic functions of matrices*. Proc. Amer. math. Soc. **11**, 97—101 (1960).

Sei Z_0 eine komplexe $n \times n$ Matrix mit einfachen Eigenwerten. Für alle Z einer passenden Umgebung von Z_0 sind dann die Projektoren (Frobeniusschen Kovarianten) $P_k(Z)$ H -analytische Funktionen [vgl. F. Hausdorff, Verhandl. Königl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Ber. **52**, 43—61 (1900) und W. O. Portmann, Proc. Amer. math. Soc. **10**, 101—105 (1959)]. Ferner wird bewiesen, daß es eine nicht-singuläre analytische Matrixfunktion $Q = Q(Z)$ gibt derart, daß $Q^{-1}ZQ = A$ diagonal ist. Die (einfachen) Eigenwerte λ_i von Z sind daher analytische Funktionen der Elemente z_{ij} von Z . Nun sei $F(X)$ eine möglicherweise nicht-skalare Matrixfunktion. Mit Hilfe eines Lemmas von H. Richter (dies. Zbl. **37**, 8) wird gezeigt, daß diese notwendigerweise ein Polynom in X , also skalar, ist, wenn $F(T^{-1}XT) = T^{-1}F(X)T$, und unter einer weiteren Einschränkung betr. die Ableitungen der Diagonalelemente auch H -analytisch. H. Schwerdtfeger.

Portmann, Walter O.: *A sufficient condition for a matrix function to be a primary matrix function*. Proc. Amer. math. Soc. **11**, 102—106 (1960).

Eine Matrixfunktion $f(Z)$ heißt primär, wenn sie aus einer analytischen (ausgelassen im Text) Skalarfunktion $f(z)$ der komplexen Variablen z hervorgeht. Für solche wurde in der oben zitierten Arbeit des Verf. die H -Analytizität nachgewiesen.

Hier wird nun nach hinreichenden Bedingungen gefragt, unter denen eine allgemeine Funktion $F(Z)$ primär ist, also $F(Z) = f(Z)$ gilt. Es wird bewiesen: Sei $F(X)$ H -analytisch in einem Bereich D so, daß für $X \in D$ auch $T^{-1} X T \in D$ und $F(T^{-1} X T) = T^{-1} F(X) T$. Ist dann für $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in D$ das Diagonalelement $F(A)_{ii}$ von $F(A)$ nur von λ_i abhängig ($i = 1, \dots, n$), so ist $F(Z)$ primär.
H. Schwerdtfeger.

Weinberg, Louis and Paul Slepian: Positive real matrices. *J. Math. Mech.* **9**, 71—83 (1960).

Die Arbeit enthält eine Zusammenstellung der für positiv reelle Funktionen und positiv reelle Matrizen, sowie für ihre Sonderfälle, insbesondere Reaktanzfunktionen und Reaktanzmatrizen gültigen Sätze. Insgesamt 10 solcher Sätze, teils bekannte, teils von den Verff. neu aufgestellte, werden angegeben und bewiesen. *G. Bosse.*

Farahat, H. K. and W. Ledermann: Matrices with prescribed characteristic polynomials. *Proc. Edinburgh math. Soc.* **11**, 143—146 (1959).

K sei ein Körper. Es gibt eine Matrix $A \in K_n$ mit vorgegebenem charakteristischem Polynom $x^n + \dots$ und mit vorgegebenen a_1, a_2, \dots, a_{n-1} als erste $n-1$ Diagonalelemente. Es gibt auch noch eine Matrix A mit vorgegebenem charakteristischem Polynom $x^n + \dots$ und mit vorgegebenem $(n-1) \times (n-1)$ erstem Hauptminor B , wenn das charakteristische Polynom von B den Grad $n-1$ hat. (Als Korollar des Satzes kann man erwähnen, daß der Satz ohne die letzte Bedingung richtig bleibt, wenn K algebraisch abgeschlossen ist, oder auch schon, wenn B $n-1$ Eigenwerte in K hat.)
J. L. Brenner.

Mirsky, L.: Remarks on an existence theorem in matrix theory due to A. Horn. *Monatsh. Math.* **63**, 241—243 (1959).

Verf. gibt einen kürzeren Beweis für die folgenden Resultate von A. Horn (dies. Zbl. **55**, 9). Es seien $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$, $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n > 0$; $\sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \sum_{i=1}^k \mu_i$, $k = 1, \dots, n-1$; $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \mu_i$. Dann gibt es 1. eine reelle $n \times n$ Matrix P derart, daß die λ_i die Eigenwerte von P und die μ_i^2 die Eigenwerte von $P^* P$ sind, 2. eine reelle symmetrische Matrix H derart, daß die μ_i die Eigenwerte von H sind, und daß $\det [H]_k = \prod_{i=1}^k \lambda_i$, $k = 1, \dots, n$, ist. Hier bedeutet $[H]_k$ den ersten $k \times k$ Hauptminor von H .
J. L. Brenner.

Ursell, H. D.: Inequalities between sums of powers. *Proc. London math. Soc.*, III. Ser. **9**, 432—450 (1959).

Bei festem n und variablem $\alpha > 0$ bestehen bekannte, z. T. optimale Ungleichungen zwischen den Größen $S_\alpha = w_1^\alpha + \dots + w_n^\alpha$ (alle $w_v > 0$, fest), z. B. $S_\alpha^\beta \leq S_\beta^\alpha$ für $\alpha > \beta$ (Jensen), $S_\beta^{\alpha-\gamma} \leq S_\alpha^{\beta-\gamma} S_\gamma^{\alpha-\beta}$ für $\alpha > \beta > \gamma$ (Konvexität), $\det |S_{\alpha_i + \alpha_k}| \geq 0$. Verf. diskutiert diese und grenzt den möglichen Variationsbereich (Wertevorrat) von S_α bei gegebenen S_β, S_γ, \dots ab. Als Hilfsmittel dienen u. a. die aus einer Verallgemeinerung der Vorzeichenregel von Descartes folgenden Ungleichungen für m -reihige Determinanten $D = \det |v_i^{\alpha_k}| > 0$ und $\left(\frac{\partial D}{\partial v_i}\right)_{v_i = v_{i+1}} > 0$ ($v_1 > \dots > v_m > 0$), sowie die Transformation $(w_1, \dots, w_n) \rightarrow (S_{\alpha_1}, \dots, S_{\alpha_m})$.
I. Paasche.

Breusch, Robert: On the extrema of certain polynomials. *Proc. Amer. math. Soc.* **9**, 742—747 (1958).

This is a study of problems similar to those considered by Erdős (this Zbl. **32**, 386) and by Breusch (this Zbl. **33**, 97). Here it is proved that if $g_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)$,

$|z_k| = 1$, and if $e^{i\alpha_k}$, $1 \leq k \leq n$, are the points on the arc (z_k, z_{k+1}) ($z_{n+1} = z_1$) where $|g_n(z)|$ assumes its maximum, then

$$\prod_{k=1}^n |g_n(e^{i\alpha_k})| \leq 2^n; \quad \sum_{k=1}^n |g_n(e^{i\alpha_k})| \geq 2n.$$

It is also proved that if $f_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$, $-1 \leq x_k \leq 1$, and if y_k , $1 \leq k \leq n-1$, denotes the points in (x_k, x_{k+1}) where $|f_n(x)|$ assumes its maximum, then

$$\frac{1}{2} |f(-1)| + \frac{1}{2} |f(+1)| + \sum_{k=1}^{n-1} |f(y_k)| \geq \frac{n}{2^{n-1}},$$

with equality only if $f_n(x)$ is the n -th Tschebyscheff polynomial. *E. Frank.*

Pommerenke, Chr.: On some problems by Erdős, Herzog and Piranian. *Michigan math. J.* **6**, 221—225 (1959).

The author answers some questions left unanswered by Erdős, Herzog and Piranian (this *Zbl.* **88**, 253). If $f(z)$ is a polynomial with highest coefficient 1, the curve $|f(z)| = 1$ is denoted by C and the interior $|f(z)| < 1$ by E . It is shown that there exists a polynomial $f(z)$ such that, for some $z_0 \in C$ with z_0 on a line of support of C , $|z - z_0| < 2$ for all $z \in C$. Also, if E is connected, the length of C is at least 2π . Letting $\zeta = (z_1 + \dots + z_n)/n$, where z_1, \dots, z_n are the zeros of $f(z)$, it is then shown that if E is connected, C is contained in the circle $|z - \zeta| < 2$. It is shown, finally, that, if E is connected and has diameter d and width b , then $2 \leq d < 4$, $0 < b^2 \leq 32/3$, $b^2 + d^2 \leq 64/3$. *A. J. Lohwater.*

Teicher, Henry: A question concerning positive type polynomials. *Proc. Amer. math. Soc.* **10**, 482—489 (1959).

A solution of the following question [cf. P. Slepian, Research problem 1, *Bull. Amer. math. Soc.* **64**, 59 (1958)] is given: Let $0 < A < 1$. Find the smallest integer n for which there exist n real numbers a_1, a_2, \dots, a_n such that the polynomial $(y^2 - 2A y + 1) \prod_{i=1}^n (y + a_i)$ has all its coefficients non-negative. If N is such an integer, does there exist some real number a such that $(y^2 - 2A y + 1)(y + a)^N$ has only non-negative coefficients. (The answer is found affirmative.) *E. Frank.*

Gårding, Lars: An inequality for hyperbolic polynomials. *J. Math. Mech.* **8**, 957—965 (1959).

Es sei $P(x)$ ein homogenes Polynom m -ter Ordnung in n Veränderlichen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. P heißt \mathbf{a} -hyperbolisch, wenn \mathbf{a} reell ist und die Gleichung $(1) P(x + s \mathbf{a}) = 0$ für jedes reelle x m reelle Wurzeln s , hat. Beispiel: x seien die symmetrischen Matrizen, \mathbf{a} eine definite Matrix, P die Determinante. Ist P \mathbf{a} -hyperbolisch, so auch jede Polarform bezüglich \mathbf{a} . In der Arbeit wird eine sich an diesen Begriff knüpfende Theorie entwickelt. Ist insbesondere $C(P, \mathbf{a})$ die Menge derjenigen x , für die alle Wurzeln von (1) negativ sind, so ist $C(P, \mathbf{a})$ ein konvexer Kegel, dessen „Spitze“ LP ein linearer Raum durch den Nullpunkt ist. Ist $\mathbf{b} \in C(P, \mathbf{a})$, so ist P auch \mathbf{b} -hyperbolisch und es ist $C(P, \mathbf{a}) = C(P, \mathbf{b})$. Ist $M(x^1, x^2, \dots, x^m)$ die allgemeine Polarform von $P(x)$ also $P(x) = M(x, x, \dots, x)$, so gilt für $x^i \in C(P, \mathbf{a})$; $i = 1, 2, \dots, m$ stets $M(x^1, x^2, \dots, x^m) \geq [P(x^1) P(x^2) \dots P(x^m)]^{1/m}$.

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn je zwei der x_i proportional und LP sind. *G. Bol.*

Endler, Otto: Über das inverse Problem der Galoisschen Theorie. *Anais Acad. Brasil Ci.* **31**, 331—332 (1959) [Portugiesisch].

Das Problem, zu einem unendlichen Körper K die Normalkörper N mit vorgegebener Galoisgruppe Γ zu bestimmen, wird mit Hilfe von Fundamentalpolynomen diskutiert, die zu beliebigen Gruppen $\mathfrak{J} \cong \Gamma$ von Cremona-Operatoren definiert

werden. [Bei W. Krull, *Elementare und Klassische Algebra*. II. Sammlung Göschens Bd. 933, Berlin 1959 (insbesondere Abschnitt IV), werden nur lineare und projektive Gruppen betrachtet.] Als Beispiel wird eine mit Hilfe der Wittschen Vektorrechnung definierte nicht-projektive Gruppe angeführt.
W. Krull.

Gruppentheorie:

Neumann, B. H.: *Embedding theorems for semigroups*. J. London math. Soc. **35**, 184—192 (1960).

In the present paper the notion of the wreath product of groups and the constructive procedure used by the author and H. Neumann [J. London math. Soc. **34**, 465—479 (1959)] are generalized for semigroups. With the aid of this construction the author gives a new proof for a theorem of T. Evans (this Zbl. **47**, 21) according to which every countable semigroup can be embedded in a semigroup generated by 2 elements. From this constructive proof it follows easily that every finite semigroup can be embedded in a finite two-generator semigroup. Furthermore, it is proved that every finitely generated periodic semigroup can be embedded in a periodic semigroup with two generators. As corollaries of this last theorem an analogue of the Burnside reduction theorem and of the restricted Burnside conjecture for semigroups can be given. Finally a more general theorem is stated: If the semigroup S has d generators and if it belongs to the variety defined by laws $u(x_1, \dots, x_n) = v(x_1, \dots, x_n)$, then S can be embedded in a two-generator semigroup satisfying the laws $u(x_1^m, \dots, x_n^m) = v(x_1^m, \dots, x_n^m)$, where $m \geq 4d - 1$ (or $m = 3d$).

J. Szendrei.

Ross, Kenneth A.: *A note on extending semicharacters on semigroups*. Proc. Amer. math. Soc. **10**, 579—583 (1959).

The concept of the semicharacter of a semigroup S was introduced by E. Hewitt and H. S. Zuckerman (this Zbl. **64**, 269) and S. Schwarz [Czechosl. Math. J. **4** (79), 219—247 (1954)]. This means a bounded complex function χ on S if a) $\chi(s) \neq 0$ for some $s \in S$; b) $\chi(s_1 s_2) = \chi(s_1) \chi(s_2)$ for all $s_1, s_2 \in S$. It is proved the following theorem: The semicharacter χ on a subsemigroup T of a commutative semigroup S is extendable to a semicharacter on S if and only if the solvability of $a x = b$ ($a, b \in T$) in T implies $|\chi(a)| \geq |\chi(b)|$.

J. Szendrei.

Piccard, Sophie: *Les groupes quasi libres*. C. r. Acad. Sci., Paris **250**, 3260—3262 (1960).

The notion of a quasi-free group is defined and examples are given. With each quasi-free group is associated a distributive lattice of Abelian groups. This lattice can be used to study quasi-free groups.

N. Blackburn.

Fridman, M. A.: *Zu einer Frage über die vollständig regulären Operationen auf der Klasse der Gruppen*. Uspechi mat. Nauk **14**, Nr. 3 (87), 181—183 (1959) [Russisch].

Die Operationen des direkten und des freien Produkts sind kommutativ und assoziativ. Jede dieser Operationen ordnet einem Paar von Gruppen A und B eindeutig eine wohlbestimmte Gruppe C zu, und zwar kann man in C zwei Untergruppen A' und B' angeben, die zusammen die Gruppe C erzeugen und die den Gruppen A und B isomorph sind. A. G. Kuroš hat in seinem Buch Gruppentheorie (Moskau-Leningrad 1944; S. 351) folgendes Problem aufgeworfen: Gibt es Operationen auf der Menge aller Gruppen mit den oben aufgezählten Eigenschaften, die von dem direkten und dem freien Produkt verschieden sind? Mit solchen und ähnlichen Problemen beschäftigte sich im letzten Jahrzehnt eine ganze Reihe von Arbeiten, wie auch die vorliegende Arbeit [vgl. O. N. Golovin, dies. Zbl. **40**, 298; **38**, 160; **42**, 18, 19; M. A. Fridman, dies. Zbl. **72**, 257; R. R. Struik, dies. Zbl. **71**, 21; E. S. Ljapin, Učenie Zapiski ped. Inst. Herzen, Leningrad **86**, 93—106

(1949;) S. Moran, dies. Zbl. **73**, 360]. Es bezeichne $\prod_{\alpha \in m} A_\alpha$ eine durch irgendwelche Operation hergestellte Gruppe. Das Produkt $\prod_{\alpha \in m} A_\alpha$ ist regulär, wenn gilt: a) die hergestellte Gruppe enthält zu jedem A_α eine zu diesem isomorphe Untergruppe, b) die A_α erzeugen die ganze Gruppe, c) jeder von diesen Faktoren ist teilerfremd zu dem durch die anderen erzeugten Normalteiler. Das Produkt $\prod_{\alpha \in m} A_\alpha$ ist vollständig regulär, wenn a) regulär, b) aus $G = \prod_{\alpha \in m} A_\alpha$ und $A_\alpha = \prod_{\beta \in m_\alpha} A_{\beta\alpha}$ folgt $G = \prod_{\beta \in m_\alpha, \alpha \in m} A_{\beta\alpha}$. A. T. Mal'cev hat folgendes Problem aufgeworfen: gibt es vollständig reguläre Operationen, auf der Menge aller Gruppen derart, daß auch die Untergruppen der gegebenen Gruppen entsprechend komponiert werden? Verf. beweist, daß unter den vollständig regulären halbkommutativen (Def. s. Fridman, dies. Zbl. **72**, 257) Operationen nur das direkte und das freie Produkt die obigen Mal'cev'schen Bedingungen befriedigen. J. Szép.

Crouch, R. B.: Characteristic subgroups of monomial groups. Pacific J. Math. **10**, 85—89 (1960).

Verf. hat an anderer Stelle (dies. Zbl. **65**, 259; **80**, 20) die Normalteiler der unendlichen monomialen Gruppen bestimmt. Er benutzt diese Resultate in der vorliegenden Arbeit zur Bestimmung der charakteristischen Untergruppen der unendlichen monomialen Gruppen. Dabei werden auch Resultate von C. V. Holmes [Contributions to the Theory of Groups, Research Grant NSF. G 1126, Report No. 5, Feb., 23—93 (1956)] über die Automorphismen der unendlichen monomialen Gruppen benutzt, die allerdings wohl nur beschränkt zugänglich sind.

R. Baer.

Gol'berg, P. A.: S-Radikal und Sylowbasen der unendlichen Gruppen. Mat. Sbornik, n. Ser. **50** (92), 25—42 (1960) [Russisch].

Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. **50**, 18; **64**, 22). Unter dem S-Radikal der Gruppe G verstehe man den größten Normalteiler von G , der direktes Produkt seiner Sylowgruppen ist. Mittels dieses Begriffes wird zunächst folgendes bewiesen: Ist A eine Untergruppe in G , die durch solche Sylowgruppen von G erzeugt wird, welche nur endlich viele konjugierte besitzen, so ist A periodisch. — Sei π eine beliebige Menge von Primzahlen. Eine Menge $S^{(\pi)}$, $p \in \pi$ von p -Sylowgruppen von G heißt eine π -Sylowbasis, wenn für jede endliche Teilmenge π_0 von π die $S^{(\pi)}$ mit $p \in \pi_0$ eine periodische Untergruppe erzeugen, in deren Elementordnungen nur Primzahlen aus π_0 aufgehen. Eine π -Sylowbasis heißt vollständig, wenn G durch die $S^{(\pi)}$, $p \in \pi$ erzeugt wird. Der wichtigste Satz der Arbeit enthält eine hinreichende Bedingung für die Existenz von π -Sylowbasen in Gruppen G , die für jede Primzahl p aus π nur endlich viele p -Sylowgruppen enthalten. Diese Bedingung besteht darin, daß G π -abgeteilt ist, d. h. eine aufsteigende Normalreihe besitzt, in der die Elementordnungen in jeder Faktorgruppe durch höchstens eine Primzahl aus π teilbar sind. Ist G periodisch und umfaßt π alle in den Elementordnungen aufgehenden Primzahlen, so ist diese Bedingung sogar notwendig und hinreichend für die Existenz einer vollständigen Sylowbasis. R. Kochendörffer.

Čarin, V. S.: On the theory of locally nilpotent groups. Translat. by Edwin Hewitt. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. **15**, 33—54 (1960).

Vgl. die Besprechung des russischen Originals in diesem Zbl. **54**, 11.

Vinogradov, A. A.: Teilweise geordnete lokal nilpotente Gruppen. Ivanov. gosudarst. ped. Inst., učenyje Zapiski, fiz.-mat. Nauki **4**, 3—18 (1953) [Russisch].

Für teilweise geordnete Gruppen G gelten die folgenden Sätze. 1. Besitzt G eine (bez. < wohlgeordnete und) aus lauter konvexen Untergruppen bestehende Zentralreihe, wo alle Faktorgruppen torsionsfrei sind, so läßt sich die Ordnungsrelation von G zu einer linearen erweitern. 2. Ist G torsionsfrei und nilpotent der Klasse 2, so gibt es eine G enthaltende teilweise geordnete Gruppe H , die ebenfalls nilpotent der

Klasse 2 ist und in der alle Gleichungen $x^m = a$ ($a \in H$, m eine natürliche Zahl) lösbar sind. 3. In dieser Gruppe H folgt aus $a > 1$ stets $x > 1$, und H besitzt einen nicht-trivialen konvexen Normalteiler. 4. Ist G torsionsfrei und nilpotent der Klasse 2, so kann die Ordnung von G zu einer linearen erweitert werden. 5. Besitzt eine Verbandsgruppe G keine nicht-triviale konvexe Untergruppe, so ist G archimedisch angeordnet. 6. Jede endlich erzeugbare nilpotente Verbandsgruppe G besitzt eine aus konvexen Untergruppen bestehende Zentralreihe. 7. Dasselbe gilt unter der Voraussetzung, daß sich jede endliche Untermenge der Verbandsgruppe G in eine endlich erzeugbare nilpotente Verbandsuntergruppe von G einbetten läßt. In diesem Falle enthält eine nicht-kommutative G nicht-triviale l -Ideale. *L. Fuchs.*

Brauer, Richard und Michio Suzuki: On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a quaternion group. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 45, 1757—1759 (1959).

Verff. teilen den folgenden tief liegenden Satz mit: Sei G eine endliche Gruppe, deren 2-Sylowgruppen gewöhnliche oder verallgemeinerte Quaternionengruppen sind (also nur ein Element der Ordnung 2 enthalten); sei H der größte Normalteiler ungerader Ordnung von G ; dann hat G/H ein Zentrum der Ordnung 2. Der Beweis für die wesentliche Teilaussage, daß G nicht einfach ist, wird skizziert; er beruht auf Brauers Theorie der modularen Charaktere. *H. Wielandt.*

Hobby, Charles: The Frattini subgroup of a p -group. *Pacific J. Math.* 10, 209—212 (1960).

Let N be a normal subgroup of a finite p -group G . If N is contained in the Frattini subgroup $\Phi(G)$ of G and the centre of N is cyclic, then N is cyclic. This was proved by Burnside in the case when N is the derived group G' of G , and is proved in the present paper when N is one of a certain class of subgroups which includes both G' and $\Phi(G)$. It is also remarked that if G is a finite p -group and $\Phi(G)$ has two generators, then $\Phi(G)$ is metacyclic. *N. Blackburn.*

Zappa, G.: Generalizzazione di un teorema di Kochendörffer. *Matematiche* 13, 61—64 (1959).

Verf. beweist eine weitgehende Verallgemeinerung eines Satzes des Ref. über Sylowgruppen mit ausgezeichnetem Repräsentantensystem [*Math. Nachr.* 17, 189—194 (1959)]. Sei G eine endliche Gruppe und H eine nilpotente π -Hallgruppe von G ; ferner bezeichne π' die Menge der nicht in π enthaltenen Primteiler der Ordnung von G . Genau dann besitzt H in G ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem, wenn G π' -abgeschlossen ist. Dieser Satz bleibt richtig, wenn man H nur als verstreut im Sinne von R. Baer (dies. Zbl. 82, 25) voraussetzt. Anm. d. Ref.: Es genügt nicht, von H nur Auflösbarkeit vorauszusetzen. Beispiel: In der symmetrischen Gruppe S_5 in den Ziffern 1, ..., 5 ist die die Ziffer 5 festlassende Untergruppe eine auflösbare Hallgruppe. Die Transpositionen (1,5), (2,5), (3,5), (4,5) bilden zusammen mit der Identität ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem, während S_5 nicht 5-abgeschlossen ist. *R. Kochendörffer.*

Swan, Richard G.: Projective modules over finite groups. *Bull. Amer. math. Soc.* 65, 365—367 (1959).

The following result generalizes a theorem of Serre (*Fac. Sci. Paris, Séminaire Dubreil, Paris* 1958): Let π be a finite group. Then any finitely generated projective module over the group ring $Z\pi$ is the direct sum of a free module and an ideal I of $Z\pi$. The ideal I can be chosen so that its index in $Z\pi$ (which is finite if $I \neq 0$) is prime to any given integer. Let $C(Z\pi)$ be the projective class group of $Z\pi$. (See J. P. Serre, loc. cit.). Then it follows from the above theorem that $C(Z\pi)$ is finite for any finite π . This settles a question of Rim [*Ann. of Math.*, II. Ser. 69, 700—712 (1959)]. If $\pi' \subset \pi$ let $i(\pi, \pi') : C(Z\pi) \rightarrow C(Z\pi')$ be the obvious map and let n be the order of π and d the greatest common divisor of n and $\Phi(n)$, where Φ is Euler's function. Let $\alpha \in C(Z\pi)$. Then: 1. If $i(\pi, \pi')\alpha = 0$ for all cyclic subgroups $\pi' \subset \pi$ then $n\alpha = 0$. 2. If $i(\pi, \pi')\alpha = 0$ for all elementary subgroups $\pi' \subset \pi$, then $d\alpha = 0$. 3. If

$i(\pi, \pi')\alpha = 0$ for all hyper elementary subgroups $\pi' \subset \pi$, then $\alpha = 0$. (A group is elementary if it is direct product of a p -group and a cyclic group and hyper elementary if it is a split extension of a p -group by a cyclic group). *I. Berstein.*

Fuchs, L.: Notes on Abelian groups. I. Ann. Univ. Sci. Budapest. Rolando Eötvös, Sect. Math. 2, 5—23 (1959).

Fuchs, L.: Notes on Abelian groups. II. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 11, 117—125 (1960).

Note 1 is a short proof, of universal algebraic character, of L. Ja. Kulikov's theorem (this Zbl. 49, 298) that a countable direct summand of a direct sum of additive subgroups of the rationals is again a direct sum of subgroups of the rationals. The theme of Notes 2 to 6 is the structure of the values of Hom, Ext, \otimes , and Tor on the category of Abelian groups. In Note 2 the maximal torsion subgroup $A \otimes B$ is described by invariants of A and B . Its torsionfree part remains undetermined, though for torsionfree A, B the rank of $(A \otimes B)/p(A \otimes B)$ can be calculated for each prime p . In Note 5 Kulikov's p -basic subgroups of p -primary groups are defined for arbitrary groups; they provide a nice description of $A \otimes B$ when one factor is a torsion group. In Note 4 it is proved that Hom (A, B) is algebraically compact if A is a torsion group or if B is algebraically compact; and Ext (A, B) is algebraically compact if B is torsionfree or algebraically compact. Note 6 deals with co-torsion groups, that is with groups G such that Ext $(A, G) = 0$ whenever A is torsionfree [D. K. Harrison, Ann. of Math., II. Ser. 69, 366—391 (1959)]. Some closure properties of the class of co-torsion groups are studied, and a close connection with algebraic compactness established. Harrison showed that Ext (A, B) is always a co-torsion group. Fuchs proves that its quotient by the subgroup of pure extensions of B by A is algebraically compact. The following result (with certain converses) comprises Note 3. Let $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ be a pure exact sequence (i. e. $A\alpha$ is a pure subgroup of B). Write 1_X for the identity mapping of an Abelian group X into itself. Then the images of Hom $(\beta, 1_X)$, Hom $(1_X, \alpha)$, and Tor $(1_X, \alpha)$ are pure subgroups of their "target" groups, and the kernels of Ext $(\alpha, 1_X)$, Ext $(1_X, \beta)$, and $1_X \otimes \beta$ are pure subgroups of their "sources". There are numerous points of contact in Notes 2 to 6 with work of D. K. Harrison, loc. cit.

M. C. R. Butler.

Fuchs, L.: On generalized pure subgroups of Abelian groups. Ann. Univ. Sci. Budapest. Rolando Eötvös, Sect. Math. 1, 41—47 (1958).

The contents of this paper appear in § 27 of the author's book Abelian Groups, Budapest, 1958.

M. C. R. Butler.

Suprunenko, D. A.: Reelle lineare lokal nilpotente Gruppen. Mat. Sbornik, n. Ser. 50 (92), 59—66 (1960) [Russisch].

Verf. gibt eine Übersicht über alle maximalen irreduziblen lokal nilpotenten Untergruppen der vollen linearen Gruppe des Grades n über dem Körper der reellen Zahlen. Für eine ungerade Zahl $n > 1$ existieren keine irreduziblen lokal nilpotenten Untergruppen. Ist n gerade, aber keine Potenz von 2, so sind alle maximalen irreduziblen lokal nilpotenten Untergruppen zueinander konjugiert, während sie für $n = 2^k$ ($k \geq 1$) in zwei Systeme konjugierter Untergruppen zerfallen. Jede irreduzible lokal nilpotente Untergruppe ist für $n > 2$ imprimitiv. *R. Kochendörffer.*

Engelmann, Folker: Zur Realisierbarkeit der Darstellungen der 3-dimensionalen Drehgruppe. Monatsh. Math. 64, 184—187 (1960).

Es wird in einfacher Weise bewiesen, daß die eindeutigen Darstellungen der 3-dimensionalen Drehgruppe reell realisiert werden können, die zweideutigen aber nicht.

H. Boerner.

Gluškov, V. M.: The structure of locally compact groups and Hilbert's fifth problem. Translat. by Kurt Hirsch. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 15, 55—93 (1960).

Vgl. die Besprechung des russischen Originals in diesem Zbl. 79, 42.

Verbände. Ringe. Körper:

Kuroš, A. G.: Direkte Zerlegungen in algebraischen Kategorien. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. 8, 391—412 (1959) [Russisch].

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Theorie der direkten Zerlegungen von algebraischen Strukturen, speziell von Gruppen, axiomatisch zu behandeln. Zu diesem Zweck wird der Begriff der Eilenberg-MacLaneschen Kategorie [Trans. Amer. math. Soc. 58, 231—294 (1945); dies. Zbl. 61, 92] spezialisiert. Diese besteht aus Objekten und Morphismen [Übersetzung des Wortes „mapping“ durch „Morphismus“ bei Ehresmann, J.-Ber. Deutsch. Math. Verein. 60, 49—77 (1957)]. Zu der teilweise erklärten Multiplikation der Morphismen kommt in dieser Arbeit eine ebenfalls teilweise definierte Addition der Morphismen hinzu, wobei nur Morphismen zwischen gleichen Objekten addiert werden dürfen. Die Addition soll insbesondere assoziativ und kommutativ sein, und zwischen den Verknüpfungen soll das distributive Gesetz gelten. Für jedes Paar von Objekten wird die Existenz eines bezüglich der Addition neutralen Morphismus gefordert. Schließlich werden im Zusammenhang mit Monomorphismen Kerne von Morphismen definiert, und es wird verlangt, daß jeder Morphismus einen Kern besitzt. Mit Hilfe der bisher gegebenen Begriffe werden direkte Zerlegungen einerseits für die Objekte in Form von Produkten, andererseits für die Morphismen in Form von Summen definiert. Zwischen den Zerlegungen wird eine Äquivalenz erklärt, und es wird der Begriff der Verfeinerung einer Zerlegung eingeführt. Jede direkte Zerlegung eines Objektes induziert eine direkte Zerlegung des zugehörigen identischen Morphismus, und umgekehrt wird jede direkte Zerlegung eines identischen Morphismus durch eine gewisse direkte Zerlegung des zugehörigen Objektes induziert. Genau die äquivalenten Zerlegungen des Objektes bewirken die gleiche Zerlegung des identischen Morphismus. Eine Zerlegung eines Objektes ist genau dann eine Verfeinerung einer anderen Zerlegung desselben Objektes, wenn die zugehörigen induzierten Zerlegungen des identischen Morphismus die gleiche Eigenschaft besitzen. Daraus folgt, daß man Untersuchungen über direkte Zerlegungen je nach Belieben in der Sprache der Objekte oder in der Sprache der Morphismen durchführen kann. Dieses Prinzip wird benutzt bei der Herleitung von Kriterien für die Existenz einer gemeinsamen Verfeinerung. Der in der Theorie der Zerlegungen wichtige Begriff des Austausches von Faktoren wird für die Objektzerlegung und für die Zerlegung des identischen Morphismus definiert. Im ersten Falle spricht man vom Ersetzen eines direkten Faktors, im zweiten vom Unterordnen eines direkten Summanden. Dabei ersetzt ein direkter Faktor einen anderen genau dann, wenn die entsprechenden Summanden einander untergeordnet sind. Zum Schlusse der Arbeit werden die Ergebnisse benutzt, um den Remakschen Satz über die direkten Zerlegungen endlicher Gruppen herzuleiten. *M. Hasse.*

Conrad, Paul: Generalized semigroup rings. II. Portugaliae Math. 18, 33—53 (1959).

L'A. développe davantage sa théorie des mults (v. ce Zbl. 81, 262). Un mult est un ensemble M (non vide) muni d'une structure algébrique ordonnée (partiellement), dont la loi de composition (\cdot) (univoque, mais non nécessairement universelle) et la relation d'ordre partiel \leq ou \geq satisfont aux axiomes que voici: (1) Pour tous les $a, b \in M$ tels que $a \geq b$ l'ensemble de tous les $x \in M$ tels que $a \geq x \geq b$, est une chaîne (= ensemble totalement ordonné par \geq). (2) Pour tous les $a, b, c, d \in M$ tels que $a \geq b$ et $c \geq d$, on a $a c \geq b d$, l'égalité $a c = b d$ valant si et seulement si $a = b$ et $c = d$. Actuellement, l'A. ajoute un troisième axiome, à savoir: (3) Pour $a, b, c \in M$ on a $a b \in M$ et $(a b) c \in M$ si et seulement si on a $b c \in M$ et $a (b c) \in M$ et, si tel est le cas, alors $(a b) c = a (b c)$. Parmi les exemples de mults, il y a lieu de signaler ici le semigroupe additif des entiers rationnels non-négatifs (ordonnés selon la grandeur), les groupes mixtes, certaines catégories de MacLane et enfin les

mults de matrices (= matrix mults); ces derniers sont étudiés en détail dans le § 2 du présent travail dont les §§ 1 et 3 sont consacrés respectivement à l'étude des semi-groupes librement engendrés par des (sub) mults et à la recherche des propriétés des idéaux d'un mult M en connexion avec les idéaux de certains sousanneaux de l'ensemble Γ de toutes les applications (uniques) de M dans un anneau quelconque \mathfrak{R} , entendu qu'on définisse, suivant l'A.: $m(\alpha + \beta) = m\alpha + m\beta$ et $m\alpha\beta = \sum_{x y = m} (x\alpha)(y\beta)$ pour chaque $m \in M$, chaque couple $\alpha, \beta \in \Gamma$ et tous les $x, y \in M$ tels que $x y = m$ (s'il y en a; sans quoi, on définit simplement $m\alpha\beta = 0 \in \mathfrak{R}$). Cette définition du produit $\alpha\beta$ n'a de sens qu'autant qu'il n'y a qu'un nombre fini de couples $x, y \in M$ satisfaisant à $x y = m$ (ce qui relève des propriétés de l'ordre partiel dont le mult M est muni; cf. la première partie du présent travail). Le résultat suivant est assez simple pour qu'il puisse être mentionné ici (théorème 2.1 du travail): Un mult M est isomorphe (isomorphisme purement algébrique) à un mult de matrices $N = X \times X$ (X = ensemble nonvide quelconque et $(a, b)(c, d) = (a, d)$ si $b = c$) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites: (a) Pour tous les $a, b \in M$ il existe $x, y \in M$ tels que $x a y = b$, (b) Si pour $a, b, x, y \in M$, on a $x a y \in M$ et $x b y \in M$, alors $a = b$. L'Auteur indique ensuite quatre méthodes pour ordonner partiellement un mult de matrices. M. Benado.

Hájek, Otomar: Direct decompositions of lattices. I. Czechosl. math. J. 7 (82), 1—15 (1957).

Calling an element e of a lattice L neutral if it generates a distributive sublattice with every pair of elements of L , and calling a neutral element in a lattice with units central if it is also complemented, it is known that the neutral element is what corresponds to $(1, 0)$ under a subdirect-product resolution $L \leq L_1 \times L_2$ of L , and that a central element is what corresponds to $(1, 0)$ under a direct-product resolution $L = L_1 \times L_2$ of L . The author here proves a main theorem (th. 4): if d, e are elements of a lattice L , L has two subdirect resolutions of the forms: $L \leq \prod_{1 \leq i \leq 4; a \in A_i} L_{ia}$, where the four sets A_i are disjoint, and $L \leq \prod_{1, \dots, 4} M_i$, and if $d, (e)$, corresponds in the first resolution to the elements of the direct product having coordinates 1 from the L_{ia} when i is 1 or 2 and zeros for the other coordinates (having coordinates 1 from the L_{ia} when i is 1 or 3 and zeros for the other coordinates), while in the second resolution d has coordinates $(1, 1, 0, 0)$, and e has coordinates $(1, 0, 1, 0)$, then $M_i \leq \prod_{a \in A_i} L_{ia}$, for $i = 1, 2, 3$, and 4. As a special case he deduces that if the element e corresponds to $(1, 0)$ under each of two subdirect-product resolutions $L \leq L_1 \times L_2$ and $L \leq M_1 \times M_2$, then $L_i = M_i$, for $i = 1, 2$ (the equality means isomorphism). This unicity theorem allows him then to talk of the subdirect, or direct, product resolution corresponding to a neutral, or central, element resp. He also proves that if e corresponds to $(1, 0)$ under a subdirect product resolution $L \leq M \times N$, and e is complemented in L , then the isomorphism of L in $M \times N$ is really onto $M \times N$. Some of the familiar properties of elements in distributive lattices or Boolean algebras are then extended to neutral or central elements of general lattices. For example: if e is central its complement e' is unique, and it is an orthocomplement in the sense that whenever x has a complement x' , $x' \vee e'$ and $x' \wedge e'$ are the complements of $x \wedge e$ and of $x \vee e$ resp. Theorems 9 and 10 establish the possibility of extending a homomorphism h of L on K to corresponding homomorphisms f, g of M, N on suitable lattices R, S , when L is a direct or subdirect product of M, N , in such a way that K is a direct or subdirect product of the lattices R, S . Theorem 15 extends Birkhoff's factor theorem to subdirect products from direct products: if L has two subdirect product resolutions $L \leq N_1 \times N_2$ and $L \leq M_1 \times M_2$, then L has also a subdirect resolution $L \leq L_{11} \times L_{12} \times L_{21} \times L_{22}$,

with $M_i \leq L_{i1} \times L_{i2}$, and $N_i \leq L_{1i} \times L_{2i}$, for $i = 1, 2$. Defining for a ring R with unit 1, a dual ring as having the new operations $\dot{+}, \dot{\cdot}$ defined by: $x \dot{+} y = x + y - 1$ and $x \dot{\cdot} y = x + y - xy$, the author extends some of the earlier results on subdirect decompositions to rings (using the original multiplication and the multiplication in the dual ring as the analogues of the lattice operations). Thus if R has two subdirect product resolutions and an element e of R corresponds to $(1, 0)$ in both cases then the factors are isomorphic in pairs. Thus there is a unique subdirect resolution corresponding to the (central) element e ; and in fact it is a direct resolution. Examples of various types of rings are examined at the end. *V. S. Krishnan.*

Mihalek, R. J.: Modularity relations in lattices. Proc. Amer. math. Soc. 11, 9—16 (1960).

Relative modularity and linear dependence are generalized to give abstract notions of modularity and dependence in a lattice L . The following are the basic definitions: $(b, c) M$ means $(a + b)c = a + bc$ for every $a \leq c$ (M is ordinary modularity). If $R \subset T \subset L \times L$, R is a modularity relation under T means

- (i) $(b, c)R, b' \leq b, c' \leq c, bc = b'c', (b', c') T$ imply $(b', c') R$;
- (ii) $(c, d)R, (b, c + d)R, b(c + d) = cd$ imply $(b + c, d)R, (b + c)d = cd$.

For a modularity relation R under T , (i) R has the intersection property if $(c, d)R, (b, c + d)R, b(c + d) = cd$ imply $(b + d)(c + d) = d$; (ii) R is symmetric at a (for a in L) if $(b, c)R, bc = a$ imply $(c, b)R$; (iii) $(a_1, a_2, \dots, a_n) \bar{R}_a$ (read $(a_1, a_2, \dots, a_n) R$ -independent over a) means $(\sum_U a_i, \sum_V a_i)R, (\sum_U a_i)(\sum_V a_i) = a$, for every nonempty $U, V \subset \{1, 2, \dots, n\}$ such that $j < k$ for $j \in U, k \in V$; $(a_1, a_2, \dots, a_n) \bar{R}_a$ means $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})R_a$ for every permutation (i_1, i_2, \dots, i_n) of the integers $\{1, 2, \dots, n\}$. Typical of the results proved are: If R satisfies the intersection property, then $(a_1, a_2, \dots, a_n) \bar{R}_a$ implies $(\sum_U a_i)(\sum_V a_i) = a$ for arbitrary disjoint nonempty subsets U, V of $\{1, 2, \dots, n\}$. If $(a_1, a_2, \dots, a_n) \bar{R}_a$, then $(a_j, \sum_{i \neq j} a_i) \bar{R}_a$ for $1 \leq j \leq n$, and conversely provided $(a_j, \sum_V a_i) T$ for every nonempty subset V of $\{1, 2, \dots, n\}$ not containing j . Results similar to those of Wilcox are mentioned for the symmetric R . The derivation of the notions of weak-modularity and quasi-modularity from the above general scheme is worked out.

V. S. Krishnan.

Castaldo, Domenico: Relazione fra le funzioni simmetriche in un'algebra di Boole. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl., II. Ser. 10, Nr. 3, 27—34 (1959).

Untersuchung solcher symmetrischer Funktionen der Elemente a_1, \dots, a_n , in denen außer den a_v auch ihre Komplemente auftreten. *H. Gericke.*

Andreoli, Giulio: Proprietà delle funzioni simmetriche elementari nelle algebre di Boole e nelle algebre dei livelli. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl., II. Ser. 10, Nr. 1—10 (1959).

a_1, \dots, a_n seien Elemente eines Booleschen Verbandes $(B, +, \cdot)$, $\sigma_1(a) = a_1 + \dots + a_n$, $\sigma_2 = a_1 a_2 + \dots + a_{n-1} a_n$, usw. Dann gilt $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$. Falls $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, ist $\sigma_v = a_v$ für alle v . Aus beiden Ergebnissen folgt $\sigma_v(\sigma) = \sigma_v$. — Sätze über die Zerlegung der σ , wenn die a in bestimmter Weise zerlegbar sind. Verallgemeinerungen auf algebre dei livelli (s. Verf., dies. Zbl. 72, 261).

H. Gericke.

Fadini, Angelo: Algebra tetra-valente di livelli. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl., II. Ser. 10, Nr. 3, 11—26 (1959).

Ein Beispiel einer algebra di livelli (vgl. G. Andreoli, dies. Zbl. 72, 261). ξ, η seien Variable für die Elemente 0, 1 eines zweielementigen Booleschen Verbandes $(B, +, \cdot)$, T sei die Menge der vier Paare $z = (0, 0)$, $u = (0, 1)$, $d = (1, 0)$, $t = (1, 1)$; diese können als dyadische Darstellung der Zahlen 0, 1, 2, 3 aufgefaßt werden, dann ist damit eine lineare Ordnung in T gegeben. Mit $+$ = sup. \times = inf

bildet T einen distributiven Verband. In diesem lassen sich einige hübsche Spielereien durchführen. Durch $\delta(\xi, \eta) = (\xi, \bar{\eta})$, $\sigma(\xi, \eta) = (\bar{\xi}, \eta)$, $\nu(\xi, \eta) = (\xi, \bar{\eta}) - (\xi = \text{Komplement von } \xi) -$ sind Permutationen von T gegeben. Sie bilden zusammen mit der Identität die Vierergruppe. Für jedes x von T gilt: $x + \delta x + \sigma x + \nu x = (1, 1)$, $x \times \delta x \times \sigma x \times \nu x = (0, 0)$. Indem man die Teile der Additions- und Multiplikationstabellen in geeigneter Weise mischt, erhält man neue Verknüpfungen, z. B. (für x, y aus T): $x \begin{pmatrix} + & \times \\ \times & + \end{pmatrix} y = \delta(\delta x + \delta y) = \sigma(\sigma x \times \sigma y)$. Für sie gelten Formeln, die denen von deMorgan ähnlich sind, z. B. ($\delta \delta$ ist die Identität!) $\delta x + \delta y = \delta \left(x \begin{pmatrix} + & \times \\ \times & + \end{pmatrix} y \right)$. Die Resultate übertragen sich mühelos auf das direkte Produkt von n solchen Verbänden T und lassen sich auch geometrisch am n -dimensionalen Würfel mit der Seitenlänge 3 deuten.

H. Gericke.

Naito, T.: On a problem of Wolk in interval topologies. Proc. Amer. math. Soc. 11, 156—158 (1960).

In Beantwortung einer von E. S. Wolk (dies. Zbl. 89, 19) aufgeworfenen Frage wird bewiesen: Ist jede total ungeordnete Teilmenge einer (teilweise) geordneten Menge X endlich, so existiert genau eine mit der Ordnungsstruktur von X verträgliche Topologie von X . (Definition der Verträglichkeit im Referat der zitierten Arbeit von Wolk.) Ist X ein vollständiger Verband, so gilt auch die Umkehrung dieses Satzes.

G. Bruns.

Kleinfeld, Erwin: Rings of (γ, δ) type. Portugaliae Math. 18, 107—110 (1959).

In Fortsetzung der Untersuchungen von Kokoris [Proc. Amer. math. Soc. 9, 897—904 (1959)] über (nichtassoziative) Ringe R vom (γ, δ) -Typus für $(\gamma, \delta) = (-1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(-1, 1)$ beweist der Verf., daß solch ein Ring dann und nur dann assoziativ ist, wenn für alle $x, y \in R$ aus $(x, y, y)^2 = 0$ folgt $(x, y, x) = 0$. Diejenigen unter diesen Ringen, die keine nilpotenten Elemente besitzen, sind somit sicher assoziativ. Für die Typen $(1, 0)$ und $(-1, 1)$ hatte dies der Verf. schon früher bewiesen (dies. Zbl. 52, 267). Da die Ringe $(1, 0)$ und $(-1, 1)$ zu einander invers isomorph sind, braucht der Beweis nur noch für $(1, 1)$ geführt zu werden.

E. A. Behrens.

Kokoris, Louis A.: On nilstable algebras. Proc. Amer. math. Soc. 9, 697—701 (1958).

Sei A eine einfache, kommutative, potenzassoziative Algebra. Verf. bewies früher (dies. Zbl. 72, 262), daß diese eine Jordan-Algebra ist, falls ihre Charakteristik $p = 0$ ist. Verf. zeigt, daß, falls p zu 6 prim ist, A genau dann eine Jordan-Algebra ist, wenn A nilstable bzgl. zweier geeigneter Idempotenten ist. Hierbei ist die Eigenschaft einer Algebra nilstable bzgl. eines Idempotenten zu sein, eine Abschwächung der von Albert (vgl. dies. Zbl. 39, 265) eingeführten Stabilität.

E. A. Behrens.

Kokoris, Louis A.: Simple nodal noncommutative Jordan algebras. Proc. Amer. math. Soc. 9, 652—654 (1958).

Die potenzassoziative Algebra A über dem Körper F nennt man nodal, wenn A zwar als F -Modul die direkte Summe $F1 + N$ ist, wobei N der von den nilpotenten Elementen aus A aufgespannte F -Modul aber keine Unteralgebra von A ist. A sei eine nichtkommutative Jordan-Algebra, also flexibel, d. h. $(xy)x = x(yx)$, und A^+ eine kommutative Jordan-Algebra. A habe endlichen Rang über F . Alle bekannten nodalen, nichtkommutativen Jordan-Algebren haben assoziative zugehörige Algebren A^+ (Kokoris, dies. Zbl. 83, 257). Verf. zeigt, daß dies für Charakteristik $p \neq 2$ allgemein gilt.

E. A. Behrens.

Papp, Zoltán: On algebraically closed modules. Publ. math., Debrecen 6, 311—327 (1959).

The results of this paper on injective modules supplement recent (independent) work of E. Matlis (this Zbl. 84, 266). Two necessary and sufficient conditions are

obtained for a ring R to be left noetherian: 1. Each direct sum of injective left R -modules is injective. 2. Each injective left R -module is a direct sum of minimal injectives (and the number of minimal injectives in each isomorphism class is independent of the decomposition). The distinct minimal injectives are shown to be precisely the set of injective envelopes of modules of the form R/L , where L runs through the irreducible left ideals of R , modulo an explicit equivalence relation. The final result is a criterion for two left modules over a left noetherian ring to have the same injective envelope.

M. C. R. Butler.

Matlis, Eben: Applications of duality. Proc. Amer. mat. Soc. 10, 659—662 (1959).

The main result is: Theorem. Let R be a left Noetherian ring with identity. Then f.l. inj. dim $R =$ f. r. w. dim R . For any right R -module B and any left R -module A , $\text{Ext}_R(A, B^*) \approx \text{Tor}^R(B, A)^*$, where C^* denotes the R -module of integer homomorphisms of C into the rationals (mod 1). From this it follows that f. r. w. dim $R \leq$ f.l. inj. dim R (for any ring R). Two Lemmas — 1. If A is a left R -module then inj. dim $_R A \leq n$ if, and only if, $\text{Ext}_R^{n+1}(R/I, A) = 0$ for every left ideal I of R ; 2. If B is a right R -module then w. dim $_R B \leq n$ if, and only if, $\text{Tor}_{n+1}^R(B, R/I) = 0$ for every left ideal I of R — combined with the fact that $\text{Ext}_R(R/I, A)^* \approx \text{Tor}^R(A^*, R/I)$ if R is left Noetherian, yield the other inequality. The paper ends by reproving the following theorem of Kaplansky [J. Indian math. Soc., to appear]. An integral domain[†] R is a Prüfer ring if, and only if, the torsion submodule of every finitely generated R -module is a direct summand. *G. F. Leger.*

Beaumont, R. A. and R. S. Pierce: Partly transitive modules and modules with proper isomorphic submodules. Trans. Amer. math. Soc. 91, 209—219 (1959).

A unitary module over a principal ideal domain R is called an I -module if it is isomorphic to one of its proper submodules. The following results are proved. 1. A divisible module is an I -module if it has an infinite p -rank, or infinite torsionfree rank. 2. A reduced, torsionfree, module is an I -module. 3. A module of finite rank is an I -module if and only if its torsionfree factor is reduced and non-trivial. 4. A primary, reduced, module is an I -module if its smallest set of generators is of cardinality greater than $(\text{card } R)^{\aleph_0}$, or if it is countably generated. Reviewer's note: A reduced, countably generated, p -primary, module of unbounded order contains, as a direct summand, a direct sum of p -cycles of unbounded orders, and is therefore an I -module. This provides a short proof of Theorem 8.

M. C. R. Butler.

Beaumont, R. A. and R. S. Pierce: Partly invariant submodules of a torsion module. Trans. Amer. math. Soc. 91, 220—230 (1959).

Let R be a principal ideal domain, p be a prime in R , and M be a p -primary R -module. If $R/(p)$ has more than two elements and M satisfies a condition of "transitivity", I. Kaplansky (Infinite Abelian Groups, this Zbl. 57, 19) (i) showed that each characteristic submodule of M is fully invariant, (ii) determined all fully invariant submodules of M , and (iii) showed that (i) is not true for all M if $R/(p)$ has only two elements. To study (iii) further, the authors define "partly invariant submodules of M " to be submodules mapped into themselves by all isomorphisms of M into itself. Without restriction on $R/(p)$, they determine all partly invariant submodules of M , provided M satisfies a condition of "partial transitivity" which is somewhat stronger than "transitivity", but is still satisfied by countably generated M (for proof, see the preceding review). Examples show that characteristic (partly invariant) submodules are not always partly invariant (fully invariant) if $R/(p)$ has only two elements.

M. C. R. Butler.

Nagahara, Takasi and Hisao Tominaga: Some remarks on Galois extensions of division rings. Math. J. Okayama Univ. 9, 5—8 (1959).

The main result is as follows: If K/L is a Galois division ring extension, and L' an intermediate division ring extension with finite (left) dimension over L , then K/L' is Galois. Nobusawa (this Zbl. 80, 27) earlier obtained the same conclusion under the hypothesis that K/L is (left) locally finite. The present proof makes essential use of Nobusawa's work. The authors also state some results on the equality of the left and right dimensions of L' over L . C. Faith.

Amitsur, S. A.: Finite dimensional central division algebras. Proc. Amer. math. Soc. 11, 28—31 (1960).

A division algebra D which is finite dimensional over its center C is given the following characterization in terms of the ring $D[x]$ of polynomials over D in the (commuting) indeterminant x : Theorem 1. $[D : C] \leq n^2 < \infty$ if and only if (1) every primitive homomorph of $D[x]$ is a complete matrix ring A_n , $h \leq n$, over a division ring A . This is proved after the primitive homomorphs of $D[x]$ are classified as (possibly) $D[x]$ and the tensor products $D \otimes_C C(\xi)$, where $C(\xi)$ is an algebraic field extension of C . {When $[D : C] < \infty$, $D[x]$ is known to be not primitive. Whether $D[x]$ is not primitive when D/C is an algebraic algebra of infinite dimensions is an open question. Cf. N. Jacobson, Structure of Rings (this Zbl. 73, 20), p. 241}. With the aid of one of his recent results on pivotal monomials, the author derives a second characterization: Theorem 2. $[D : C] \leq n^2 < \infty$ if and only if (2) for any two polynomials $f, g \in D[x]$ the polynomials $1 - gf^n$ and f are left prime. Equivalence of (1) and (2) follows, and by a slight extension of his method the author obtains: Theorem 3. Every primitive (insert primitive in the author's statement) homomorph H of a principal ideal domain R is isomorphic to a complete matrix ring A_n over a division ring A (A, n depending on H) if and only if for each $a, b \in R$, $1 - ba^n$ and b are left prime. C. Faith.

Martindale III, Wallace S.: The commutativity of a special class of rings. Canadian J. Math. 12, 263—268 (1960).

Dans la discussion de la condition d'Herstein pour la commutativité d'un anneau (pour tout commutateur x on a $x^n = x$ pour un n avec $n \geq 2$) on introduit les γ -anneaux, ou anneaux R pour lesquels on a $u^n - u$ central pour tout commutateur u ($n(u) \geq 2$). On établit alors la validité d'une conjecture d'Herstein: tout commutateur d'un γ -anneau est central. Pour cela on établit que tout γ -anneau de division ou tout γ -anneau primitif est un corps puis, dans le cas général, que tout commutateur de R est nilpotent. Enfin on donne l'exemple d'un γ -anneau non-commutatif B , constitué par les matrices carrées d'ordre trois, proprement triangulaires, à coefficients dans un corps. J. Guérindon.

Smiley, M. F.: Remarks on the commutativity of rings. Proc. Amer. math. Soc. 10, 466—470 (1959).

Si R désigne un anneau et $[x, y]$ le commutateur $xy - yx$ de deux éléments x et y de R , on définit, pour entier $k \geq 0$, $L_k(R)$ au moyen des conditions: $L_0(R) = R$, L_{k+1} est l'ensemble des $[x, y]$, x parcourant R et y parcourant $L_k(R)$. On a alors le théorème suivant: si $k \geq 1$ et si pour tout $x \in L_k(R)$ il existe un entier $n(x)$ avec $n(x) \geq 2$ et $x^n = x$, alors $L_k(R) = 0$. De plus R est commutatif dès que l'on se trouve dans l'un des deux cas suivants: $k = 1$ ou R n'a pas d'idéal nilpotent. Cela renforce le résultat classique de Jacobson suivant lequel $x^n = x$ pour tout x (pour un $n \geq 2$ convenable) entraîne que l'anneau R est commutatif.

J. Guérindon.

Sakuma, Motoyoshi: On the theory of multiplicities in finite modules over semi-local rings. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 23, 1—17 (1959).

Les démonstrations classiques relatives aux fonctions caractéristiques de Hilbert et aux multiplicités des anneaux semi-locaux sont données de manière simplifiée, indépendamment des théorèmes de structure et sont étendues aux modules de type fini. On rappelle divers résultats auxiliaires dont les suivants: si A est semilocal,

d'idéal de définition q et si la suite de A -modules $0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_n \rightarrow 0$ est exacte, on a la relation $\sum_i (-1)^i e_{E_i}(q) = 0$. Si on suppose pour l'anneau semi-local A que l'idéal nul est P -primaire et si E est de type fini sur A , on a, partout idéal de définition q , la formule: $e_E(q) = e_{A/P}(q) l(E \otimes_A A_p)$, la longueur de $E \otimes_A A_p$ étant l . Alors les théorèmes d'additivité, de transition et la formule d'associativité sont établis pour les modules de type fini généraux. J. Guérindon.

Sakuma, Motoyoshi: On the complete tensor product of modules. *J. Gakugei Tokushima Univ., natur. Sci. Math.* **10**, 3—9 (1959).

L'A. reprend la notion de produit tensoriel complété de modules, qu'il avait précédemment étudiée (v. le rapport précédent). Soit E et E' deux modules de type fini sur les anneaux de Zariski A (M -adique) et A' (M' -adique). Si on suppose que A et A' contiennent un même corps K , on note $\Gamma = E \hat{\otimes}_K E'$ la limite projective des $G_n = (E/M^n E) \otimes_K (E'/M'^n E')$, l'homomorphisme considéré de G_n en G_{n-1} étant canonique pour tout $n \geq 1$ et on étudie les relations entre les multiplicités $e_E(q)$, $e_{E'}(q')$ et $e_\Gamma((q, q')(A \hat{\otimes}_K A'))$, q et q' étant deux idéaux définissant les topologies respectives de A et A' . On établit alors que si A et A' sont locaux, d'idéaux maximaux M et M' , l'anneau $(A/M) \otimes_K (A'/M')$ étant artinien et de longueur L , on a la relation: $e_\Gamma((q, q')(A \otimes_K A')) = L \cdot e_E(q) \cdot e_{E'}(q')$. J. Guérindon.

Krasner, Marc: Prolongement analytique dans les corps valués complets: Préservation de l'analyticité par les opérations rationnelles. *C. r. Acad. Sci., Paris* **244**, 1304—1306 (1957).

Krasner, Marc: Prolongement analytique dans les corps valués complets: Pr serv tion de l'analyticité par les opérations rationnelles; quasiconnexit  et éléments analytiques réguliers. *C. r. Acad. Sci., Paris* **244**, 1599—1602 (1957).

Krasner, Marc: Prolongement analytique dans les corps valués complets: Uniformité des fonctions analytiques; l'analyticité des fonctions méromorphes. *C. r. Acad. Sci., Paris* **244**, 1996—1999 (1957).

Krasner, Marc: Prolongement analytique dans les corps valués complets: Pr serv tion de l'analyticité par la convergence uniforme et par la dérivation; théorème de Mittag-Löffler généralisé pour les éléments analytiques. *C. r. Acad. Sci., Paris* **244**, 2570—2573 (1957).

Krasner, Marc: Prolongement analytique dans les corps valués complets: Démonstration du théorème de Mittag-Löffler; singularités au bord. *C. r. Acad. Sci. (Paris)* **245**, 270—274 (1957).

Continuing earlier notes (this Zbl. **55**, 268; **58**, 306, 307), and using the definitions in the reviews cited, the author defines two analytic elements to be equivalent if they can be connected by a chain of analytic elements in which adjacent elements coincide on a set containing a limit point. He defines an analytic function to be an equivalence class of analytic elements, and proves: Two equivalent analytic elements always take the same value at every point where both are defined (consequence of the ultrametric geometry). Analyticity is preserved by the rational operations. If the residue class field of k is not algebraically closed, analytic functions can be defined on k by embedding it in a K for which this is so, and the result is independent of K . Analytic functions have analytic derivatives, and a theorem on preservation of differential relations holds. The "Mittag-Leffler Theorem" states sufficient conditions (depending on the region of definition D) that an analytic element f be expressible as $f_1 + f_2$, with f_1 defined by the principal parts of the poles of rational approximates to f and f_2 an analytic element with a larger region of definition; under further conditions, f_2 is a constant. G. Whaples (M. R. **19**, 395).

Krasner, Marc: Prolongement analytique dans les corps valu s complets: Démonstration du théorème de Mittag-Löffler; singularités au bord. *C. r. Acad. Sci., Paris* **245**, 1285—1288 (1957).

Remarque de l'A.: Le présente texte remplace celui de C. r. Acad. Sci., Paris 245, 270—274 (1957) (analysé ci-dessus), rendu incompréhensible par une erreur dans l'ordre des pages.

G. Whaples (M. R. 19, 395).

Higman, D. G.: On representations of orders over Dedekind domains. Canadian J. Math. 12, 107—125 (1960).

Let Q be a K -subalgebra of a K -algebra P where K is a commutative ring with identity. Let P and Q have a common identity and let M be a P -module. Put $D_{(P,Q)}(M) = (C_{(P,Q)}(M)) = \{x | x \text{ in } K, x \cdot \text{Ext}^1(M, N) = 0 (x \cdot \text{Ext}^1(N, M) = 0) \text{ for all } P\text{-modules } N\}$. Here $\text{Ext} = \text{Ext}_{(P,Q)}$ is Hochschild's relative functor (this Zbl. 70, 269). It is noted that $D(M) = K (C(M) = K)$ if and only if M is (P, Q) -projective (injective) and then follows a key lemma: $x \in K$ belongs to $D(M)$ if and only if there exists a P -homomorphism $\beta: M \rightarrow M \otimes_Q P$ such that $\beta r = x \cdot I$ where $r: M \otimes_Q P \rightarrow M$ is the natural map and I is the identity map of M . We shall omit amalogous results concerning $C(M)$. Now consider the case where $Q = K$ is an integral domain and P is a Q -order. A P -module M is called a P -representation module if it is Q -finitely generated and Q -torsion free. $M \otimes_Q k$ is called the rational hull of M (k is the quotient field of Q) and a P -representation module M is called principal if $M \otimes_Q k$ is isomorphic to the rational hull of a direct sum of right ideal components of $P \otimes_Q k$. It turns out that M is principal if and only if $D(M) \neq 0$ and, as a consequence of this, $P \otimes_Q k$ is semi-simple if and only if $D(M) \neq 0$ for every P -representation module M . Suppose next that Q is a local ring with prime ideal \mathfrak{p} and, as above, that P is a Q -order. The author defines the depth of a P -module M to be s if $D(M) = \mathfrak{p}^s$, ∞ if $D(M) = 0$; he defines the depth of P itself to be t if $I(P) = \mathfrak{p}^t$ where $I(P)$ is the intersection over M of the annihilator ideals of $H^1(P, M)$ (in Q). Most of the remainder of the paper is devoted to the study of these concepts and space permits us only a sample of the many interesting results: 1. A P -module M of depth s is isomorphic with a P -representation module N if and only if $M/\mathfrak{p}^{s+1}M \approx N/\mathfrak{p}^{s+1}N$. (This generalizes Theorem 2 of Maranda, this Zbl. 65, 261). 2. If k is complete with respect to the \mathfrak{p} -adic valuation then P has depth 0 if and only if $P/\mathfrak{p}P$ is a separable Q/\mathfrak{p} -algebra. 3. Let R denote the intersection with P of the radical of its rational hull. If k is complete and if P/R has depth 0 then two (P, Q) -projective P -representation modules are isomorphic if and only if their rational hulls are isomorphic. (This generalizes Maranda's Theorem 4, loc. cit.) Turning to the case where Q is a Dedekind ring the author defines the depth $d_{\mathfrak{p}}(M)$ of a P -representation module M and shows that $D(M) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{d_{\mathfrak{p}}(M)}$ where \mathfrak{p} runs over the prime ideals of Q . He obtains a similar formula for $I(P)$ and shows that if P has separable rational hull then $P/\mathfrak{p}P$ is a separable Q/\mathfrak{p} -algebra for all but the finitely many primes \mathfrak{p} dividing $I(P)$. The paper ends with a discussion of the class-number and genus of a principal P -module and with an unsolved problem concerning the finiteness of the class-number.

G. F. Leger.

Numakura, Katsumi: A note on Wedderburn decompositions of compact rings. Proc. Japan Acad. 35, 313—315 (1959).

A ring R is said to admit a Wedderburn decomposition if R can be written as the direct sum $S + N$, where N is the Jacobson radical and S is a semisimple subring of R . In finite rings, the chief obstacle to obtain a Wedderburn decomposition is that there may be no element in the identity coset of the semisimple ring R/N having the same additive order as that identity. In such a finite semisimple ring the additive order of any element is the product of distinct primes. In the note under review, the author shows that the analogous situation holds for compact topological rings. Theorem: If R is a compact topological ring with Jacobson radical N , then R admits a Wedderburn decomposition if and only if there exists an element e in the identity coset of R/N with the property that for each neighbor-

hood U of 0 in R there exist distinct primes p_1, \dots, p_r such that $p_1 \cdots p_r e \in U$. This theorem and its immediate corollaries generalize some work of the reviewer (this Zbl. 79, 268) by eliminating the hypothesis that the radical be open.

J. P. Jans.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Pollák, G.: Über die Typen euklidischer Normen. Acta Sci. math. 20, 252—268 (1959) [Russisch].

Für einen Integritätsbereich R versteht Verf. unter einer euklidischen Norm eine Abbildung φ von R in eine geordnete Menge von Zahlen, die mit jeder Zahl auch alle kleineren enthält, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: (1) $\varphi(ab) \geq \varphi(b)$ für $a, b \in R$, $a \neq 0$. (2) Für beliebige $a, b \in R$ mit $a \neq 0$ existiert ein $q \in R$ mit $\varphi(b - aq) < \varphi(a)$. Der Typ der Norm ist der Ordnungstypus der Bildmenge $\varphi(R)$. Alle euklidischen Normen des Ringes der ganzen rationalen Zahlen sind vom Typ $\omega \cdot \lambda$ ($1 \leq \lambda \leq \omega$). Unter den Ringen der ganzen Zahlen imaginär quadratischer Zahlkörper kommen nur die zu den Diskriminanten $d_1 = -3$, $d_2 = -4$, $d_3 = -7$, $d_4 = -8$, $d_5 = -11$ gehörigen in Frage. Die Typen der euklidischen Normen sind in diesen Fällen Limeszahlen $\lambda \leq \omega^{n_i}$ mit $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = n_4 = n_5 = 1$. Für den Ring der Polynome in einer Unbestimmten über dem Körper K der unendlichen Mächtigkeit \aleph sind die möglichen Typen alle mit ω konfinalen Ordnungszahlen, deren Mächtigkeit \aleph nicht übersteigt. Im Falle eines endlichen Körpers K sind alle euklidischen Normen von $K[x]$ vom Typ ω .

R. Kochendörffer.

Popovici (Popović), C. P. (K. P.): Ringe ganzer Dirichletscher Zahlen mit eindeutiger Primzerlegung. Bull. math. Soc. Sci. math. phys. R. P. R., n. Sér. 2 (50), 441—448 (1958) [Russisch].

Es bezeichne $R(i, \sqrt{\delta})$ den Dirichletschen biquadratischen Zahlkörper. Ist δ das Produkt von mehr als zwei Gaußschen Primzahlen, so ist die Primzahlzerlegung in $R(i, \sqrt{\delta})$ nicht eindeutig. Im Falle $(1+i) \nmid \delta$ und $\delta \not\equiv 1, 3 \pmod{4}$ kann die Primzahlzerlegung höchstens dann eindeutig sein, wenn δ eine Gaußsche Primzahl ist.

R. Kochendörffer.

Iwasawa, Kenkichi: Sheaves for algebraic number fields. Ann. of Math., II. Ser. 69, 408—413 (1959).

Sei $K = \cup K_i$ ein (nicht notwendig endlich-) algebraischer Zahlkörper, dargestellt als Vereinigung endlich-algebraischer Zahlkörper K_i , I_i die Idealklassengruppe von K_i . Verf. gibt folgende garbentheoretische Interpretation der Idealklassengruppe von K , die als der direkte Limes $\bar{I} = \text{dir lim } \{I_i\}$ bez. der natürlichen homomorphen Einbettungen $I_i \rightarrow \bar{I}_k$ für $K_i \subset K_k$ definiert wird. Für einen endlich-algebraischen Teilkörper F von K und endlich viele Primdivisoren $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_s$ von F sei $U(F; \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_s)$ diejenige Teilmenge der Menge X aller Primdivisoren \mathfrak{P} von K , deren \mathfrak{P} auf F von den $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_s$ verschiedene Primdivisoren induzieren. Der mit diesen U als Basis offener Mengen topologisierte Raum X ist ein quasi-kompakter T_1 -Raum, der nicht hausdorffsch ist. Sei \mathcal{F} die Garbe über X , deren Halme $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$ jeweils aus der Gruppe aller Einheiten für \mathfrak{P} von K bestehen. Es wird gezeigt: $I \cong H^1(X, \mathcal{F})$, ferner $H^n(X, \mathcal{F}) = 1$ für $n \geq 2$. Die p -Komponente $H^1(X, \mathcal{F})^{(p)}$ (p Primzahl) gestattet eine weitere Charakterisierung, falls K alle p^v -ten Einheitswurzeln ($v = 1, 2, \dots$) enthält: Sei M die Erweiterung von K , die durch Adjunktion aller p^v -ten Wurzeln von Einheiten aus K ($v = 1, 2, \dots$) entsteht, L die maximal-abelsche Erweiterung über K mit der Eigenschaft, daß alle \mathbb{Q} aus X mit $\mathbb{Q} \nmid p$ in L unverzweigt sind, ferner $\mathcal{G}(L|M)$ die Galoisgruppe von $L|M$. Dann ist $H^1(X, \mathcal{F})^{(p)} \cong \text{Charaktergruppe von } \mathcal{G}(L|M)$. Dies hängt zusammen

mit der Klassenzahlformel

$$h_p^{(n)} = p^{\mu p^n + \lambda n + \nu} \quad (n \text{ genügend groß})$$

des Verf. (dies. Zbl. 89, 24) für die p -Klassengruppe des p^{n+1} -ten absoluten Kreiskörpers K_n : Genau dann ist $\mu = 0$, wenn für $K = \cup K_n$ gilt: $H^1(X, \mathcal{F}^{(p)})$ hat endlichen Rang. W. Jehne.

Mori, Mitsuya: Über Kummerse Erweiterungen. Proc. Japan Acad. 33, 372—375 (1957).

Unter Zugrundelegung der Charaktergruppe der Gruppe $k^+ \otimes Q/Z$ (an Stelle von k^+/k^{+n}) wird für einen Grundkörper k , der die n -ten Einheitswurzeln enthält, die multiplikative Kummerse Theorie entwickelt und im p -adischen Fall mit dem Normsymbol-Isomorphismus in Verbindung gebracht. W. Jehne.

Masuda, Katsuhiko: Certain subgroup of the idèle group. Proc. Japan Acad. 33, 70—72 (1957).

Sei D die Zusammenhangskomponente der Idelklassengruppe C eines algebraischen Zahlkörpers k , ferner J die Gruppe aller derjenigen Ideale von k , deren Komponenten für fast alle Primdivisoren \mathfrak{p} (im Sinn der Kronecker-Dichte) gleich 1 sind. Es wird mit Hilfe des Grunwaldschen Existenzsatzes gezeigt, daß die natürliche Einbettung von J in C/D ein Monomorphismus ist. Als Folgerung ergibt sich der Satz von F. K. Schmidt [J. reine angew. Math. 162, 155—168 (1930)], daß die zu einem Primdivisor \mathfrak{p} gehörige maximal-abelsche Erweiterung $A_{\mathfrak{p}}$ der vollständigen Hülle $k_{\mathfrak{p}}$ das Kompositum mit $k_{\mathfrak{p}}$ der maximal-abelschen Erweiterung A von k ist, sowie eine Aussage über lokalabelsche, A enthaltende galoissche Erweiterungen von k . W. Jehne.

Zahlentheorie:

• **Marčevskij, M. N.:** Zahlentheorie. [Teorija čisel.] Kurzer Lehrgang. Char'kov: Verlag der Universität Char'kov 1958. 144 S. [Russisch].

This is an introductory textbook intended for the higher classes of secondary schools. The exposition is very detailed with a wealth of numerical examples. There do not seem to be any features of interest to the expert. J. W. S. Cassels.

Gloden, A.: Table de factorisation des nombres $N^4 + 1$ pour l'intervalle 6001—7000. Chiffres, Revue Assoc. franç. Calcul 2, 209—218 (1960).

Cassels, J. W. S.: Arithmetic on curves of genus 1. I: On a conjecture of Selmer. J. reine angew. Math. 202, 52—99 (1959).

Une courbe algébrique de genre un étant donnée sur un corps de base R (de caractéristique différente de 3 et contenant une racine cubique ϱ de l'unité, différente de l'unité), on étudie ici un cas dans lequel une construction, effective en calcul automatique, du classique groupe de Mordell-Weil est possible. Pour cela on étudie la courbe d'équation $x^3 + y^3 + d z^3 = 0$ et les points entiers de la courbe $m^{-1} X^3 + m Y^3 + d Z^3 = 0$, m étant un élément non nul du corps R . Par analogie avec les méthodes de Selmer (ce Zbl. 55, 271) on discute les relations entre le problème étudié et l'existence, pour la courbe d'équation $x^3 + y^3 + d z^3 = 0$, de formes symétriques gauches définies en détail aux § 8, 9 et 10. Un exemple est traité en appendice ($d = 5610$) avec les tables numériques données par Mr. Swinnerton-Dyer. Cet article est le premier d'une série qui compare en outre les méthodes de Selmer et de l'auteur avec les méthodes classiques de „descente infinie“. J. Guérindon.

Grosswald, Emil: Correction and addition to some theorems concerning partitions. Trans. Amer. math. Soc. 95, 190 (1960).

This note is a correction to the paper reviewed in this Zbl. 83, 40. The author (and with him the reviewer) did not see a difficulty which arises in the case that the set S consists of one element q . With a simple modification theorem 2 is valid in this case, too. F. van der Blij.

Gutnik, L. A.: Einige Fragen der Arithmetik der Matrizen. Moskovsk. gosudarst. ped. Inst. V. I. Lenin, učenyje Zapiski 138, fiz.-mat. Fak. Nr. 3, 47—77 (1958) [Russisch].

Gutnik, L. A.: Über einige zahlentheoretische Funktionen von Matrizen. Moskovsk. gosudarst. ped. Inst. V. I. Lenin, učenyje Zapiski 138, fiz.-mat. Fak. Nr. 3, 79—106 (1958) [Russisch].

Verf. hat in einem Ergebnisbericht (dies. Zbl. 86, 37) bereits die Resultate seiner Untersuchungen zur Arithmetik der Matrizen mit ganzen rationalen Elementen mitgeteilt. Die beiden vorliegenden Arbeiten enthalten die ausführliche Darstellung der Beweise der dort angekündigten Sätze. *K.-B. Gundlach.*

● Watson, G. L.: Integral quadratic forms. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. No. 51.) Cambridge: At the University Press 1960. VIII, 143 p. 30 s. net.

Es wird eine Einführung in die Theorie der quadratischen Formen im rationalen Zahlkörper gegeben, welche außer den Anfängen der elementaren Zahlentheorie kaum Voraussetzungen macht. Für den Anfänger bietet sich so eine ausgezeichnete Gelegenheit, unter kunstvoller Führung Begriffsbildungen und Schlußweisen auf diesem Sondergebiet verstehen zu lernen. Der Kenner weiß, daß man ohne Hilfe eines genügend entwickelten Begriffsapparates, d.h. also im Bereich der elementaren Mathematik, Mühe und Scharfsinn aufwenden muß. Es wäre erwünscht, die gesunde sportliche Betätigung mit dem Erwerb einer mathematischen Allgemeinbildung zu verbinden. Nach Meinung des Ref. hat der Verf. diesen Gesichtspunkt zu wenig gesehen. Die Reduktion der quadratischen Formen, p -adische Äquivalenz, die Automorphismen, die Anzahl der Darstellungen von Zahlen durch eine definite Form u. a. m. hätten Gelegenheit geboten, den Leser auf größere Zusammenhänge hinzuweisen. Für den Kenner interessant sind einige neue Aussagen über die Zerlegung eines Automorphismus in Spiegelungen, deren Koeffiziententeiler zu einer gegebenen Zahl teilerfremd sind. Auch die Einführung der Spinorgeschlechter ist neu. Man bezeichne als das Gewicht $w(R)$ einer Matrix R die kleinste natürliche Zahl w derart, daß stets $w R_1$ ganz ist, wo R_1 irgendeine quadratische Teilmatrix von R ist. Die kleinste natürliche Zahl $n(R)$ derart, daß $n(R) w(R)$ eine Quadratzahl ergibt, heiße die Norm von R . Diese hat eine gewisse Produkteigenschaft auf Grund des Satzes: Es seien R_1, R_2 n -reihige Matrizen der Determinanten ± 1 , deren Gewichte zu einer Zahl d teilerfremd sind. Es gebe ferner eine quadratische Form $f(x)$ in n Variablen derart, daß $f(x), f(R_1 x), f(R_1 R_2 x)$ ganzzahlig sind. Dann ist $w(R_1) w(R_2) w(R_1 R_2)$ eine Quadratzahl. Im Falle eines Automorphismus R von f ist die Quadratklasse von $n(R)$, eventuell vom Vorzeichen abgesehen, mit der Spinornorm identisch. Infolgedessen kann definiert werden: Zwei Formen sind spinorverwandt, wenn sie durch eine Substitution ineinander übergeführt werden können, deren Matrix ein zur Determinante teilerfremdes Gewicht und die Norm 1 hat. Ob zwei Formen spinorverwandt sind oder nicht, läßt sich also sehr leicht feststellen. Überhaupt nur ein Spinorgeschlecht tritt auf, wenn die Determinante nicht durch die $\frac{1}{n}(n-1)$ -te Potenz einer natürlichen Zahl > 2 teilbar ist. Der Beweis des Satzes, daß zwei spinorverwandte indefinite Formen in $n > 2$ Variablen äquivalent sind, stützt sich im wesentlichen auf die Spiegelungen, abgesehen vom Fall $n = 3$, wo die Hermitesche Formel für die Automorphismen benutzt wird, welche bekanntlich in der Algebra der Quaternionen ihre Wurzel hat. Der Beweis nimmt noch (!) rund 15 Seiten in Anspruch. Ein wenig bekanntes auf A. Meyer (1890) zurückgehendes Problem wird kurz behandelt, nämlich die Untersuchung der Zahlen, welche nicht durch alle Klassen eines indefiniten Geschlechts eigentlich dargestellt werden. Es steht in Beziehung zur Theorie der Spinorgeschlechter. — Kurze Inhaltsübersicht: 1. Einführung. 2. Reduktion. 3. Hasses Invarianten, Hilberts Normenrestsymbol, quadra-

tisches Reziprozitätsgesetz (mit Beweis). 4. p -adische Äquivalenz, ohne Benutzung der p -adischen Zahlen durch Kongruenzen erklärt. 5. Geschlechter und rationale Äquivalenz, im wesentlichen der Dissertation Hasses folgend. 6. Vorbereitung und Durchführung des Beweises der Äquivalenz spinorverwandter Formen. 7. Ausgestaltung dieses Äquivalenzsatzes, sowie Darstellung von Zahlen durch Formen. 8. Etwas über die rationalen Automorphismen, z. B. Spiegelungen und die Cayleysche Parameterdarstellung.

M. Eichler.

Melzak, Z. A.: Power series representing certain rational functions. Canadian J. Math. **12**, 20—26 (1960).

Let $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ converge near $z = 0$. Put

$$\varphi_f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sgn} |f_n| z^n, \quad \chi_f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sgn} f_n z^n, \quad I_f = \{n \mid f_n = 0\},$$

and say that a pole α of $f(z)$ is pseudo-rational if $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ is a root of unity. A theorem by Lech and Mahler (Lech, this Zbl. **51**, 278; Mahler, this Zbl. **70**, 40); states that if $f(z)$ is a rational function then all sufficiently large n in I_f consist exactly of all solutions of

$n \equiv L_\sigma \pmod{L}$, $n \geq n_0$, where $\sigma = 1, 2, \dots, s$ and $0 \leq L_1 < L_2 < \dots < L_s < L$.

The author proves that this is equivalent to: (I) If $f(z)$ is rational, then so is $\varphi_f(z)$. He further studies in detail those rational function that have real coefficients f_n and only pseudo-rational poles. For these he proves in particular: (II) $\chi_f(z)$ is a rational function.

K. Mahler.

• **Perron, Oskar:** Irrationalzahlen. (Göschens Lehrbücheri. 1. Gruppe, Band 1.) 4. durchges. und ergänzte Aufl. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1960. VIII, 202 S. DM 28,—.

This excellent book on irrational numbers first appeared in 1920, the second edition in 1939, and the third in 1947. The present one is the fourth. Each edition has contained some improvements; in particular, the fourth has a number of changes and supplements. This book has been designed as a textbook for students as well as a handbook of interest to those who are familiar with the subject. The contents are as follows: (1) foundations based on the Dedekind cut; (2) limits; (3) powers and logarithms; (4) various representations of irrational numbers; (5) approximation of irrational numbers by rational numbers, diophantine approximations, and the theorem of Kronecker; (6) properties of algebraic and transcendental numbers. The important literature on the subject is listed in a bibliography of 94 titles, somewhat enlarged over the preceding editions. The text is based only on simple concepts with elementary proofs. The explanations are, as always in Professor Perron's texts, exceptionally clear and understandable.

E. Frank.

Connell, Ian G.: Some properties of Beatty sequences. II. Canadian math. Bull. **3**, 17—22 (1960).

Teil I ibid. **2**, 190—197 (1959). — Im zweiten Teil der Arbeit zeigt Verf. 1. den Satz: Ist $\alpha > 1$ irrational, $u_n = \left[n \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \right]$, $v_n = [n \cdot (1 + \alpha)]$, $n = 1, 2, \dots$, und ist p_n/q_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, der n -te Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von α , so gilt $u_{p_{2n}} = p_{2n} + q_{2n} - 1$, $u_{p_{2n+1}} = p_{2n+1} + q_{2n+1}$, $v_{q_{2n}} = p_{2n} + q_{2n}$, $v_{q_{2n+1}} = p_{2n+1} + q_{2n+1} - 1$; 2. den Satz: Jede der beiden Folgen u_n und v_n enthält arithmetische Reihen beliebiger Länge, aber keine unendlich lange; 3. Einen Algorithmus zur leichteren Berechnung der Teilnenner des Kettenbruchs für α .

R. Sprague.

Analysis.

● Duschek, Adalbert: Vorlesungen über höhere Mathematik. 1. Band: Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Unendliche Reihen. 3., verb. Aufl. Wien: Springer-Verlag 1960. X, 440 S. mit 169 Textabb. Ganzleinen. DM 48,—.

Vgl. die Besprechung der 2. Aufl. in diesem Zbl. 70, 277.

● Duschek, Adalbert: Vorlesungen über höhere Mathematik. 3. Band: Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Variationsrechnung. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. 2., mit Berichtigungen versehene Aufl. Wien: Springer-Verlag 1960. XII, 512 S. Ganzleinen DM 48,—.

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. in diesem Zbl. 52, 282.

Kober, H.: On the arithmetic and geometric means and on Hölder's inequality. Proc. Amer. math. Soc. 9, 452—459 (1958).

Der Unterschied des arithmetischen und geometrischen Mittels $\sum_{i=1}^n q_i x_i - \prod_{i=1}^n x_i^{q_i}$ wird verglichen mit $\sum_{i < k} (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_k})^2$; für ihren Quotienten ergibt sich $\min q_i / (n-1)$ bzw. $\max q_i$ als eine untere bzw. obere Schranke. Hinsichtlich der Hölderschen Ungleichung wird für den Quotienten $\sum_i \prod_k a_{ik}^{q_k} \left| \prod_k \left(\sum_i a_{ik} \right)^{q_k} \right|$ eine untere und obere Schranke gefunden, welche von der Größe $\sum_{i=1}^n \sum_{j < k} \left\{ \left(\frac{a_{ij}}{\sum_v a_{vj}} \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\frac{a_{jk}}{\sum_v a_{v k}} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}^2$ abhängt. Das letzte Ergebnis findet Anwendung auf die Minkowskische Ungleichung.

G. Aumann.

Mengenlehre:

Tarkowski, S.: On the comparability of dendrites. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 8, 39—41 (1960).

Seien $\langle X, \leq_1 \rangle$ und $\langle Y, \leq_2 \rangle$ zwei (teilweise) geordnete Mengen. Eine Abbildung F von X in die Potenzmenge von Y heißt ein mehrdeutiger Isomorphismus von X in Y , wenn (1) bei beliebigem $x \in X$ die Menge $F(x)$ totalgeordnet bez. \leq_2 ist, (2) die Menge $F(X) = \bigcup_{x \in X} F(x)$ konvex in Y ist (d. h. wenn $y_1, y_2 \in F(X)$ und $y_1 \leq y \leq y_2$, so $y \in F(X)$), (3) jede Auswahlfunktion f von F ein Ordnungsisomorphismus von X in Y ist. Sei $\langle R, < \rangle$ eine feste geordnete Menge. Ein Quadrupel $\langle X, \leq, <, \varphi \rangle$ heißt ein R -Baum, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: (1) $\langle X, \leq \rangle$ ist ein endlicher Baum, (2) $<$ ist eine Ordnungsrelation von X mit der Eigenschaft, daß zwei Elemente von X bez. \leq genau dann vergleichbar sind, wenn sie bez. $<$ unvergleichbar sind, (3) φ ist eine Abbildung von X in R . In der Klasse $T(R)$ aller R -Bäume wird nun eine binäre Relation $<_R$ wie folgt definiert: Ist $T_1 = \langle X_1, \leq_1, <_1, \varphi_1 \rangle$ und $T_2 = \langle X_2, \leq_2, <_2, \varphi_2 \rangle$, so soll $T_1 <_R T_2$ genau dann gelten, wenn ein mehrdeutiger Isomorphismus I von X_1 in X_2 (bzgl. der Relationen \leq_1 und \leq_2) existiert, welcher die Eigenschaften hat: (1) Jede Auswahl i von I ist ein Ordnungsisomorphismus von X_1 in X_2 bzgl. der Relationen $<_1$ und $<_2$, (2) für alle $x \in X_1$ gilt $\varphi_1(x) = \varphi_2(i(x))$. Identifiziert man zwei R -Bäume T_1 und T_2 , wenn sie sowohl in der Relation $T_1 <_R T_2$ als auch in der Relation $T_2 <_R T_1$ stehen, so ist $<_R$ eine Ordnung in der Klasse aller R -Bäume. Verf. behauptet nun folgenden Satz und kündigt seinen Beweis in den Fundamenta Math. an: Ist jede totalgeordnete Teilmenge von R wohlgeordnet und ist jede total ungeordnete Teilmenge von R endlich, so hat die durch $<_R$ geordnete Klasse $T(R)$ die gleichen Eigenschaften.

G. Bruns.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

● Ostrowski, A.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 1. Band: Funktionen einer Variablen. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der

exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe. Bd. 4.) 2. neubearb. Aufl. Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1960. 330 S. DM 35,—.

An Änderungen im 1. Band gegenüber der 1. Auflage (dies. Zbl. 44, 275) seien unter anderem folgende hervorgehoben: In der Theorie der reellen Zahlen wird an Stelle des Dedekindschen (Schnitt-) Axioms ein bequemer zu handhabendes „Trennungsaxiom“ verwendet (S. 19). Ferner ist ein wertvoller Abschnitt über allgemeine Ungleichungen aufgenommen (S. 30—40). Einige heutzutage wichtige Begriffe wie der des distributiven Operators und der Lipschitzbedingung werden jetzt auch in 1. Band benutzt. Schließlich sind die Elemente der Reihenlehre sowie einige Grundtatsachen der Differentialgeometrie der Kurven aus dem 2. Band in den 1. herübergenommen. Auf zahlreiche Vereinfachungen in Einzelheiten kann nur hingewiesen werden. Die Aufgaben sollen aus räumlichen Gründen zusammen mit den Lösungen in einer gesonderten Veröffentlichung erscheinen. Dem ausgezeichneten Buch, das weiterer Empfehlung nicht bedarf, ist auch in dieser Neuauflage weite Verbreitung, insbesondere bei den Studierenden, zu wünschen. *Otto Haupt.*

Ridder, J.: Das abstrakte Integral I—III. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 62, 211—220, 221—228, 361—375 (1959).

A. C. Zaanen hat in seinem Buch „An introduction to the theory of integration“ (dies. Zbl. 81, 277) die Lebesguesche Integrationstheorie durch Verknüpfung von Methoden der klassischen Maßtheorie mit Methoden der Theorie linearer Funktionale entwickelt. Verf. zeigt in diesen drei Noten, daß sich das Zaanensche Verfahren zur Konstruktion sowohl Riemann-Stieltjescher als auch Lebesgue-Stieltjescher Integrale verwenden läßt, wobei von den Elementarmaßen bzw. -funktionalen auch die Forderung der Positivität fallen gelassen werden kann. Allerdings wird als Ersatz für die fehlende Positivität die relative Beschränktheit der Maße bzw. Funktionale, also ihre Darstellbarkeit als Differenz positiver Maße bzw. Funktionale gefordert. Der Gewinn an Allgemeinheit ist daher nur unwesentlich. Der Aufbau der Theorie erfolgt ähnlich wie bei Zaanen (loc. cit.) und B. C. Strydom, Abstract Riemann integration (dies. Zbl. 84, 50). Insbesondere überschneidet sich die Arbeit mathematisch und inhaltlich stark mit den wohl gleichzeitig entstandenen Untersuchungen von Strydom, auf deren Existenz nur eine Fußnote in einem Nachtrag zum dritten Teil hinweist. *H. Bauer.*

Green, John W.: On the determination of a function in the plane by its integrals over straight lines. Proc. Amer. math. Soc. 9, 758—762 (1958).

A. Rényi (ce Zbl. 48, 108), D. J. Newman [Amer. math. Monthly 64, 750 (1957)] et A. S. Besicovitch (ce Zbl. 82, 49) ont établi, indépendamment, le théorème suivant: Si $f(x, y)$ est continue et sommable dans le plan tout entier et si l'intégrale linéaire de f est nulle sur chaque droite (infinie) située dans le plan, alors $f(x, y) \equiv 0$. En utilisant le potentiel newtonien, l'A. donne une nouvelle démonstration de ce théorème. Puis, à l'aide de la même méthode, l'A. donne une réponse négative au problème suivant posé par A. Rényi (op. cit.): Existe-t-il une courbe convexe C , autre que le cercle, et une fonction f , définie, intégrable et non identiquement nulle à l'intérieur de C , telle que l'intégrale linéaire de f soit constante sur toutes les cordes de C ? *S. Marcus.*

Chiffi, Antonio: Sulla continuità degli integrali curvilinei. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 29, 411—430 (1959).

Se F, G sono continue in un insieme chiuso e limitato A del piano (x, y) , l'integrale curvilineo $(1) I = \int_C (F dx + G dy)$ è continuo nella classe K di curve C continue di lunghezze uniformemente limitate. L'A. dimostra che se F e G sono continue solo se si prescinde da un insieme aperto su A , con proiezioni sugli assi di misura esterna

arbitrariamente piccola, il predetto teorema sussiste nella classe $K^* \subset K$ delle curve $x = f(u)$, $y = g(u)$, $a \leq u \leq b$, per le quali gli integrali indefiniti di Banach: $\int N(t, f) dt$, $\int N(t, g) dt$ sono equi-assolutamente continui. Se ne deduce che se $\{C_n\}$ è una successione di curve convergente in lunghezza ad una data curva anche l'integrale (1) converge. E. Baiada.

Cohen, Paul J.: On Green's theorem. Proc. Amer. math. Soc. **10**, 109—112 (1959).

If C is a simple closed curve bounding the region Q , and $A(x, y)$, $B(x, y)$ continuous functions, the question of the minimal conditions under which the line integral $I = \int_C (A dx + B dy)$ can be expressed as a double integral $D = \iint_Q (B_x - A_y) dx dy$ has been considered by S. Bochner (this Zbl. **65**, 41) and V. L. Shapiro (this Zbl. **79**, 279.) The author supposes here that Q is a rectangle, and proves that $I = D$ provided (1) the partial derivatives A_x , A_y , B_x , B_y exist everywhere in the interior of Q except at most at countably many points; (2) $B_x - A_y$ is L -integrable in Q . L. Cesari.

Shapiro, Victor L.: Intrinsic operators in three space. Pacific J. Math. **9**, 1257—1267 (1959).

Let $v(x) = (v_1, v_2, v_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in D$, denote a vector field in a domain $D \subset E_3$, and $u(x)$ a scalar function in D . If $v \in C^1$, $u \in C^2$ then curl of v , divergence of v , Laplacian of u are defined by means of the usual partial derivatives. Otherwise, intrinsic (or generalized) definitions of curl v , $\text{div } v$, $\text{Lap } u$ have been studied under more general conditions. For instance, for $v \in C$, $x_0 \in D$, $S(x_0, r)$ the spherical surface of center x_0 and radius $r > 0$, the upper and lower intrinsic divergences $\text{div}^* v(x_0)$, $\text{div}_* v(x_0)$ at x_0 are defined as the \limsup and \liminf as $r \rightarrow 0$ respectively of the expression $3(4\pi r^3)^{-1} \int (v, n) dS$, where \int ranges over $S(x_0, r)$, dS denotes the area element, n the outward normal, and (v, n) the scalar product. If $\text{div}^* v(x_0) = \text{div}_* v(x_0)$, then their common value is said to be the $\text{div } v(x_0)$, or intrinsic divergence of $v(x)$ at x_0 (V. L. Shapiro, this Zbl. **83**, 284). Analogous definitions have the expressions intrinsic curl, intrinsic Lap, $v(x)$ is locally in D the gradient of a potential of a distribution u , intrinsic density of u . With these definitions, the usual identities $\text{curl grad } u = 0$, $\text{div grad } u = \text{Lap } u$, still hold under mild conditions, and E. F. Beckenbach [Bull. Amer. math. Soc., **48**, 937—941 (1942)] has proved a partial converse of these identities. In the present paper the author sharpens these results as follows: A necessary and sufficient condition that $v \in C$ be locally in D the gradient of a potential of a distribution with continuous density is that the intrinsic curl be zero in D and the intrinsic divergence of v be continuous in D . L. Cesari.

Silverman, Edward: The equivalence of two extensions of Lebesgue area. Proc. Amer. math. Soc. **9**, 671—672 (1958).

In 1951 (this Zbl. **43**, 57) the author has introduced an area $L_B(X)$ for any continuous mapping $X: J \rightarrow B$: from a 2-cell J into a Banach space B . If $x: J \rightarrow m$ is any one of the mappings, from J into the space of bounded sequences m , which is isometric to X , and $L_m(x)$ is the area of $x: J \rightarrow m$, then $L_m(x)$ is independent of the particular mapping x . Thus $L(X) = L_m(x)$ can be thought of as another area for $X: J \rightarrow B$. For $B = E$, the n -dimensional Euclidean space, the author has already proved in loc. cit. that $L(X) = L_E(X)$. In the present paper, by using a result the author has proved in 1957 (this Zbl. **79**, 279) it is proved that $L(X) = L_B(X)$ for any Banach space B . L. Cesari.

Turner, L. H.: An invariant property of Cesari's surface integral. Proc. Amer. math. Soc. **9**, 920—925 (1959).

Given a mapping $p = T(w)$, $w = (u, v) \in A \subset E_2$, $p = (x, y, z) \in K \subset E_3$, which is continuous and of bounded variation (i. e., $p = T(w)$ is a continuous surface of

finite area, A is an admissible subset of E_2 , K is any subset of E_3 , and a function $f(p, d)$, $d = (d_1, d_2, d_3)$, defined in $K \times E_3$, $f(p, td) = t f(p, d)$ for all $t \geq 0$, which is bounded and uniformly continuous on $E_3 \times S$, $S = [d; \|d\| = 1]$, then an integral $I(T, A, f)$ was defined by the reviewer (this Zbl. 29, 291; 73, 41) as a limit of the form $\lim \sum f(p_\pi, u_\pi)$. If τ_r denotes the projection of E_3 on its coordinate planes E_{2r} , $r = 1, 2, 3$, then in the last expression \sum ranges over any finite system $[\pi]$ of nonoverlapping simple polygonal regions $\pi \subset A$, p_π is any point of $p(\pi)$, u_π is the vector of the elementary signed areas of the restricted mappings $\tau_r p: \pi \rightarrow E_{2r}$ (defined by means of the topological index on E_{2r}), and limit is taken as $\delta \rightarrow 0$ where δ is an index of fineness of $[\pi]$ (loc. cit.). First, the author proves that $I(T, A, f)$ is given also by the analogous expression $\lim \sum f(p_\pi, \mathfrak{B}_\pi)$, where \mathfrak{B}_π is the vector of the signed total variations of the restricted mapping $\tau_r p: \pi \rightarrow E_{2r}$. Secondly, the author proves that \mathfrak{B} has a remarkable covariant property in E_3 , i. e., if α is any orthogonal transformation of E_3 onto itself, and $T' = \alpha T$, then $\mathfrak{B}(T', A) = \alpha \mathfrak{B}(T, A)$. Finally, by the use of this property, the author proves the invariance of I with respect to change of orthogonal coordinate in E_3 , i. e., if $g(p, d) = f(\alpha^{-1} p, \alpha^{-1} d)$, g being now defined in $(\alpha K) \times E_3$, then $I(T', A, g)$ exists and $I(T', A, g) = I(T, A, f)$. S. Cesari.

Choang Tuj (Hoāng Tuy): On the symmetry of the contingent of a measurable function curve. Doklady Akad. Nauk SSSR 126, 946—947 (1959) [Russisch].

Soit $f(x)$ une fonction réelle mesurable sur $[0, 1]$; λ et θ deux nombres réels ($\theta > 0$). Posons

$$E(\lambda, \theta) = \left\{ x'; 0 \leq x' \leq 1; \left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - \lambda \right| < \theta \right\} \quad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Le nombre λ sera un nombre dérivé α -essentiel à droite (gauche) de la fonction $f(x)$ en x , si la densité supérieure à droite (gauche) de l'ensemble $E(\lambda, \theta)$ en x a pour limite α lorsque θ tend vers zéro. Evidemment $0 \leq \alpha \leq 1$. Théorème: Soit $f(x)$ mesurable et finie sur l'ensemble $A \subset [0, 1]$. Il existe un ensemble $A' \subset A$, $\text{mes } A' = \text{mes } A$, tel que pour chaque point $x \in A'$ et pour des nombres arbitraires λ et α ($0 \leq \alpha \leq 1$), si λ est un nombre dérivé α -essentiel à droite (à gauche) de $f(x)$ en x , alors λ est aussi un nombre dérivé α -essentiel à gauche (à droite) de $f(x)$ en x (avec les mêmes valeurs de α et de x). On donne encore un théorème, concernant les nombres dérivés symétriquement α -essentiels (c'est-à-dire la densité supérieure symétrique de l'ensemble $E(\lambda, \theta)$ en x tend vers α lorsque θ tend vers zéro). S. Marcus.

И'ин, V. P.: Some integral inequalities for differentiable functions of many variables. Doklady Akad. Nauk SSSR 129, 1214—1217 (1959) [Russisch].

On donne trois théorèmes concernant le sujet annoncé dans le titre. Voici le premier théorème 1: Soient $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ des points de l'espace euclidien E_n ou E_m . Posons

$$r_1 = |X - Z| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 \right)^{1/2}, \quad r_2 = |Y - Z| = \left(\sum_{i=1}^m (y_i - z_i)^2 + \sum_{i=m+1}^n z_i^2 \right)^{1/2}$$

$$r = |X - Y| = \left(\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=m+1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Soient: $p \geq 1$; $q \geq 1$; $1/p + 1/q \geq 1$; $1 \leq m \leq n$; $\beta < m/q' (1/q + 1/q' = 1)$; $0 < s \leq 1$; Z : un point fixe de E_n ; $f(X) \in L_p(E_n)$; $g(Y) \in L_q(E_m)$; $h > 0$. Posons

(1) $K = r_1^{-\alpha} r_2^{-\beta} r^{\alpha + \beta - (n/p' + m/q')}$ pour $s r_2 \leq r_1$, $= 0$ pour $s r_2 > r_1$, où $\alpha > -\beta$ pour $p > 1$, $q > 1$, $1/p + 1/q > 1$, $\alpha \geq -\beta$ (pour $p = q = 1$), $\beta \leq 0$, $\alpha \geq -\beta$. (2) $K' = K r^{n/p' + m/q' - \lambda}$, où $\lambda < n/p' + m/q'$, $\alpha \geq \beta$ (pour

$= 1, \beta \leq 0$). Alors

$$\int_{(E_n \times E_m)} \cdots \int_{n+m} K f(X) g(Y) dX dY \leq M \|f\|_{L_p(E_n)} \|g\|_{L_q(E_m)}. \quad S. Marcus.$$

Marcus, S.: Sur un théorème de G. Szekeres, concernant les fonctions monotonnes et convexes. Canadian J. Math. 11, 521—526 (1959).

G. Szekeres (dies. Zbl. 70, 285) teilte den folgenden Satz mit: Ist f eine streng wachsende, zweimal stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall, dann existieren zwei streng wachsende, zweimal stetig differenzierbare Funktionen g und h derart, daß g konvex und h konkav ist und in diesem Intervall $f(x) = h(g(x))$ gilt. Die Funktionen, die eine solche Darstellung zulassen, nennt der Verf. Funktionen vom Typus (K) . Er bemerkt, daß G. Szekeres in seinem Beweis stillschweigend $f'(x) \neq 0$ vorausgesetzt hat, und zeigt am Beispiel der Funktion $f(x) = x^3$, die in keinem den 0-Punkt enthaltenden Intervall vom Typus (K) ist, daß diese Bedingung auch nicht entbehrlich ist. Er spricht ferner zwei Sätze bezüglich einerseits notwendigen, andererseits hinreichenden Bedingungen dafür aus, daß eine Funktion vom Typus (K) ist. Satz 1. Damit eine Funktion auf einem Intervall vom Typus (K) ist, ist notwendig, daß in diesem Intervall ihre rechts- und linksseitigen Ableitungen überall existieren, im Innern des Intervalles positiv und fast überall differenzierbar sind und ihre Ableitung in jedem abgeschlossenen Teilintervall dieses Intervalles integrierbar ist. — Satz 2. Damit eine Funktion auf einem Intervall vom Typus (K) ist, ist hinreichend, daß sie dort eine überall endliche zweite Ableitung besitzt, die in jedem abgeschlossenen Teilintervall integrierbar ist und die erste Ableitung im Innern des Intervalles überall positiv ist. Verf. trägt nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Funktion vom Typus (K) ist. J. Aczél.

Fage, M. K.: Integraldarstellungen operator-analytischer Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen. Trudy Moskovsk. math. Obsč. 8, 3—48 (1959) [Russisch].

Let $L = \sum_{k=0}^n p_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$ be a differential operator with continuous coefficients in an interval $]a, b[$ of the real axis; let $M = \sum_{k=0}^n q_k(w) \frac{d^k}{dw^k}$ be a differential operator with analytic coefficients in a domain G of the complex plane. In a previous paper (this Zbl. 84, 53) the author introduced the notion of L -analytic function. Let A_{L, x_0} be the vector space of all L -analytic functions at the point $x_0 \in]a, b[$ (two functions are identified if they are equal in a neighborhood of x_0); let A_{M, w_0} be the vector space of all M -analytic (= analytic in the usual sense) functions at a point $w_0 \in G$. The author showed that there is a "canonical" isomorphism T of A_{L, x_0} onto A_{M, w_0} such that $T L = M T$ (which expresses the fact that T is a transmutation operator in the sense of Lions). In the present paper among other things an integral representation of T is constructed. J. Peetre.

Allgemeine Reihenlehre:

Sargent, W. L. C.: Some sequence spaces related to the l^p spaces. J. London Math. Soc. 35, 161—171 (1960).

Verf. untersucht Matrixtransformationen zwischen Folgenräumen $l^p (1 \leq p \leq \infty)$ und dazu verwandten Räumen $m(\Phi)$ und $n(\Phi)$ und verallgemeinert Aussagen bezüglich Transformationen von l^p in l^q für gewisse p und q von Hahn [Monatsh. Math. Phys. 32, 3—88 (1922)]; Cohen und Dunford (dies. Zbl. 18, 71) und Peyerimhoff (dies. Zbl. 77, 64). Die in einem gewissen Raum E gegebene Folge $x = \{x_k\}$ wird durch eine Matrix $A = (a_{nk})$ transformiert in die Folge $A(x) = \{A_n(x)\}$ mit $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ in einem Raum E_1 . Bezeichnungen:

$S(x)$ ist die Menge der Folgen, welche aus x durch Umordnung entstehen. \mathcal{Q} ist der Raum, dessen Elemente endliche Mengen voneinander verschiedener positiver ganzer Zahlen sind. Ist $\sigma \in \mathcal{Q}$, dann ist $c(\sigma)$ die Folge $\{c_n(\sigma)\}$ mit $c_n(\sigma) = 1$, wenn $n \in \sigma$, $c_n(\sigma) = 0$ sonst. \mathcal{Q}_s ist der Raum aller Elemente $\sigma \in \mathcal{Q}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\sigma) \leq s$.

Φ ist der Raum der Folgen $\Phi = \{\Phi_n\}$, für die für jede positive ganze Zahl n , $0 < \Phi_1 \leq \Phi_n \leq \Phi_{n+1} < \infty$ und $(n+1)\Phi_n \geq n\Phi_{n+1}$. $m(\Phi)$ ist der Banachraum mit koordinatenweiser Konvergenz (BK-Raum) aller Folgen x , für die $\|x\| =$

$$\sup_{s \geq 1} \sup_{\sigma \in \mathcal{Q}} \left\{ \frac{1}{\Phi_s} \sum_{n \in \sigma} |x_n| \right\} < \infty. \quad n(\Phi) \text{ ist der BK-Raum aller Folgen } x, \text{ für die}$$

$$\|x\| = \sup_{u \in S(x)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \Delta \Phi_n \right\} < \infty \quad (\Delta \Phi_n = \Phi_n - \Phi_{n-1} \text{ mit } \Phi_0 = 0). \quad m(\Phi) \text{ und } n(\Phi) \text{ sind dual und normal im Sinn von Köthe und Toeplitz. } l \subset m(\Phi) \subset l^{\infty} \text{ und } m(\Phi) = l \text{ genau dann, wenn } \lim_{s \rightarrow \infty} \Phi_s < \infty; \quad m(\Phi) = l^{\infty} \text{ genau dann, wenn}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\Phi_s}{s} > 0. \quad \text{Sei } \alpha_s = \sup_{\sigma \in \mathcal{Q}_s} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{n \in \sigma} a_{nk} \right|^{p'} \right\}^{1/p'}, \text{ wo } p' \text{ der zu } p \text{ konjugierte}$$

$$\text{Exponent ist, } u_t = \sup_{\tau \in \mathcal{Q}_t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k \in \tau} a_{nk} \right|^q \right\}^{1/q}. \quad \text{Neben zahlreichen Hilfssätzen wird}$$

u. a. bewiesen: $A(x) \in m(\Phi)$ für jedes $x \in l^p$ ($1 \leq p \leq \infty$) genau dann, wenn $\sup_{s \geq 1} (\alpha_s / \Phi_s) < \infty$. $A(x) \in l^q$, ($1 \leq q \leq \infty$) für jedes $x \in n(\Phi)$ genau dann, wenn $\sup_{s \geq 1} (u_s / \Phi_s) < \infty$.

G. Goes.

Kuttner, B.: On bounded bilinear forms, and the summability of a Cauchy product series. Proc. London math. Soc., III. Ser. 9, 556—574 (1959).

In Part I of the paper, the author considers a bilinear form in an infinity of variables $A = \sum a_{p,q} x_p y_q$, where the a 's, x 's and y 's are complex numbers, and the sum is taken over values of p and q from 0 to ∞ . He denotes by S the set of sequence pairs (x, y) for which $|x_p| \leq 1$, $|y_q| \leq 1$ ($p, q = 0, 1, 2, \dots$), and by S^* the set of sequence pairs (x, y) for which $x_p \rightarrow 0$ as $p \rightarrow \infty$ and $y_q \rightarrow 0$ as $q \rightarrow \infty$. First, some known results are summarized which assert the equivalence of various statements concerning boundedness, Pringsheim sum, sums by rows and by columns, of A , for S or S^* . The author then considers instead the sum by diagonals $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p+q \leq N} a_{p,q} x_p y_q$

(if it exists), i. e., $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$, where $\lambda_n = \lambda_n(x, y) = \sum_{p=0}^n a_{p, n-p} x_p y_{n-p}$, and examines

relationships between the following assertions: (A) $\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} |a_{p,q}| < \infty$, (a) there

is a constant K such that, for every (x, y) of S and all P, Q , $\left| \sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q a_{p,q} x_p y_q \right| \leq K$,

(d) there is a K such that, for every (x, y) of S and all N , $\left| \sum_{p+q \leq N} a_{p,q} x_p y_q \right| =$

$\left| \sum_{n=0}^N \lambda_n \right| \leq K$, (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ converges for every (x, y) of S , (e*) $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ converges for every (x, y) of S^* . Theorem 1. The assertions (d) and (e*) are equivalent. Also

(A) \rightarrow (e) \rightarrow (d) \rightarrow (a), where \rightarrow denotes logical implication. The converse of each one of these implications is false, even when (Theorem 2) $a_{p,q}$ is replaced by a_{p+q} . Theorem 3. If (a) holds, then there is a K such that, for every (x, y) of S and all N ,

$$\left| \sum_{n=0}^N \lambda_n \right| \leq K \log(N+2). \quad \text{In Part II of the paper, an application of Part I is made}$$

to a summability problem, viz., to find necessary and sufficient conditions for the

sequence-to-sequence transformation T given by (1) $v_n = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{n,m} u_m$ to sum every member of \mathfrak{C} to st , where \mathfrak{C} is the class of sequences $\{u_m\}$ formed by taking the partial sums of the Cauchy product series of any two convergent series with sums s, t , say $\sum_{m=0}^{\infty} c_m = s$, $\sum_{m=0}^{\infty} d_m = t$. Now the series in (1) must certainly converge for each n ; in considering this, the problem arises of finding necessary and sufficient conditions which $\{\beta_m\}$ must satisfy in order that (2) $\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m u_m$ should converge whenever $\{u_m\} \in \mathfrak{C}$. Theorem 4. In order that (2) should converge for every $\{u_m\}$ of \mathfrak{C} , it is necessary and sufficient that $\beta_m \rightarrow 0$ as $m \rightarrow \infty$, and that the bilinear form $A = \sum_{p,q} (\beta_{p+q} - \beta_{p+q+1}) x_p y_q$ should be diagonally bounded in S , i. e., satisfies (d) above. If these conditions are satisfied, then, for every $\{u_m\}$ of \mathfrak{C} , the sum (2) is equal to $\sum_{m=0}^{\infty} d_m \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{m+r} s_r$, where $s_r = c_0 + c_1 + \dots + c_r \rightarrow s$. The main result is then as follows. Theorem 5. In order that the transformation T given by (1) should be such that every member of \mathfrak{C} is T -summable to st , the following set of conditions is necessary and sufficient: (i) T is regular; (ii) for every fixed n , the bilinear form $A_n = \sum_{p,q} (\beta_{n,p+q} - \beta_{n,p+q+1}) x_p y_q$ is diagonally bounded in S ; (iii) the forms A_n are bounded in S , uniformly in n . R. G. Cooke.

Ogieveckij (Ogievetsky), I. I.: On the summability of series by Borel's method of fractional order. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR* 1959, 815—817, russ. und engl. Zusammenfassung. 817—818 (1959) [Ukrainisch].

In an interesting paper Sannia introduced a sequence of methods of summability of all integer orders, Borel's integral and exponential methods being particular cases of this sequence. In this paper Sannia's definition is extended to every real index α , $-\infty < \alpha < \infty$, and the properties of this definition (which is denoted as (B, α)) are considered in detail. It is shown that the method of summability (B, α) satisfies the condition of total inclusion, that the advantage of this method increases with α that it is convex and that Schmidt's tauberian theorem for exponential methods of summability (which corresponds to $\alpha = 0$ in the author's designation) holds for method (B, α) with any α . The method is also compared with Abel's general method, and with the methods of Euler, Cesàro and Nörlund. Engl. Zusammenfassung.

Vernotte, Pierre: A propos de la sommation pratique des séries divergentes. *C. r. Acad. Sci., Paris* 250, 1431—1432 (1960).

Verschiedene, zum Teil heuristische Bemerkungen und Beispiele zu einem Summationsverfahren des Verf. (dies. Zbl. 83, 48). D. Gaier.

Robertson, A. P.: On rearrangements of infinite series. *Proc. Glasgow math. Assoc.* 3, 182—193 (1958).

Für lineare Summationsverfahren $A = (a_{ik})$ wird gefragt: 1. Für welche Reihen ist jede Umordnung A -summierbar? Antwort: Für die absolut konvergenten. 2. Wie müssen die Permutation P der Indizes und A zusammenpassen, damit alle konvergenten Reihen bei der Umordnung P in A -summierbare Reihen übergehen? Der Untersuchung werden unter Benutzung schon von Banach angegebener Zusammenhänge der Raum aller konvergenten Folgen und der Raum aller auf dem ersten stetigen linearen Formen als duale Banachräume zugrunde gelegt. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen gefunden, die Ref. aber nicht ohne ungebührlich umfangreiche Formulierungen der Gegebenheiten und Voraussetzungen wiederzugeben vermag. Anwendungsfähige Vereinfachungen in Form topologiefreier Formulierungen werden durch die Forderung $a_{ik} \geq 0$ erreicht. Eine zum gleichen Zweck an die Umordnungen gestellte Forderung (Def. von „rapid“) wird allerdings nur von der identischen Umordnung erfüllt. Th. Kaluza.

Szász, P.: Über die Umordnung bedingt konvergenter Reihen. *Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* 4, 167—169 (1959).

$P = n(k)$ sei eine beliebige Permutation der natürlichen Zahlen k . Verf. konstruiert eine Folge (c_k) mit folgenden Eigenschaften: 1. $0 < c_{k+1} \leq c_k$, 2. $\sum_1^\infty c_k$ divergent, 3. falls $\sum_1^\infty a_k = A$ und $|a_k| \leq c_k$, so auch $\sum_1^\infty a_{n(k)} = A$. Th. Kaluza.

Šalát, Tibor: Absolut konvergente Reihen und dyadische Entwicklungen. Mat.-fyz. Časopis slovensk. Akad. Vied. 9, 3—12, russ. und deutsche Zusammenfassung 12—14 (1959) [Slowakisch].

Es sei $\sum_{n=1}^\infty a_n < \infty$, $a_n > 0$ und $a_n > r_n = \sum_{k=1}^\infty a_{n+k}$, $n = 1, 2, \dots$; man bezeichne ferner mit W die Menge der Zahlen $x = \sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n a_n$, wo $\varepsilon_n = 1$ oder $\varepsilon_n = -1$, und man setze voraus, daß das Lebesguesche Maß der Menge W positiv ist. Für $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n a_n \in W$ sei $f(n, x)$ die Anzahl der Zahlen $+1$ in der Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Verf. untersucht die Verteilung der Faktoren $+1$ in der Reihe $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n a_n$. Zuerst wird bewiesen, daß für fast alle (im Sinne des Lebesgueschen Maßes) $x \in W$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n, x)}{n} = \frac{1}{2}$. Mit Hilfe passend modifizierter Methoden von Hausdorff und Chinićin werden folgende schärferen Resultate bewiesen: a) ist $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, so gilt für fast alle $x \in W$ $f(n, x) = \frac{1}{2}n + o(n^\alpha)$; b) für fast alle $x \in W$ ist $f(n, x) = \frac{1}{2}n + O(\sqrt{n \log \log n})$. L. Kosmák.

Šalát, T.: Über einen Satz von Dini. Acta Fac. Rer. Natur. Univ. Comenian., Mathematica 2, 67—69, russ. und deutsche Zusammenfassung 70 (1957) [Slowakisch].

Es sei $\sum_{n=1}^\infty a_n$ eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern und $r_k = \sum_{n=1}^\infty a_{n+k}$, $k = 0, 1, \dots$. Verf. beweist folgenden Satz: ist $\sum_{n=1}^\infty a_n = 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{r_{n-1}} = 0$, so gilt $\sum_{n=1}^k \frac{a_n}{r_{n-1}} \sim \log \frac{1}{r_k}$. L. Kosmák.

Šalát, T.: Über einige Eigenschaften der Reihen mit positiven Gliedern. Acta Fac. Rer. Natur. Univ. Comenian., Mathematica 2, 71—74, russ. und deutsche Zusammenfassung 75—76 (1957) [Slowakisch].

$\sum_{n=1}^\infty a_n$ sei eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern und $r_k = \sum_{n=1}^\infty a_{n+k}$, $k = 0, 1, \dots$; man bezeichne mit $\mu(W)$ das Maß der Menge W aller Zahlen von der Form $w = \sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n a_n$, wo $\varepsilon_n = 1$ oder $\varepsilon_n = -1$ ist. Verf. beweist: Ist $a_k > r_k$ für $k = 1, 2, \dots$, so gilt $\mu(W) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+1} r_n$; für $a_k \leq r_k$ ($k = 1, 2, \dots$) gilt $\mu(W) = 2 \sum_{n=1}^\infty a_n$. Für divergente Reihen $\sum_{n=1}^\infty a_n = +\infty$ mit $a_n > 0$, $a_n \rightarrow 0$ gibt es eine Menge M der Folgen $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ (wo $\varepsilon_n = \pm 1$), welche die Mächtigkeit des Kontinuums hat und folgende Eigenschaft besitzt: für $\{\varepsilon_n\} \in M$ gilt $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n a_n = +\infty$. Ein ähnlicher Satz gilt auch für $\sum_{n=1}^\infty a_n = -\infty$. L. Kosmák.

Benneton, Gaston: Sur les produits infinis complexes semi-convergentes. Bull. Sci. math., II. Sér. 84, 7—10 (1960).

Wenn die Reihen $\sum_{n=1}^\infty u_n^i$, wo (u_n) eine komplexe Folge und $1 \leq i \leq k-1$ ist, konvergieren und $\sum_{n=1}^\infty u_n^k$ absolut konvergiert, so ist $\prod_1^\infty (1 + u_n)$ konvergent. Das

Resultat wird auf drei Hilfssätze über gleichartiges Konvergenzverhalten gewisser Reihen gegründet, deren Beweise äußerst einfach sind. — Anwendungen auf Produkte mit $u_n = n^{-\alpha} e^{2\pi i n x}$. Th. Kaluza.

Koshti, M. E. and D. G. Kabe: Modification to Euler's constant — Euler limit, a general modification. J. Karnatak Univ. 1, Nr. 1, 176—182 (1957).

Die Existenz von $\gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x)$, $\gamma_n(x) = -\frac{1}{x} \log(1+nx) + \sum_{v=0}^n \frac{1}{1+vx}$, wird für alle $x > 0$ gezeigt. $\gamma(1)$ ist die Eulerkonstante C . Eigenschaften von $\gamma(x)$ werden vom ersten Verf. bewiesen. Nr. 2 lies $\pi \operatorname{cosec}(\pi/x)$. — Alle Formeln mit $\gamma(x)$ der ersten Arbeit werden vom zweiten Verf. aus $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x)$, $\psi_n(x) = \log(n+x) - \sum_{v=0}^n \frac{1}{v+x}$, hergeleitet. Für $x < 0$ existiert bekanntlich $\psi(x)$, nicht jedoch $\gamma(x)$. [Bem. des Ref. Es gilt $\gamma_n(1/x) = x \log x - x \psi_n(x)$, also ohne lim bereits; u. a. lies $-\lim b_n(-x) = \psi(-x) = \dots$ in (4. 1). Verf. schreibt a_n , $-b_n$ statt γ_n, ψ_n .] I. Paasche.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Lebedeva, L. P.: Concerning a method of approximation. Vestnik Leningradsk. Univ. 14, Nr. 1 (Ser. Mat. Mech. Astron. 1) 134—139, engl. Zusammenfassung 139 (1959) [Russisch].

Ist $f(x) \in C_{2\pi}$ und $\{\alpha_n\}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha_n)^n = 0$, so strebt der Ausdruck

$$Q_n(f; x) = \int_0^{2\pi} (1 - \alpha_n \sin^2 \frac{1}{2} t)^n f(t+x) dt \Bigg| \int_0^{2\pi} (1 - \alpha_n \sin^2 \frac{1}{2} t)^n dt,$$

der für $\alpha_n \equiv 1$ in das Integral von De la Vallée-Poussin übergeht, für alle reellen x gleichmäßig gegen $f(x)$. Ohne Beweis werden noch für die Kolmogorov-Nikol'skij-Konstanten

$$\sup_{f \in K W^{(r)} H^{(\alpha)}} |f(x) - Q_n(f; x)|, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Abschätzungen angeben, deren Ordnungen sich nicht mehr verbessern lassen, und teilweise auch genaue asymptotische Darstellungen für $n \rightarrow \infty$, durch die bekannte Ergebnisse von Natanson verallgemeinert werden [vgl. Konstruktive Funktionentheorie (dies. Zbl. 65, 295), insbes. 183—189]. L. Berg.

Berman, D. L.: Über die Unmöglichkeit der Konstruktion eines linearen Polynomoperators bester Annäherung. Uspechi mat. Nauk 14, Nr. 4 (88), 141—142 (1959) [Russisch].

Mit C wird die Klasse der im Intervall $[-1, 1]$ stetigen Funktionen bezeichnet; für $f \in C$ wird $\|f\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$ und $E_n(f) = \inf_{P \in H_n} \|f - P\|$ gesetzt, wo H_n die Klasse der Polynome höchstens n -ten Grades bedeutet. Verf. zeigt, daß lineare Operatoren $V_n(f; x)$ ($n = 0, 1, \dots$) nicht angegeben werden können, für die $V_n(f; x) \in C$, $V_n(f; x) \in H_n$ ($n = 0, 1, \dots$) und $\|f(x) - V_n(f; x)\| = O(E_n(f))$ für alle $f \in C$ erfüllt sind. K. Tandori.

Rivkind, Ja. I.: Über eine Frage der Theorie der Approximation von Funktionen. Uspechi mat. Nauk 14, Nr. 6 (90), 185—190 (1959) [Russisch].

Mit $C[a, b]$ wird die Klasse der im Intervall $[a, b]$ stetigen Funktionen bezeichnet; für $f \in C[a, b]$ wird $\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ gesetzt. Es sei $\{A_n\}$ eine Folge von Operatoren, die $C[a, b]$ in $C[a, b]$ transformieren, vollstetig sind und gemeinsame Eigenfunktionen haben. R'_n bezeichne den zu dem Eigenwert 1 gehörenden Unterraum von A_n ; es seien $R' = \lim R'_n \cdot C[a, b]$ und $R'' = \prod_{n=1}^{\infty} R'_n \cdot C[a, b]$, wo R'_n das

orthogonale Komplement von R'_n in $C[a, b]$ bedeutet. Es wird angenommen, daß A_n in $C[a, b]$, wie in einem Teil von $L^2[a, b]$, selbstadjungiert sind und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n \varphi - \varphi\| = 0$ für jedes $\varphi \in C[a, b]$ besteht. Unter diesen Bedingungen gibt es eine monoton abnehmende Funktion $\delta(n) (> 0)$, so daß $\|A_n \varphi - \varphi\| \geq K_\varphi \delta(n)$ für jedes $\varphi \in R'$, $\varphi \neq 0$ mit einer nur von φ abhängigen Konstante $K_\varphi \neq 0$ besteht; es gilt $\delta(n) = \inf_{\lambda_k^{(n)}} |1 - \lambda_k^{(n)}|$, wo $\lambda_k^{(n)}$ die Eigenwerte von A_n bezeichnen. Es werden Anwendungen auf die Fejérschen, de la Vallée-Poussinschen, Bernstein-Rogosinskischen und Poissonschen Mittel gegeben.

K. Tandori.

Talalan, A. A.: Über die Konvergenz dem Maße nach von Reihen nach den Elementen einer Basis des Raumes L_p . Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk 10, Nr. 1, 31—68 (1957) [Russisch].

Sei $G \subset [0, 1]$ und $\text{mes } G > 0$, sowie $\{e_n(x)\}$ eine normierte Basis in $L_p(G)$ (wo $p > 1$). Dann gibt es zu jeder in G meßbaren Funktion f eine Reihe $\sum a_n e_n(x)$ mit $a_n \rightarrow 0$, die dem Maß nach gegen f konvergiert (Satz 1). Im Falle $f = 0$ kann man dabei erreichen, daß nicht alle a_n verschwinden (Satz 2). Beim Beweis werden zuerst f. ü. endliche Funktionen f behandelt (Satz 3), sodann Funktionen f , die nur die Werte $0, \pm \infty$ annehmen (Satz 4 und 5). Men'sov (dies. Zbl. 39, 70) bewies Satz 1 für das trigonometrische System.

K. Zeller.

Meder, J.: On certain relations between Euler-Knopp's and Cesàro's summability methods with respect to the orthonormal series. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. 7, 589—592 (1959).

Verf. beweist die folgenden Sätze. I. Es gibt eine Orthogonalreihe $\sum a_n \Phi_n(x)$ mit $\sum a_n^2 < \infty$, die im Grundintervall fast überall ($C, r > 0$)-summierbar, aber nirgends mit der $(E, q > 0)$ -Methode von Euler-Knopp summierbar ist. II. Die n -te Partialsumme der Orthogonalreihe $\sum c_n \varphi_n(x)$ mit $\sum c_n^2 < \infty$ wird mit $s_n(x)$ bezeichnet. Existiert der $E^q C^r$ -lim $s_n(x)$ für gewisse $q > 0, r > 0$ fast überall, dann existiert der C^r -lim $s_n(x)$ fast überall, und es besteht $E^q C^r$ -lim $s_n(x) = C^r$ -lim $s_n(x)$. (C^r bzw. H^q bezeichnen die Methoden (C, r) bzw. (E, q) .) Die Behauptung II ist die Verallgemeinerung eines vorherigen Resultates von Verf. (dies. Zbl. 85, 59).

K. Tandori.

Tsuchikura, Tamotsu: Absolute summability of Rademacher series. Tôhoku math. J., II. Ser. 10, 49—59 (1958).

Die Reihe $\sum a_n$ heißt $|A|_k$ -summierbar, wenn $f(x) = \sum a_n x^n$ in $0 < x < 1$ konvergiert und $\int_0^1 (1-x)^{k-1} |f'(x)|^k dx < \infty$ ist, und sie heißt entsprechend $|C, \alpha|_k$ -summierbar, wenn $\sum n^{k-1} |\sigma_n^{(\alpha)} - \sigma_{n-1}^{(\alpha)}|^k < \infty$ ist für die Cesàro-Mittel $\sigma_n^{(\alpha)}$ ($\alpha > -1; k \geq 1$); diese Begriffe sind von Flett [Proc. London math. Soc., II. Ser. 7, 113—141, 142—149 (1957)] eingeführt und untersucht worden. Der Verf. stellt die Frage, ob sich der auf Lückenreihen (1) $\sum a_n$ ($a_n = 0$ für $n \neq n_k, n_{k+1}/n_k \geq q > 1$) beziehende Satz $|A|_1 \rightarrow |C, 0|_1$ von Zygmund (dies. Zbl. 61, 139) für allgemeines α, k erweitern läßt und gibt folgende negative Antwort: Zu jedem $k > 1$ gibt es eine Lückenreihe (1), die $|A|_k$ -summierbar, aber nicht $|C, 1 - k^{-1}|_k$ -summierbar ist. Der Beweis erfolgt über einige Sätze über die absolute Summierbarkeit von Orthogonal- und speziell Rademacher-Reihen.

D. Gaier.

Golinskij, B. L.: Über gewisse lokale Eigenschaften der Funktionen der Klasse L^p . Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat. 3 (10), 43—52 (1959) [Russisch].

Für $f \in L^p(a, b)$ wird $\|f\|_{p, a, b} = \left\{ \int_a^b |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$ und

$$\omega_k^{(p)}(\delta, f; a', b') = \sup_{0 < |h| \leq \delta} \|\Delta_k(f, h; a', b')\|_{p, a', b'} \quad \left(\delta \leq \frac{\delta_0}{k} \right)$$

gesetzt, wo $\delta_0 = \min(a' - a, b - b')$ und $\Delta_k(f, h; a', b') = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih)$ ist. Es sei $E_n^{(p)}(f; a, b) = \inf_{T \in T_n} \|f - T\|_{p, a, b}$, wo T_n die Klasse der trigonometrischen Polynome n -ten Grades bedeutet. $f \in \text{Lip}(\alpha, p, a', b')$ bedeutet, daß $\|f(x + h) - f(x)\|_{p, a', b'} \leq M |h|^\alpha$ mit einer Konstante $M > 0$ besteht. Die folgenden Behauptungen werden u. a. bewiesen. I. Ist $f \in L^p(a, b)$ ($p \geq 1$) und besteht

$$\sum_{p=N_0}^{\infty} p^{-(1/q - 1/p + 1)} \omega_k^{(p)}\left(\frac{1}{p}, f; a', b'\right) < \infty \quad (p \leq q \leq \infty),$$

dann ist f äquivalent mit einer Funktion $f_0 \in L^q(a'', b'')$, für die

$$\omega_k^{(p)}(f_0, \delta; a_1, b_1) = O\left(\delta^k \int_0^{1/\delta} x^{k-1} b_k^{(p)}(x, f) dx\right)$$

mit hinreichend kleinem δ besteht, wo

$$b_k^{(p)}(x, f) = \int_x^{\infty} y^{-(1/q - 1/p + 1)} \omega_k^{(p)}\left(\frac{1}{y}, f; a', b'\right) dy$$

und $(a_1, b_1) \subset (a'', b'') \subset (a', b') \subset (a, b)$ sind. II. Ist $f \in L^p(a, b)$ und $f \in \text{Lip}(\alpha, p; a', b')$ ($p \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$), dann ist im Falle $\alpha p < 1$, $p < q < \frac{p}{1 - \alpha p}$ $f \in \text{Lip}(\alpha + 1/q - 1/p, q; a_1, b_1)$ und im Falle $\alpha p > 1$ ist f äquivalent mit einer stetigen Funktion $f_0 \in \text{Lip}(\alpha - 1/p; a_1, b_1)$ ($(a_1, b_1) \subset (a', b') \subset (a, b)$). III. Ist

$f \in L(0, 2\pi)$ und gelten $f \in L^p(a', b')$ ($1 < p \leq 2$) und $\sum_1^{\infty} \frac{1}{p} [E_v^{(p)}(f; a', b')]^p < \infty$

für beliebiges $(a', b') \subset (a, b) \subset (0, 2\pi)$, dann konvergiert die Fourierreihe von f fast überall. K. Tandori.

Vietoris, L.: Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen. II. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. Anzeiger 1959, 192—193 (1959).

Berichtigung einiger Druckfehler und eines Beweises, sowie Vereinfachung einiger Umformungen und Ersetzung eines Hilfssatzes durch einen einfacheren in der bis auf die römische Ziffer gleichnamigen Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 88, 274).

Th. Kaluza.

Lorch, Lee: On an extremal problem in Fourier series. Canadian math. Bull. 3, 188 (1960).

Betrifft Otto Szász, Amer. J. Math. 61, 165—177 (1939); dies. Zbl. 20, 111.

Kahane, Jean-Pierre et Walter Rudin: Caractérisation des fonctions qui opèrent sur les coefficients de Fourier-Stieltjes. C. r. Acad. Sci., Paris 247, 773—775 (1958).

The author's main result may be stated as follows. Let F be a complex-valued function defined on the real axis. If $\{F(c_n)\}$ is a sequence of Fourier-Stieltjes coefficients whenever $\{c_n\}$ is a sequence of Fourier-Stieltjes coefficients, then the function F is an entire function. M. O. Reade.

Wul, E. B.: Uniqueness theorems for a certain class of functions represented by integrals. Doklady Akad. Nauk SSSR 129, 722—725 (1959) [Russisch].

Let the derivative $h'(x)$ of the function $h(x)$ be a monotonic and increasing function and $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x h'(x)}{h(x)} = \gamma > 1$. If a function $f(x)$ has the representation

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \sqrt{\lambda} x d\sigma(\lambda)$ where σ is a complex-valued function of bounded variation and such that

$$\int_{-\infty}^0 \exp [V \sqrt{|\lambda|} x] \cdot |d\sigma(\lambda)| < C \exp [h(x)], \quad x > 0$$

then the function σ is unique (up to a constant) if the integral $\int_1^{\infty} dt \frac{[h']^{-1}(t)}{t^2}$ is infinite and it is not unique if this integral is finite. This is a generalization of results of B. M. Levitan-N. N. Majman (this Zbl. 45, 339) in which the case $h(x) = c x^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 2$) was considered.

S. Kurepa.

Spezielle Funktionen:

Schoenberg, I. J.: On the maxima of certain Hankel determinants and the zeros of the classical orthogonal polynomials. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 62, 282—290 (1959).

Verf. verallgemeinert einen für $n = 2$ von Nelder vermuteten, von Hammersley (dies. Zbl. 48, 108) und von Ulin (dies. Zbl. 80, 340) bewiesenen Satz: Setzt

man $I_\nu = \int_0^\infty x^\nu e^{-x} dF(x)$ mit einem in $(0, \infty)$ positiven Maße $dF(x)$ vom Gesamtwert 1, dann ist die Hankelsche Determinante dieser Integrale

$$(1) \quad D(F) = \det \|I_{i+j}\|_{0,n} \leq e^{-n(n+1)} (2^2 3^3 \dots n^n)^2 = A_n \quad (A_0 = 1),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $dF(x)$ sich zu $n+1$ Punkten gleicher Masse $1/(n+1)$ an den Stellen $x_0 = 0, x_i$ ($i = 1, \dots, n$) vereinfacht, wo x_i die Nullstellen des Laguerreschen Polynoms $L_n^{(1)}(x)$ sind. — Zum Beweise zeigt Verf. zunächst das Vorhandensein einer Funktion $\mathfrak{F}(x)$, die der Determinante (1) den größten Wert $D(\mathfrak{F})$ erteilt. Er folgt dann Ulin's Gedankengänge, fügt ihm aber zwei bei allgemeinem n nötige Feststellungen an, aus denen hervorgeht, daß $\mathfrak{F}(x)$ genau $n+1$ Wachstumsstellen x_0, x_i ($i = 1, \dots, n$) besitzt, (2) $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n$.

Mit Hilfe der Funktion $f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x)$, die für $F = \mathfrak{F}$ den Wert $\sum_{\nu=0}^n A_\nu e^{-sx_\nu}$ annimmt, findet man

$$D(\mathfrak{F}) = A_0 A_1 \dots A_n \Phi, \quad \Phi = \exp \left(- \sum_{i=1}^n x_i \right) \prod_{i=1}^n x_i^2 \prod_{i>j} (x_i - x_j)^2.$$

Der Schlußstein der Überlegung ist ein mit Hilfsmitteln von Stieltjes beweisbarer Satz: Φ erreicht in (2) seinen Größtwert gerade dann, wenn x_i die Nullstellen des Laguerreschen Polynoms $L_n^{(1)}(x)$ sind. — Ein allgemeinerer Satz des Verf. bezieht sich auf die Polynome $L_n^{(\alpha)}(x)$, und er gibt ferner dessen Seitenstücke in den Gebieten $(-\infty, \infty)$, wobei die Hermiteschen, und in $(-1, 1)$, wobei die Jacobischen Polynome auftreten, mit den Gewichten e^{-x^2} und $(1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1}$ (statt $x^{\alpha+1} e^{-x}$) im Integranden von I_ν .

L. Koschmieder.

Meulenbeld, B.: Quadratic transformations of generalized Legendre's associated functions for special values of the parameters. Arch. rat. Mech. Analysis 3, 460—471 (1959).

Die zugeordneten Legendreschen Funktionen $P_n^m(z)$ und $Q_n^m(z)$ lassen sich bekanntlich durch die Summe von zwei hypergeometrischen Funktionen mit quadratischen Formen von z als Veränderlichen darstellen. Verf. zeigt, daß sich die von ihm zusammen mit L. Kuipers eingeführten verallgemeinerten zugeordneten Legendreschen Funktionen $P_k^{m,n}(z)$ und $Q_k^{m,n}(z)$ (dies. Zbl. 79, 95; 83, 59) für $n-m =$ einer geraden ganzen Zahl oder Null durch eine endliche Summe hypergeometrischer Funktionen mit quadratischen Formen von z als Veränderliche darstellen lassen.

O. Volk.

Kuipers, L. and B. Meulenbeld: Quadratic expansions of generalized Legendre's associated functions. J. London math. Soc. 35, 221—224 (1960).

Für die von den Verff. in früheren Arbeiten (dies. Zbl. 79, 95; 83, 59) untersuchten Lösungen $P_k^{m,n}(z)$ und $Q_k^{m,n}(z)$ der Differentialgleichung

$$(1-z^2)w'' - 2zw' + \left\{k(k+1) - \frac{m^2}{2(1-z)} - \frac{n^2}{2(1+z)}\right\}w = 0$$

werden Entwicklungen nach E -Funktionen mit der Veränderlichen $-z^2$ ($|z| > 1$) abgeleitet (vgl. vorstehendes Referat). O. Volk.

● Knottnerus, U. J.: Approximation formulae for generalized hypergeometric functions for large values of the parameters. With applications to expansion theorems for the function $G_{p,q}^{m,n}(z)$. Groningen: J. B. Wolters 1960. II, 166 p. Dutch Guilders 12,50.

Die vorliegende Arbeit lag als These der mathematisch-physikalischen Fakultät der Rijks-Universität in Groningen vor. Im 1. Kapitel gibt Verf. Definitionen der verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$ (p, q ganz ≥ 0) und der von C. S. Meijer eingeführten Funktion

$${}_p\Phi_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) \Gamma(b_1) \cdots \Gamma(b_q)$$

und $G_{p,q}^{m,n}\left(z \mid \begin{smallmatrix} a_1 \cdots a_p \\ b_1 \cdots b_q \end{smallmatrix}\right)$ und Beziehungen der letzteren zu speziellen hypergeometrischen Funktionen. Im 2. Kapitel werden asymptotische Formeln für

$${}_pF_q(a_1 + r, \dots, a_p + r; b_1 + r, \dots, b_q + r; z) \quad (q > p \geq 0),$$

$${}_pF_p\left(\begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_k, & a_{k+1} - r, & \dots, & a_p - r \\ b_1, \dots, b_{k-l}, & b_{k-l+1} - r, & \dots, & b_p - r \end{smallmatrix}; z\right) \quad (1 \leq l \leq k \leq p),$$

$${}_{p+1}F_p\left(\begin{smallmatrix} a_1 + r, \dots, a_{k-1} + r, & a_k, \dots, & a_{p+1} \\ b_1 + r, \dots, b_k + r, & b_{k+1}, \dots, & b_p \end{smallmatrix}; z\right) \quad (1 \leq k \leq p),$$

$${}_{p+1}F_p\left(\begin{smallmatrix} a_1 + r, \dots, & a_{p+1} + r \\ b_1 + r, \dots, & b_p + r \end{smallmatrix}; z\right) \quad (p \geq 0), \quad {}_pF_p\left(\begin{smallmatrix} a_1 + r, \dots, & a_p + r \\ b_1 + r, \dots, & b_p + r \end{smallmatrix}; z\right) \quad (p \geq 0)$$

abgeleitet, wenn r positiv und $\gg 1$ ist. Den Abschluß des Kapitels bilden Approximationsformeln für $K_\nu(z)$ und $Y_\nu(z)$, $\Re(\nu) > 0$, $|\nu| \gg 1$, und die Whittakerschen Funktionen $W_{k \mp \frac{1}{2}r, m + \frac{1}{2}r}(z)$, r positiv und $\gg 1$ sowie für ${}_2F_1(a + r, b + r; c + r; z)$ und ${}_2F_1(a, b; c + r; z)$, r positiv und $\gg 1$ (mit einer neuen Definition der letzteren in der von 1 bis $1 + \infty i$ aufgeschnittenen z -Ebene). In den Kapiteln 4 und 5 werden Konvergenzfragen, insbesondere auf dem Rande der Konvergenzbereiche, und im Anschluß an drei Entwicklungstheoreme von C. S. Meijer (dies. Zbl. 48, 307, 308; 50, 294; 51, 308; 55, 66, 67; 73, 289) eine größere Anzahl von speziellen Entwicklungsproblemen behandelt. Den Abschluß der sich durch Klarheit der Form und Exaktheit der Beweise auszeichnenden Arbeit bildet ein Schriftenverzeichnis.

O. Volk.

Meligy, A. S.: Expansions of Whittaker's function. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 10, 202—205 (1959).

The author gives an expansion of the Whittaker's confluent hypergeometric function $M_{k,m}(z)$, in terms of Bessel functions, which generalizes the known expansions of Slater [Proc. Cambridge philos. Soc. 50, 628—631 (1954)], Abramowitz [Tables of Coulomb wave functions, Vol. 1 (1952; this Zbl. 49, 280)] and others. The expansion derived is

$$M_{k,m}(z) = 4^\lambda \Gamma(\lambda + 1) z^{\frac{1}{2} + m - \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n I_{\lambda+n}\left(\frac{1}{2}z\right),$$

where

$$a_n = (-1)^n \frac{(2\lambda - 2m)_n (2\lambda)_n (\lambda + n)}{n! (2m + 1)_n (\lambda)} {}_3F_2\left[\begin{smallmatrix} -n, \lambda - m - k, 2\lambda + n \\ 2\lambda - 2m, \lambda + \frac{1}{2} \end{smallmatrix}; 1\right]$$

and $I_\lambda(z)$ is a Bessel function. The author remarks that the above expansion is useful

in furnishing expansions which are of importance in certain nuclear scattering problems.

R. P. Agarwal.

Rimskij-Korsakov, B. S.: Eine Variante des Aufbaus der verallgemeinerten Gammafunktionen auf der Basis der Laplacetransformation. Moskovsk. oblast. ped. Inst., učenyje Zapiski 57, Trudy Kafedr Mat. 4, 121—141 (1957) [Russisch].

Es wird die Eulersche Gamma-Funktion folgendermaßen verallgemeinert: es sei $f(p)$ ($p = s + i\sigma$) eine Funktion, für welche $h(t) = L^{-1}\{f'(p)/f(p)\}$ (L^{-1} ist das Symbol der inversen Laplace-Transformation) existiert und in $(0, \infty)$ beschränkt ist. Man betrachtet folgende Funktionalgleichung $(*)$ $\varphi(p+1) = f(p)\varphi(p)$ und sucht ihre Lösung nebst der Bedingung $\varphi(1) = 1$. Es wird bewiesen, daß die logarithmische Ableitung der Lösung von $(*)$ in der Form

$$\psi_f \equiv \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)} = \int_0^\infty \left[\frac{\exp(-t)}{t} - \frac{\exp(-pt)}{(1 - \exp(-t))} \right] h(t) dt + \log f(1)$$

für $\text{Re } p > 0$ darstellbar ist. Diese Lösung wird verallgemeinerte Gamma-Funktion genannt und durch Γ_f bezeichnet. Falls $|h(t)| < M \exp(s_0 t)$ ($s_0 < 1$) ist, so existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f'(1)}{f(1)} + \dots + \frac{f'(n-1)}{f(n-1)} - \log f(n) \right\} = C_f$, und wird als verallgemeinerte Eulersche Konstante bezeichnet. Es gilt folgender Zusammenhang: $\psi_f(1) = -C_f$. Die verallgemeinerte Gamma-Funktion und verallgemeinerte Euler-Konstante weisen viele interessante Eigenschaften auf, welche denen der klassischen Gamma-Funktion sehr ähnlich sind. So gilt z. B. wenn $h(t)$ beschränkt im Intervall $(0, \infty)$ ist, folgende Integral-Darstellung:

$$C_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} [\log z - \psi(z)] \frac{f'(1-z)}{f(1-z)} dz - \log f(1) \quad (0 < a < 1; \psi(z) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}).$$

Als Verallgemeinerung der Schlömilchschen Formel wird folgende Produktdarstellung bewiesen

$$\frac{1}{\Gamma_f(p)} = f(p) \exp(C_f p) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{f(n+p)}{f(n)} \exp \left[\left(\frac{f'(n)}{f(n)} \right) p \right].$$

Noch mehrere interessante Darstellungen und Zusammenhänge werden bewiesen. Zum Schluß weist Verf. auf die Anwendungsmöglichkeiten hin, und es wird mit Hilfe der bewiesenen Sätze der Wert eines unendlichen Produktes und eine ziemlich verwickelte Laplace-Transformation bestimmt.

St. Fenyő.

Olver, F. W. J.: Uniform asymptotic expansions for Weber parabolic cylinder functions of large orders. J. Res. nat. Bur. Standards 63 B, 131—169 (1959).

In Anwendung der vom Verf. in einer vorhergehenden Arbeit (dies. Zbl. 83, 57) gegebenen Theorie der asymptotischen Lösungen von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden Entwicklungen für die Lösungen der Differentialgleichung $w'' = \mu^4(t^2 - 1)w$ für große Werte von $|\mu|$ mit beliebigem $\arg \mu$ und komplexe Veränderliche t abgeleitet. Es werden zwei Klassen von Entwicklungen gefunden; die der ersten sind auf elementaren Funktionen aufgebaut und gültig außerhalb der Umgebungen der beiden „turning points“ $t = \pm 1$; die der zweiten schreiten nach Airyschen Funktionen fort und gelten in allen Bereichen, die nur einen der beiden Punkte $t = \pm 1$ enthalten. Der in den Anwendungen wichtige Fall reeller Veränderlicher wird explicite dargestellt und durch zwei numerische Beispiele illustriert. Zum Schluß werden die Entwicklungen zur Bestimmung der Nullstellen von Weber'schen Funktionen (ebenfalls mit zwei numerischen Beispielen) verwendet. Die asymptotischen Entwicklungen des Verf. umfassen alle bisherigen, über die ausführlich berichtet wird.

O. Volk.

Mohr, E.: Elementarer Beweis für die Produktentwicklung des Sinus und die Partialbruchzerlegung des Cotangens. Z. angew. Math. Mech. 39, 78—80 (1959).

Funktionentheorie:

Nehari, Zeev: On the derivative of an analytic function. Amer. math. Monthly **67**, 446—448 (1960).

It is known that the proof of the continuity and differentiability of $f'(z)$ without the use of complex integration is an open question. The author tries to give a proof of this fact, but in the opinion of the reviewer, complex integration is still there (formula (3) and its consequences). C. Uluçay.

Meier, Kurt: Eine hinreichende Bedingung für die Regularität einer komplexen Funktion. Commentarii math. Helvet. **34**, 67—70 (1960).

Soit G un domaine du plan complexe $z = x + iy$. On sait que la fonction complexe $f(z)$ est holomorphe dans G si, pour tout $z \in G$: $1^\circ f(z)$ est continue, $2^\circ \partial f / \partial x$ et $\partial f / \partial y$ existent et $\partial f / \partial x + i \partial f / \partial y = 0$. L'A. montre que la condition 2° peut être remplacée par la condition plus large suivante: il existe une suite $\{r_n\}$ de nombres positifs tendant vers zéro telle que, pour tout $z \in G$ les quatre suites

$$[f(z + r_n e^{i\vartheta}) - f(z)] / r_n e^{i\vartheta}; \quad \vartheta = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$$

tendent vers une même limite finie.

J. Dufresnoy.

Bourion, Georges: Sur un théorème de Szegő. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **39** (Volume offert en hommage à M. René Garnier) **1**, 85—90 (1960).

An elementary harmonic measure theory proof is given of Szegő's theorem: — Let $\{a_{n_k}\}$ be a sequence for which $|a_{n_k}|^{1/n_k} \rightarrow 1$ of coefficients of $\sum a_n z^n$ which has radius of convergence unity. Then the number of zeros of $S_{n_k}(z) = \sum_{p=0}^{n_k} a_p z^p$ in $\varphi_0 < \arg z < \varphi_1$, $\varrho < |z| < \varrho'$ (with $\varrho < 1 < \varrho'$), is $(2\pi)^{-1} (\varphi_1 - \varphi_0) n_k + o(n_k)$. N. A. Bowen.

Ullman, Joseph L.: Studies in Faber polynomials. Trans. Amer. math. Soc. **94**, 515—528 (1960).

Die Reihe $z = g(w) = w + b_0 + \frac{b_1}{w} + \dots$ konvergiere genau für $|w| > \varrho$. Zu jedem z sei K_z der größte Kreis $|w| = r_z$, auf dem $g(w)$ den Wert z annimmt, und \mathfrak{C} sei die Menge derjenigen z , die auf $g(K_z)$ keine mehrfachen Punkte sind. Ist Δ die Menge der Häufungspunkte der Nullstellen der zu $g(w)$ gehörigen Faber-polynome der z -Ebene, so gilt $\Delta \cap \overline{\mathfrak{C}} = \overline{\mathfrak{C}} - \mathfrak{C}$. — Dies Resultat ist eng verwandt mit einem Satz von Chr. Pommerenke [Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. math.-phys. Kl. **1959**, Nr. 10, 274—277 (1959)]. H. Tietz.

Pommiez, Michel: Sur les zéros des restes successifs des séries de Taylor. C. r. Acad. Sci., Paris **250**, 1168—1170 (1960).

Let $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ have radius of convergence ≥ 1 ; let $f_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{n+p} z^p$. Then there exists a constant C , the upper bound of the r for which $|z_n| \leq r$ and $f_n(z_n) = 0$ for all n implies $f(z) \equiv 0$. Approximations to C , and particular cases, are discussed. N. A. Bowen.

Pommiez, Michel: Sur les restes successifs des séries de Taylor. C. r. Acad. Sci., Paris **250**, 2669—2671 (1960).

The connection between the zeros and univalence of the functions $f_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{n+p} z^p$ of a function $f(z) = f_0(z)$, holomorphic in $|z| < 1$, is considered, and the case of integral functions of finite positive order is examined. (Compare the previous review, where the same author discusses similar problems by the same method). N. A. Bowen.

Remizova, M. P.: On regions of values of analytic functions represented by the sum and product of Stieltjes integrals. Ukrain. mat. Žurn. **11**, 175—182, engl. Zusammenfassung 182 (1959) [Russisch].

The author investigates the domain D of values assumed by a function of the form

$$f(\zeta) = \sum_1^n \int_a^b G_k(\zeta, t) d\mu_k(t) = f_1(\zeta) + \dots + f_n(\zeta),$$

where the $G_k(\zeta, t)$ are regular in ζ for ζ in some domain F_k and continuous in t for $a \leq t \leq b$, and where $\mu_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$) are non-decreasing in $a \leq t \leq b$ with $\int_a^b d\mu_k(t) = 1$; it is assumed also that $\zeta \in \cap F_k$. Some elementary properties of D are stated, e. g., that D is the convex hull of the set $\cup \Gamma_k$, where Γ_k denotes the curve $w = G_k(\zeta, t)$, $a \leq t \leq b$, for fixed $\zeta \in \cap F_k$. The author investigates the nature of the functions $f(\zeta)$ which maximize or minimize $|\Phi(f(\zeta))|$, where $\Phi(w)$ is a given continuous function on D . The analogous problem is treated when $f(\zeta)$ has the form of a product $\prod_1^n f_k(\zeta)$. An elementary application is illustrated by a function $f(\zeta)$ having the form of a Poisson-Stieltjes integral in an annulus. *A. J. Lohwater.*

Hällström, Gunnar af: Bemerkungen über Halbvertauschbarkeit ganzer Funktionen. Math. Scandinav. **7**, 61—70 (1959).

Die Untersuchungen von E. Jacobsthal (dies. Zbl. **65**, 249), I. N. Baker [Math. Z. **69**, 121—163 (1958)] und Verf. (dies. Zbl. **77**, 25; **82**, 23) fortsetzend, teilt Verf. weitere 21 Sätze über (ganz oder gebrochen) halbvertauschbare Funktionen mit, d. h. über Funktionen g, h , für die $g(h(z)) \equiv L(h(g(z)))$ gilt, wo L eine lineare ganze bzw. gebrochene Funktion ist. Besonderes Interesse wird den Fällen gewidmet, wo g, h ganze Funktionen sind. Wir geben einige der Aussagen wieder: Ist eine ganze transzendente Funktion endlicher Ordnung mit einer anderen ganzen gebrochen halbvertauschbar, so ist ihre Ordnung eine positive ganze Zahl. Falls das letztere nicht zutrifft, kann sie auch mit keiner ganzen Funktion mit endlichem Picardschen Ausnahmewert halbvertauschbar sein. Keine ganze transzendente Funktion ist mit einer gebrochen rationalen halbvertauschbar. Unter den Polynomen sind nur die linearen, deren Hauptkoeffizient eine Einheitswurzel ist, mit irgendwelchen ganzen transzendenten Funktionen halbvertauschbar. Mit $Ae^{rz} + B$ sind unter den Polynomen $z + k$ ganz und $k - z$ gebrochen halbvertauschbar und nur diese. Mit $Ce^{de^{rz}} + B$ sind unter den linearen Funktionen $z + \pi in/r$ mit ganzen n und nur diese halbvertauschbar. Mit (*) $Ae^{rz} + B + C e^{-rz}$ ($AC \neq 0$) sind unter den Polynomen $z + ni/r\pi$ und $-z + (\pi ni + \log(C/A))/r$ (n eine ganze Zahl) und nur diese halbvertauschbar. Zwei Funktionen der Gestalt (*) mit gemeinsamen r sind dann und nur dann halbvertauschbar, wenn ihre Differenz $\pi ni/r$ oder ihre Summe $(\pi ni + \log(C/A))/r$ ist. *J. Aczél.*

Dwivedi, S. H.: On entire functions of finite order. Math. Student **26**, 169—172 (1959).

Es sei $f(z)$ ein kanonisches Produkt von der Ordnung ϱ und dem Geschlecht p , $p = \varrho$, ferner $n(r)$ seine Nullstellenfunktion und $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Für den Zusammenhang zwischen Nullstellen und Wachstum von $f(z)$ gilt dann nach Shah (dies. Zbl. **26**, 217) $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r) \Phi(r)}{\log M(r)} = \infty$, wenn $\Phi(x)$ eine positive, stetige Funktion ist mit $\int_0^\infty [x \Phi(x)]^{-1} dx < \infty$. Der Verf. zeigt an Hand des Beweises von Boas (dies. Zbl. **50**, 82), daß $n(r)$ durch $N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt$ ersetzt werden kann.

D. Gaier.

Royden, H. L.: Rings of meromorphic functions. Proc. Amer. math. Soc. **9**, 959—965 (1959).

Dans la première partie, l'A. caractérise les valuations sur le corps des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte; il étend ensuite le résultat au corps des quotients de fonctions holomorphes et bornées sur une surface de Riemann finie non compacte. Dans la seconde partie, il considère une surface de Riemann compacte W_0 et une partie W_1 de W_0 qui est ouverte, connexe et dont chaque point frontière est une singularité essentielle pour une fonction holomorphe et bornée sur W_1 ; soit F_1 le corps des quotients de fonctions holomorphes et bornées sur W_1 ; soit F_2 le corps de toutes les fonctions méromorphes sur une surface de Riemann quelconque W_2 ; l'A. caractérise les homomorphismes de F_1 dans F_2 .

J. Dufresnoy.

Baganas, Nicolas: Un nouveau critère de normalité d'une famille de fonctions algébroides. C. r. Acad. Sci., Paris **250**, 1424—1425 (1960).

Soit donnée, dans un domaine D , une fonction algébroïde ayant au moins $2n + 1$ branches distinctes. Les fonctions qui, dans D , sont des algébroides à n branches et qui ne prennent jamais, au même point z , aucune des valeurs de la fonction donnée, forment une famille normale.

J. Dufresnoy.

Akutowicz, Edwin J.: Schwarz's lemma in the Hardy class H^1 . Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **8**, 185—191 (1959).

The author considers the class H^1 (Banach space) of all analytic functions $\varphi(z)$ in $|z| < 1$, such that $\|\varphi\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})| dt$ is bounded. Two infinite sequences of complex numbers z_n, w_n are given such that (1) $\varphi(z_n) = w_n$, $|z_n| < 1$, $z_n \neq z_m$ if $n \neq m$, $\varphi \in H^1$, with the conditions: (i) z_n has no limit points in $|z| < 1$, (ii) there are more than one function $\varphi \in H^1$ satisfying (1), (iii) not all w_n vanish. Then there exists $f \in H^1$ such that $\|f\| = \inf \|\varphi\|$. Next, the author introduces what he calls the conjugate extremal function F defined as follows: Let $\lambda(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{f\Phi}{B} dz$, where $\Phi(z)$ is any analytic function in $|z| < 1$ with $|\Phi(z)| \leq 1$, and B is the Blaschke product with zeros z_n . Then $\lambda(F) = \sup |\lambda(\Phi)|$. It is deduced that $\|f\| = \lambda(F)$. Finally, let E be the set of limit points of z_n on $|z| = 1$. Suppose that $E \neq \{|z| = 1\}$. The conclusion is that f and F can be analytically continued as meromorphic functions in the complement of the set E with respect to the finite plane. *C. Uluçay.*

Šlionskij (Shlionsky), G. G.: Extremalprobleme für differenzierbare Funktionale in der Theorie der schlichten Funktionen. Vestnik Leningradsk. Univ. **13**, Nr. 13 (Ser. Mat. Mech. Astron. 3) 64—83, engl. Zusammenfassung 83 (1958) [Russisch].

Mit Hilfe von Variationsmethoden betrachtet Verf. Extremalprobleme für einige Klassen von schlichten Funktionen. Ein Teil der Ergebnisse wird mit der Löwnerschen Methode präzisiert. Alle Ergebnisse sind in Funktionalform gegeben. Die wichtigsten Sätze sind in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 88, 287) formuliert.

T. Gentschev.

Šlionskij (Shlionsky), G. G.: On the theory of bounded schlicht functions. Vestnik Leningradsk. Univ. **14**, Nr. 13 (Ser. Mat. Mech. Astron. 3) 42—51, engl. Zusammenfassung 50 (1959) [Russisch].

Verf. beweist die Ergebnisse einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 72, 294). Das Grundergebnis ist das folgende: Es sei $f(z)$ eine im Kreise $|z| < 1$ reguläre, schlichte und beschränkte Funktion: $|f(z)| \leq M$. Es sei $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Dann ist für $k = 0, 1, 2, \dots$ die Ungleichung

$$\left| \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^m \gamma'_{\nu} \delta_{\mu} \Phi_{\nu\mu}^{(2k)}(\gamma_{\nu}, \zeta_{\mu}) \right| \leq \left\{ \sum_{\nu, \nu'=1}^n \gamma'_{\nu} \gamma'_{\nu'} \psi_{\nu\nu'}^{(2k)}(z_{\nu}, z_{\nu'}) \sum_{\mu, \mu'=1}^m \gamma'_{\mu} \gamma'_{\mu'} \psi_{\mu\mu'}^{(2k)}(\zeta_{\mu}, \zeta_{\mu'}) \right\}^{1/2}$$

erfüllt. Dabei sind

$$\Phi(x, y) = \log \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \frac{xy}{f(x)f(y)}, \quad |x| < 1, \quad |y| < 1,$$

$$\varphi(x, y) = \log \frac{1 - f(x)\overline{f(y)}/M^2}{1 - x\overline{y}}, \quad |x| < 1, \quad |y| < 1,$$

γ_ν, δ_μ beliebige komplexe Zahlen; z_ν, ζ_μ beliebige Punkte auf dem Kreise $|z| < 1$; $\nu = 1, 2, \dots, n$; $\mu = 1, 2, \dots, m$; $n \geq 1, m \geq 1$. Der Beweis ist nach der Methode von Löwner geführt.

T. Argyrova.

Perry, R. L.: The univalent functions of a family. *J. London math. Soc.* **35**, 49—62 (1960).

The author considers functions of the type $f(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) a_n z^n$, ($0 < t \leq 1$),

for $|z| < 1$. Imposing certain conditions on $r_n(t)$, he investigates the sets of coefficients $\{a_n\}$ for which $f(z, t)$ is schlicht in the unit circle.

C. Uluçay.

Kreyszig, Erwin and John Todd: The radius of univalence of the error function. *Bull. Amer. math. Soc.* **64**, 363—364 (1958).

The authors announce the radius ϱ of univalence of the function $\operatorname{erf}(z) \stackrel{\text{d.}}{=}$

$\int_0^z \exp(-t^2) dt$; it is stated that $1.5666 < \varrho < 1.5858$, which improves upon a result due to Reade (this Zbl. **81**, 299). See the authors paper, reviewed in this Zbl. **86**, 62.

M. O. Reade.

Brown, R. K.: Univalence of Bessel functions. *Proc. Amer. math. Soc.* **11**, 278—283 (1960).

Robertsons Verfahren (dies. Zbl. **57**, 311) wird zur Untersuchung des Schlichtheitsradius der Funktionen $w^{1/\alpha}$ und $z^{1-\alpha} w$, $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$, benutzt, wobei w eine Lösung von $w'' + w'/z + q(z)w = 0$ ist. Insbesondere werden Besselsche Funktionen 1. Art betrachtet; hierbei erhält man eine Verschärfung einiger Ergebnisse von J. Todd und dem Ref. (vgl. vorstehendes Referat).

E. Kreyszig.

Tumarkin, G. C. und S. Ja. Chavinson: Analytische Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Bereichen von der V. I. Smirnovschen Klasse (Klasse S). *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **22**, 379—386 (1958) [Russisch].

Die Klasse der einfachzusammenhängenden Gebiete G mit rektifizierbarem Rand Γ enthält als echte Teilklasse S diejenige, für die sich $\log |\varphi'(w)|$ mittels des Poissonschen Integrales darstellen läßt, wo $z = \varphi(w)$ die Abbildung von $|w| < 1$ auf G bedeutet. [Vgl. z. B. Privalov, Randeigenschaften analytischer Funktionen (dies. Zbl. **73**, 65), III § 12—15.] Der Begriff der Klasse S wird hier auf beliebige endlich vielfach zusammenhängende Gebiete G ausgedehnt. Verf. zeigt, daß die beiden folgenden Definitionen gleichwertig sind: G gehört zu S , wenn jedes der einfach zusammenhängenden Gebiete, die von einer Randkurve von G berandet werden und G enthalten, zu S gehören; wenn sich $\log |\varphi(w)|$ durch die Greensche Formel darstellen läßt, wo $z = \varphi(w)$ die umkehrbar eindeutige konforme Abbildung eines Kreisgebietes auf G bedeutet. In den Beweis sind einige Überlegungen betreffend die Funktionsklassen D , E_p und H_p in mehrfach zusammenhängenden Gebieten eingeflochten. D ist dabei die Klasse der Funktionen, für die $\log^+ |f(z)|$ in bezug auf das harmonische Maß auf den Rändern einer ausschöpfenden Bereichfolge gleichgradig totalstetig ist, E_p ($p > 0$) die Klasse der Funktionen, für die $\int |f(z)|^p |dz|$ über eine solche Folge von Rändern beschränkter Länge beschränkt ist, H_p die Klasse der Funktionen, für die $|f|^p$ eine harmonische Majorante besitzt.

H. Grunsky.

Tumarkin, G. C. und S. Ja. Chavinson: Über die Existenz von in mehrfach zusammenhängenden Bereichen eindeutigen analytischen Funktionen mit vorgegebenem Betrag der Randwerte. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **22**, 543—552 (1958) [Russisch].

Sind die gegebenen Randwerte derart, daß die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie lösbar ist, so ist auch die hier gestellte Aufgabe lösbar mit der zusätzlichen Bedingung, daß die Lösung höchstens $n - 1$ Nullstellen besitzt, wenn n die Zusammenhangszahl ist. Das hatte Ref. schon im Jahre 1942 in einer dem Verf. offenbar unbekannt gebliebenen Arbeit bewiesen (dies. Zbl. 28, 405). Der Beweis des Verf. ist von dem des Ref. wesentlich verschieden und arbeitet mit funktionalanalytischen Mitteln. Das gestellte Problem wird präzisiert, indem nur Funktionen der Klasse A betrachtet werden; das sind diejenigen, für die $\log^+ |f(z)|$ eine harmonische Majorante besitzt. Eine solche Funktion besitzt fast überall (in bezug auf das harmonische Maß) endliche Randwerte, für die $|\log |f(z)||$ in bezug auf das harmonische Maß summierbar ist. Umgekehrt gibt es zu solchen Randwerten immer eine Funktion der Klasse $D \subset A$ mit höchstens $n - 1$ Nullstellen. Bei spezielleren Voraussetzungen über die Randwerte ergeben sich Funktionen aus entsprechend spezielleren Klassen. Das Resultat wird benutzt für einen Beweis der Darstellbarkeit einer in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet meromorphen Funktion beschränkter Charakteristik als Quotient zweier beschränkter Funktionen.

H. Grunsky.

Bers, Lipman: Simultaneous uniformization. Bull. Amer. math. Soc. 66, 94—97 (1960).

Let S, S' be two abstract Riemann surfaces, f a homeomorphism of bounded eccentricity of S onto S' and $[f]$ the homotopy class of f . $(S, [f], S')$ is called a coupled pair of Riemann surfaces; it is even (odd) if f preserves (reverses) orientation. Two coupled pairs $(S, [f], S')$, $(S_1, [f_1], S'_1)$ are called equivalent if there exist conformal homeomorphisms h and h' , with $h(S) = S_1$, $h'(S') = S'_1$ and $[h'f h^{-1}] = [f_1]$. A group G of Möbius transformations is called quasi-Fuchsian if there exists an oriented Jordan curve γ_G (on the Riemann sphere), which is fixed under G , and if G is fixed-point-free and properly discontinuous in the domains $I(\gamma_G)$ and $E(\gamma_G)$, interior and exterior to γ_G respectively. G is said to be of the first (second) kind if the fixed points of elements of G are (are not) dense on γ_G . The author proves that if $(S, [f], S')$ is an odd coupled pair and S has a hyperbolic universal surface, then there exists a quasi-Fuchsian group G and a homeomorphism g of bounded eccentricity of $I(\gamma_G)/G$ onto $E(\gamma_G)/G$, which induces the natural isomorphism of the fundamental group of $I(\gamma_G)/G$ onto the fundamental group of $E(\gamma_G)/G$, such that $(S, [f], S')$ is equivalent to $(I(\gamma_G)/G, [g], E(\gamma_G)/G)$. If G is of the first kind, then G is unic up to a Möbius transformation. For $g > 1$ let T_g be the Teichmüller space; T_g can be considered, in a natural way, as a bounded domain in the number space \mathbb{C}^{3g-3} . The author sketches the proof of the following theorem: There exist $2g$ Möbius transformations of the z -sphere $A_j^{(\tau)}(z) = [a_j(\tau)z + b_j(\tau)]/[c_j(\tau)z + d_j(\tau)]$ ($j = 1, 2, \dots, 2g$), which depend holomorphically on $\tau \in T_g$, satisfying the normalization conditions

$$A_{2g-1}^{(\tau)}(0) = 0, A_{2g-1}^{(\tau)}(\infty) = \infty, A_{2g}^{(\tau)}(1) = 1, \prod_{j=1}^g A_{2j-1}^{(\tau)} A_{2j}^{(\tau)} (A_{2j-1}^{(\tau)})^{-1} (A_{2j}^{(\tau)})^{-1} = 1$$

and generate, for each fixed τ , a quasi-Fuchsian group G_τ , with $I(\gamma_{G_\tau})/G_\tau$ conformally equivalent to S_τ . Let $T_{g,1}$ be the Teichmüller space of Riemann surfaces of genus g , with a point removed. Then $T_{g,1}$ is holomorphically equivalent to a domain $M_{g,1} \subset \mathbb{C}^{3g-2}$ defined as follows: $(z, \tau) \in M_{g,1}$ if and only if $z \in I(\gamma_{G_\tau})$ and $\tau \in T_g$. There exist finitely many meromorphic functions, $F_1(z, \tau), \dots, F_N(z, \tau)$ in $M_{g,1}$ which, for every fixed τ , generate the field of automorphic functions in $I(\gamma_{G_\tau})$ under the group G_τ .

C. Constantinescu.

Lehto, Olli, K. I. Virtanen and Jussi Väisälä: Contributions to the distortion theory of quasiconformal mappings. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 273, 14 p. (1959).

$K(G)$ sei die maximale Dilatation der quasikonformen Abbildung $w = w(z)$ in G und die maximale Dilatation im Punkte z sei $K(z) = \inf_{G_z} K(G_z)$, $z \in G_z$, $G_z \subset G$. Es gilt $\sup_{z \in G} K(z) = K(G)$. Neben $K(z)$ ist ein anderes natürliches Maß für die lokale

Verzerrung die Größe

$$H(z) = \limsup_{r \rightarrow 0+} \left[\max_{\varphi} |w(z + re^{i\varphi}) - w(z)| / \min_{\varphi} |w(z + re^{i\varphi}) - w(z)| \right], z \in G, z \neq \infty, w \neq \infty.$$

In einem Punkt, wo die Abbildung total differenzierbar ist und $w_x \neq 0$ oder $w_y \neq 0$, ist $H(z) \leq K(z)$, wobei die Gleichheit z. B. bei den stetig differenzierbaren Abbildungen gilt. Die natürliche Frage, wie die Maße $K(z)$ und $H(z)$ sich bei einer willkürlichen topologischen Abbildung verhalten, wird geklärt. Durch das Beispiel $R = e^{-1/r}$, $\Phi = \varphi$ sieht man, daß $K(z)$ sogar ∞ sein kann, wenn $H(z) = 1$ ist. Umgekehrt weiß man nach Mori, daß $H(z) \leq e^{\pi K(z)}$ gilt. Die Verff. geben hier mit Hilfe eines Satzes von Teichmüller (dies. Zbl. 24, 333) die genaue Grenze für $H(z)$ als eine Funktion von $K(z)$. Es gilt $H(z) = \lambda(K(z))$, wo $\lambda(K) = \left(\frac{1}{(\mu^{-1}(\pi/2 k))^2} - 1 \right)^{-1}$. Hier ist μ^{-1} die Umkehrfunktion von $\mu(r)$, dem Modul des längs der Strecke $0 \leq x \leq r < 1$ aufgeschnittenen Einheitskreises. Die Funktion $\lambda(K)$ hat die Entwicklung $\lambda(K) = \frac{1}{16} e^{\pi K} - \frac{1}{2} + \delta(K)$ mit $0 < \delta(K) < 2e^{-\pi K}$ für $K \geq 1$.
Y. Juve.

Lehto, Olli and K. I. Virtanen: On the existence of quasiconformal mappings with prescribed complex dilatation. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 274, 24 p. (1960).

$\S(z)$ sei eine beliebige meßbare Funktion mit der Eigenschaft $\sup |\S(z)| < 1$ in einem Gebiet G der komplexen z -Ebene. Ein fundamentaler Satz der Theorie der quasikonformen Abbildung sagt, daß es eine quasikonforme Abbildung $w = w(z)$ von G mit der komplexen Dilatation $\S(z)$ fast überall in G gibt. (Mit den Bezeichnungen $w_z = \frac{1}{2}(w_x - i w_y)$, $w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(w_x + i w_y)$ ist $\S(z) = w_{\bar{z}}(z)/w_z(z)$ in einem Punkt $z \in G$, wo $w(z)$ total differenzierbar ist und $w_z \neq 0$. Der Absolutbetrag und das Argument von $\S(z)$ hängen eng mit dem Dilatationsquotienten und der Richtung der maximalen Dilatation zusammen.) Hier wird ein neuer Beweis dieses Satzes gegeben, wobei die allgemeine Uniformisierungstheorie und die Theorie der Integralgleichungen vermieden werden. Die Idee der Beweisführung ist folgende: Man wählt als G ein Quadrat, teilt dieses in eine endliche Anzahl kongruenter Quadrate G_v und approximiert danach $\S(z)$ in jedem G_v mit einer passenden Konstante α_v und hat so in $w_v(z) = z + \alpha_v \bar{z}$ eine quasikonforme Abbildung mit der komplexen Dilatation α_v in G_v . Danach konstruiert man nach einer endlichen Anzahl von Schritten eine quasikonforme Abbildung des ganzen Quadrats G mit der komplexen Dilatation α_v in jedem G_v . In dieser Konstruktion ist ein wichtiger Punkt der folgende: wenn w_1 und w_2 quasikonforme Abbildungen (mit den komplexen Dilatationen \S_1 und \S_2) der punktfremden Rechtecke R_1, R_2 mit einer gemeinsamen Seite Γ in sich selbst sind, so gilt es einwertige, konforme Abbildungen f_1, f_2 von R_1 bzw. R_2 auf punktfremde Gebiete zu konstruieren, so daß auf Γ $f_1(w_1(z)) = f_2(w_2(z))$ gilt. Hiernach hat man in $T(z) = f_1(w_1(z))$, $z \in R_1 \cup \Gamma$, $= f_2(w_2(z))$, $z \in R_2$ eine quasikonforme Abbildung von $R_1 \cup R_2 \cup \Gamma$ mit der komplexen Dilatation \S_1 bzw. \S_2 fast überall in R_1 bzw. R_2 . Bei der Lösung dieses Problems wird das bekannte Beurling-Ahlforssche Resultat über die Randwertaufgabe der quasikonformen Abbildung für die Halbebenen wesentlich ausgenützt (dies. Zbl. 72, 296). — Durch Grenzübergang gewinnt man dann die gesuchte Abbildung von G , und danach ist es leicht, sich der Voraussetzung, G ist ein Quadrat und ein beschränktes Gebiet, zu entledigen. Auch ist es leicht zu sehen, daß die Abbildung bis auf eine konforme Abbildung bestimmt ist. — Als Anwendung geben die Verff. zum Schluß gewisse Resultate über die Fortsetzung der quasikonformen Abbildungen und metrische Charakterisierungen gewisser Nullmengen.
Y. Juve.

Lehto, Olli: On the differentiability of quasi-conformal mappings with prescribed complex dilatation. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 275, 28 p. (1960).

Es sei $w = w(z)$ eine quasikonforme Abbildung des Gebiets G in der z -Ebene. Ein Punkt $z_0 \in G$ wird für $w(z)$ regulär genannt, falls $w(z)$ in z_0 total differenzierbar ist und die Jacobische Determinante dort > 0 . Bekanntlich sind fast alle Punkte regulär. Nun ist in der vorstehend besprochenen Arbeit von Lehto und Virtanen bewiesen worden: wenn $\mathfrak{H}(z)$ eine beliebige meßbare Funktion mit $\sup |\mathfrak{H}(z)| < 1$ ist, so gibt es eine bis auf konforme Abbildung bestimmte quasikonforme Abbildung von G , deren komplexe Dilatation mit $\mathfrak{H}(z)$ fast überall in G zusammenfällt. Hier wird die interessante Frage untersucht, wann für eine gegebene $\mathfrak{H}(z)$ die Abbildung $w = w(z)$ im Punkt $z_0 \in G$ regulär ist und die komplexe Dilatation in z_0 mit $\mathfrak{H}(z_0)$ zusammenfällt. Es ergibt sich, daß dafür die Konvergenz des Integrals $I(z_0) = \iint_G \frac{|w(z) - w(z_0)|}{|z - z_0|^2} d\sigma$

hinreichend ist. Der Beweis ist ziemlich beschwerlich und erfordert sehr genaue Abschätzungen. Das Hauptprinzip bei den Betrachtungen ist, geeignete zweifach-zusammenhängende Gebiete oder Vierecke in $|z| < 1$ zu wählen und die Moduln dieser Gebiete und ihrer Bilder auf Grund der geometrischen Konfiguration abzuschätzen. Hierbei wird auf wesentliche Weise die in der Arbeit abgeleitete Abschätzung

$$\frac{\text{mod } G}{\text{mod } G'} \leq \frac{1}{2\pi \text{mod } G} \iint_G D(z) \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right|^2 d\sigma$$

benutzt, wo G und G' durch $w = w(z)$ quasikonform äquivalente Ringgebiete sind, $D(z) = \max_{\vartheta} \left| \frac{dw}{dz} \right|_{\vartheta} / \min_{\vartheta} \left| \frac{dw}{dz} \right|_{\vartheta}$ ($\vartheta = \arg dz$) ist und $t = f(z)$ das Gebiet G konform auf einen Kreisring abbildet; eine ähnliche Abschätzung gilt für Vierecke. — Als Korollar wird die Existenz der Koebeschen Konstante für quasikonforme Abbildungen bewiesen. Weiter wird gezeigt, daß die gleichmäßige Konvergenz des Integrals $I(z)$ in jedem kompakten Teilgebiet von G die stetige Differenzierbarkeit von $w(z)$ nach sich zieht und also die Quasikonformität der Abbildung im Sinne von Grötzsch-Teichmüller garantiert. — Zum Schluß enthält diese schöne Arbeit ein Beispiel, das zeigt, daß die gewonnene Integralbedingung nicht notwendig dafür ist, daß z_0 regulär für $w(z)$ ist. Y. Juve.

Gehring, F. W. and Olli Lehto: On the total differentiability of functions of a complex variable. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 272, 9 p. (1959).

Bekanntlich hat Mori gezeigt, daß eine quasikonforme Abbildung eines Gebietes G fast überall total differenzierbar ist (dies. Zbl. 77, 79). Die Verff. geben hier einen neuen Beweis, der das folgende Resultat benutzt: Wenn die Funktion $w(z)$ stetig in G ist und dort fast überall endliche partielle Ableitungen w_x, w_y hat, so ist sie fast überall in G differenzierbar im Sinne von Rado-Reichelderfer. [Dies bedeutet: es gibt eine Folge von orientierten Quadraten S_n mit Mittelpunkten in z_0 , so daß die Länge $l(S_n)$ der Seiten von S_n monoton gegen 0 und das Verhältnis $l(S_{n+1})/l(S_n)$ gegen 1 konvergiert, während $w(z) - w(z_0) = w_x(z_0)(x - x_0) + w_y(z_0)(y - y_0) + o(z - z_0)$ gilt, wenn z auf den Rändern der Quadrate S_n liegt.] — Auch wird folgender, etwas allgemeinerer Satz angegeben. Die Funktion $w(z)$ sei in G stetig und offen und besitze dort fast überall endliche, partielle Ableitungen. Dann ist $w(z)$ fast überall in G total differenzierbar. Es folgt z. B.: wenn $w(z)$ eine topologische Abbildung von G mit fast überall endlichen, partiellen Ableitungen ist, so ist die Jacobische Determinante über jede kompakte Menge in G integrierbar; ferner kann die Bedingung der L^2 -Integrierbarkeit in der analytischen Definition der quasikonformen Abbildung fortgelassen werden. Y. Juve.

Gehring, F. W.: The definitions and exceptional sets for quasiconformal mappings. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 281, 28 p. (1960).

Bekanntlich ist die quasikonforme Abbildung auf mehrere Weisen definiert worden. Gewöhnlich braucht man die sogenannten geometrischen und analytischen Definitionen, welche miteinander äquivalent sind. Es wird hier bewiesen, daß auch die Definition von Lavrent'ev mit den ersteren äquivalent ist. Mit

$$H(z_0) = \limsup_{r \rightarrow 0+} \frac{L(z_0, r)}{l(z_0, r)}, \quad 1 \leq H(z_0) \leq \infty,$$

$$L(z_0, r) = \sup_{|z - z_0| = r} |w(z) - w(z_0)|, \quad l(z_0, r) = \inf_{|z - z_0| = r} |w(z) - w(z_0)|, \quad z, z_0 \in D,$$

lautet die letztere: Eine topologische Abbildung $w = w(z)$ des Gebiets D ist K -quasikonform, $1 \leq K < \infty$, wenn $H(z)$ in D beschränkt ist und $H(z) \leq K$ fast überall in D gilt. Genauer wird gezeigt, daß wenn $w = w(z)$ quasikonform im Sinne der geometrischen oder analytischen Definition ist, folgt, daß $H(z) \leq K$ fast überall in D ist, und umgekehrt, daß wenn $H(z) < \infty$ in D mit Ausnahme von einer Punktmenge von Σ -finitem linearen Maß ist und $H(z) \leq K$ fast überall in D gilt, $w = w(z)$ K -quasikonform im Sinne der geometrischen und analytischen Definition ist. Weiter verschärft der Verf. das Theorem von Men'sov: falls $w = w(z)$ eine topologische Abbildung von D ist, die den Drehsinn unverändert läßt und für die $H(z) = 1$ überall in D mit Ausnahme einer abzählbaren Punktmenge gilt, so ist sie konform. Schon die Bedingung: $H(z) < \infty$ überall in D außer in Punkten einer Menge von Σ -finitem linearen Maß, $H(z) = 1$ fast überall in D , garantiert die Konformität von $w(z)$. — Zum Schluß werden die Verhältnisse der lokalen Dilatationen $H(z)$ und $K(z)$ diskutiert und z. B. bewiesen, daß es eine solche quasikonforme Abbildung der komplexen Ebene gibt, daß $K(z) = K > 1$ für alle z und $H(z) = K^2 > K$ in Punkten einer Menge von der Hausdorffschen Dimension 2 gilt. Y. Juve.

Nitsche, Johannés C. C.: On the constant of E. Heinz. Rend. Circ. mat. Palermo II. Ser. 8, 178—181 (1959).

Es sei S die Klasse aller eindeutigen harmonischen Abbildungen $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ der Kreisscheibe $\xi^2 + \eta^2 < 1$ auf sich mit $x(0, 0) = y(0, 0) = 0$. Man setze $\mu = \text{Untere}_S \text{Grenze } (x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2)_{\xi = \eta = 0}$. In der vorliegenden Note wird die in einer früheren Arbeit des Verf. [Proc. Amer. math. Soc. 9, 268, 271 (1958)] angekündigte Abschätzung $\mu \geq 0,64$ bewiesen. E. Heinz.

Chara (Khara), I. S.: Some approximate formulas in the theory of conformal mappings. Doklady Akad. Nauk SSSR 126, 1210—1213 (1959) [Russisch].

It is shown how the constants in the classical Schwarz-Christoffel mapping of the circle (or half-plane) onto a polygonal domain may be approximated in the case of certain polygons having an axis of symmetry. Three special classes of such polygonal domains are treated. A. J. Lohwater.

Potapov, V. P.: The multiplicative structure of J -contractive matrix functions. Translat. by F. Smithies. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 15, 131—243 (1960).

Vgl. die Besprechung des russischen Originals in diesem Zbl. 66, 60.

Gol'dberg, A. A.: Elementare Bemerkungen über Formeln zur Bestimmung der Ordnung und des Typus ganzer Funktionen von mehreren Veränderlichen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady 29, 145—151 (1959) [Russisch].

Let G_r , $r > 0$, be a family of closed polycircular domains in the space (z_1, \dots, z_n) with the property that $(z_1, \dots, z_n) \in \bar{G}_r$ if and only if $(z_1/r, \dots, z_n/r) \in \bar{G}_1$. For an entire function

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} a_{k_1 \dots k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$$

define $M_G(r) = M_G(r, f)$ as $\max_{(z_1, \dots, z_n) \in \bar{G}_r} |f(z_1, \dots, z_n)|$. The G -type and G -order

are defined as

$$\varrho_G = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_G(r)}{\log r} \quad \text{and} \quad \sigma_G = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M_G(r)}{r^{\varrho_G}},$$

and $\Phi_G(k_1, \dots, k_n)$ is defined as $\max_{(z_1, \dots, z_n) \in \bar{G}_1} |z_1|^{k_1} \dots |z_n|^{k_n}$. The author shows that all the orders ϱ_G are the same and are given by

$$\varrho = \varrho_G = \overline{\lim}_{k_1 + \dots + k_n \rightarrow \infty} \frac{(k_1 + \dots + k_n) \log(k_1 + \dots + k_n)}{-\log |a_{k_1 \dots k_n}|},$$

a formula which was known to Borel and Sire, and that the G -types σ_G satisfy the relation

$$\varrho \leq \sigma_G \leq \overline{\lim}_{k_1 + \dots + k_n \rightarrow \infty} \left\{ (k_1 + \dots + k_n)^{1/2} [\Phi_G(k_1, \dots, k_n) |a_{k_1 \dots k_n}|^{k_1 + \dots + k_n}]^{1/2} \right\}.$$

The author then introduces the notion of a system of types in order to study the growth of an entire function of several complex variables. A. J. Lohwater.

Modulfunktionen. Automorphe Funktionen. Fastperiodische Funktionen:

Tamagawa, Tsuneo: On Hilbert's modular group. J. math. Soc. Japan 11, 241—246 (1959).

Fundamentalbereiche der Hilbertschen Modulgruppen sind bisher von O. Blumenthal [Math. Ann. 56, 509—548 (1903)]; H. Maaß (dies. Zbl. 23, 223), der auf einen Fehler bei Blumenthal aufmerksam gemacht hat, und O. Herrmann (dies. Zbl. 55, 76) angegeben worden. Der Verfasser beweist erneut, daß der von O. Herrmann unter Benutzung der invarianten Riemannschen Metrik des hyperabelschen Raumes konstruierte Bereich ein Fundamentalbereich der Hilbertschen Modulgruppe ist. Die Beweismethode des Verf. ist rein arithmetisch.

O. Herrmann.

Newman, Morris: Modular forms whose coefficients possess multiplicative properties. Ann. of Math., II. Ser. 70, 478—489 (1959).

The author considers modular forms $B(\tau) = B_r(\tau) = \eta^r(\tau) \eta^s(q\tau)$ where r and s are non-zero integers and q is a prime. He assumes that $\varepsilon = (r+s)/2$, $\delta = (p-1)(r+qs)/24$ and $\delta^* = (p-1)(s-rq)/24$ are integers, where $p > 3$ is a prime different from q . A function $G(\tau)$ is defined which can be written as $\frac{B(\tau)}{B(\tau)} T(p)$ where $T(p)$ is a Hecke-operator (cf. K. Wohlfahrt, this Zbl. 80, 61, van Lint, this Zbl. 77, 82). By considering the singularities of $G(\tau)$ the author proves that this function is constant, i. e. $B(\tau)$ is eigenfunction of $T(p)$, if $0 \leq \delta < p$ and $0 < \delta^* < p$. This means that linear relations exist for the coefficients $c(n)$ of $\sum c(n) x^n = H(1-x^n)^r(1-x^{qn})^s$. The author also shows that the associated modified Dirichlet series possess Euler products. In a table the 147 sets of values r, s for which $G(\tau)$ is a constant are given. J. H. van Lint.

Shimura, Goro: Sur les intégrales attachées aux formes automorphes. J. math. Soc. Japan 11, 291—311 (1959).

Sei L eine Gruppe von linearen Substitutionen $L\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ mit reellen Koeffizienten, welche in der oberen komplexen Halbebene einen durch endlich viele hyperbolische Geraden begrenzten Fundamentalbereich besitzt; dieser darf in endlich vielen Spitzen an die reelle Gerade heranreichen. Seien $t(\tau)$ und $t^*(\tau)$ die einspaltige und die einzeilige Matrix mit den Elementen τ^r bzw. $(-1)^r \binom{2n-2}{r} \tau^r$, $0 \leq r \leq 2n-2$, wo n eine beliebige natürliche Zahl bedeutet. Durch $t(L\tau) (c\tau + d)^{2n-2} = M(L) t(\tau)$ und $t^*(L\tau) (c\tau + d)^{2n-2} = t^*(\tau) M^*(L)$ wird eine $(2n-2)$ -reihige Darstellung $M(L)$ definiert; dabei ist $M^*(L) = M(L^{-1})$.

Zu zwei Spitzenformen $u(\tau)$, $v(\tau)$ zu Γ des Grades $-2n$ werden die Vektoren aus Differentialen $u^*(\tau) d\tau = u(\tau) t^*(\tau) d\tau$ und $v(\tau) d\tau = v(\tau) t(\tau) d\tau$ eingeführt. Ihre unbestimmten Integrale genügen den Funktionalgleichungen

$$u^*(L\tau) = u^*(\tau) M(L) + o_L^*, \quad v(L\tau) = M(L) v(\tau) + e_L$$

mit gewissen „Periodenvektoren“ o_L^* und e_L . Diese bilden Kozyklen in einem nahe-
liegenden Sinne, und ihre Kohomologieklassen sind den Formen $u(\tau)$, $v(\tau)$ in eindeutiger Weise zugeordnet (s. dazu auch Eichler, dies. Zbl. 80, 60). Das Peterssonsche Skalarprodukt läßt sich nun so schreiben:

$$(u(\tau), v(\tau)) = (-1)^{n-1} \iint \frac{du^*}{d\tau} \frac{\bar{d}v}{d\tau} dx dy, \quad (\tau = x + iy),$$

wobei über einen Fundamentalbereich von Γ integriert wird. Es läßt sich in geläufiger Weise als eine Hermitesche Bilinearform in den Perioden o_L^* , e_L für gewisse $L \in \Gamma$ schreiben, fällt aber i. a. kompliziert aus. Die Gestalt dieser Bilinearform erlaubt den Beweis des folgenden Hauptsatzes: Gibt es eine mit $M(L)$ äquivalente ganz rationale Darstellung von Γ , so ist die Faktorgruppe $S_n(\Gamma)/D_n(\Gamma)$ eine Abelsche Mannigfaltigkeit, wo $S_n(\Gamma)$ den Modul aller Spitzenformen vom Grad $-2n$ und $D_n(\Gamma)$ den Teilmodul derjenigen Spitzenformen bezeichnet, deren Periodenvektoren ganze rationale Realteile besitzen. Im Falle der Modulgruppe und ihrer Untergruppen von endlichem Index ist diese Voraussetzung erfüllt, und die Heckschen Korrespondenzen T_n erweisen sich als Endomorphismen dieser Abelschen Mannigfaltigkeit.
M. Eichler.

Daniljuk, I. I.: Über automorphe quasianalytische Funktionen auf Flächen. Mat. Sbornik, n. Ser. 41 (83), 97—104 (1957) [Russisch].

Es sei R eine zweidimensionale orientierbare Fläche, deren „Nachbarschaftsbeziehungen“ dreimal H -stetig (d. h. im Sinne von Hölder) differenzierbar und mit von Null verschiedener Funktionaldeterminante sind. Man betrachtet ein H -stetig differenzierbares Tensorfeld auf R : α_i^j , und man nennt die Funktion $f = u^1 + iu^2$ quasianalytisch, wenn u^1 und u^2 Lösungen des kovarianten elliptischen Systems von Differentialgleichungen: (1) $\partial u^1/\partial x^i = \alpha_i^j \partial u^2/\partial x^j$ sind. In der Menge nicht-konstanter quasianalytischer Funktionen führt der Verf. eine Norm ein. Die Funktionen endlicher Norm im Gebiete D bilden einen Hilbertschen Raum H_D , und die Konvergenz nach der Norm in H_D zieht die gleichmäßige Konvergenz im Innern von D nach sich. Ist F eine eigentlich diskontinuierliche Transformationsgruppe von R , welche (1) unverändert läßt, so bildet der Verf. automorphe, quasianalytische Funktionen. Angenommen, es liege R auf R' , h sei eine quasianalytische Funktion auf R' , mit endlich vielen Polen, Q_0 wäre von diesen Polen verschieden, T_k sei eine Transformation von F , und

$$H\{T_k(Q)\} = [h\{T_k(Q)\} - h\{T_k(Q_0)\}] y_k^2(Q_0)$$

($p \geq 2$), so ist $\theta(Q) = \sum_{k=0}^{\infty} H\{T_k(Q)\}$ eine in bezug auf F automorphe Form auf R . Automorphe Funktionen bildet man in gewöhnlicher Weise. *C. Andreian Cazacu.*

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Karasik, G. Ja.: Über die Bedingungen für die Existenz einer periodischen Lösung bei Differenzengleichungen. Izvestija vyss. učebl. Zaved., Mat. 4 (11), 70—79 (1959) [Russisch].

Es sei die Differenzengleichung $\Delta x_m = h(X(t_0 + m h, x_m) + f(t_0 + m h))$ vorgelegt ($x(t)$ Lösungsvektor, h Schrittlänge, $x_m = x(t_0 + m h)$). Die rechte Seite sei bez. t_0 periodisch mit der Periode w ; ferner sei $X(t, 0) = 0$. Verf. untersucht Lösungen x , die ebenfalls periodisch mit der Periode w sind ($x_{m+w} = x_m$). Eine derartige

(und zwar asymptotisch stabile) Lösung existiert z. B., wenn die triviale Lösung der homogenen Gleichung ($f = 0$) exponentiell stabil ist und wenn die partiellen Ableitungen $\partial X_i / \partial x_j$ gewisse Lipschitzbedingungen erfüllen. Eine andere Existenzbedingung läßt sich mit Hilfe Ljapunovscher Funktionen für die Gleichung formulieren; sie müssen gewissen Abschätzungen, wie sie aus der Theorie der Differentialgleichungen her bekannt sind, genügen. — Bei den Beweisen wird unter Benutzung der Ergebnisse von Krasovskij [Priklad. Mat. Mech. **19**, 516—530 (1955); **21**, 309—319 (1957)] mit Hilfe der Ljapunovschen Funktionen gezeigt, daß die durch die Lösungen vermittelte Abbildung des Phasenraumes auf sich einen Fixpunkt hat. Diesem entspricht die periodische Lösung. — Abschließend zeigt Verf.: Wenn eine lineare Differentialgleichung eine periodische Lösung hat und wenn die triviale Lösung der homogenen Gleichung exponentiell stabil ist, dann hat eine entsprechende Differenzengleichung bei hinreichend kleiner Schrittlänge eine asymptotisch stabile periodische Lösung.

W. Hahn.

Germaidze, V. E.: Über die asymptotische Stabilität von Systemen mit retardiertem Argument. Uspechi mat. Nauk **14**, Nr. 4 (88), 149—156 (1959) [Russisch].

The author considers systems of the form

$$\dot{x}_i = X_i(t, x_1(t - h_{i1}(t)), \dots, x_n(t - h_{in}(t)))$$

$$+ R_i(t, x_1(t - h_{i1}(t)), \dots, x_n(t - h_{in}(t)), x_1(t - \eta_{i1}(t)), \dots, x_n(t - \eta_{in}(t))),$$

where X_i is continuous and lipschitzian for $\|x\| < H$, $t \geq 0$, $X_i(t, 0) \equiv 0$, and where h_{ij} , η_{ij} are piecewise continuous functions with values in $[0, h]$. Using methods similar to those of the reviewer (this Zbl. **72**, 96), he proves that the trivial solution $x(t) \equiv 0$ is asymptotically stable provided the following conditions hold: every solution of the system

$$\dot{x}_i = X_i(t, x_1(t - h_{i1}(t)), \dots, x_n(t - h_{in}(t)))$$

satisfies for $t \geq t_0$

$$(1) \quad \|x(t_0, x_0(t_0 - \theta), t - \tau)\|_\tau \leq B \|x_0(t_0 - \theta)\|_\theta \exp[-\alpha(t - t_0)],$$

and $|R_i| \leq \varphi(t) \|x(t - \tau)\|_\tau$ where, for some $T > 0$ and some $\gamma > 0$ sufficiently small,

$$(2) \quad \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} \varphi(t) dt \leq \gamma$$

for every $t_0 \geq 0$. Here $\|x(t - \tau)\|_\tau = \sup \{ \|x(t - \tau)\| : \tau \in [0, 2h] \}$. If $h_{ij}(t) \equiv 0$, the assertion remains true when (1) is modified to the usual statement of exponential-asymptotic stability and $|R_i(t, y, z)| \leq \varphi(t) \max \{|y_i|, |z_i|\}$ where $\varphi(t)$ satisfies (2). If $R_i \equiv 0$, the assertion is proved under the assumption that

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} X_i(t, x_1(t - h_{i1}(t)), \dots, x_n(t - h_{in}(t))) \right| \leq \varphi(t) \|y(-\theta)\|_\theta$$

where $\varphi(t)$ satisfies (2) and $y(-\theta)$ is a particular solution, and that for every $\mu \geq 0$, every solution of the system $\dot{x}_i = X_i(\mu, x_1(t - h_{i1}(t)), \dots, x_n(t - h_{in}(t)))$ satisfies (1) with α , B independent of μ .

H. A. Antosiewicz.

Norkin, S. B.: Über die Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit retardiertem Argument. Uspechi mat. Nauk **14**, Nr. 1 (85), 199—206 (1959) [Russisch].

Verf. erweitert die in diesem Zbl. **81**, 307 ausführlich besprochene Untersuchung der Gleichung $y''(x) + N(x)y(x) + M(x)y(x-1(x)) = 0$ hauptsächlich durch genauere Diskussion der Wronskischen Determinante.

W. Haacke.

Bandić, Ivan: Sur une équation différentielle non-linéaire du deuxième ordre. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **14**, 493—497 (1959).

L'équation $y'' + q(y)y'^2 + f(x)y' + g(x)y = 0$ où $g(x) = \exp(-2 \int f(x) dx)$ peut s'intégrer par quadratures: le changement de variable défini par $dx, dt =$

$\exp \int j(x) dx$ la transforme en une équation où ne figure plus la variable indépendante. Cas particulier: équation de Emden pour $\varphi(y) = 0$ et $\varphi(y) = y^n$ où $\psi(y) = -e^y$. *Ch. Blanc.*

Klamkin, Murray S. and Donald J. Newman: On the reducibility of some linear differential operators. *Amer. math. Monthly* **66**, 293—295 (1959).

Verff. zeigen, daß

$$x^n D^{2n} = (x D^2 - (n-1) D)^n, \quad x^{2n} D^n = [x^2 D - (n-1) x]^n$$

ist, und gewinnen damit die bekannten Lösungen der Differentialgleichungen $[x^n D^{2n} - 1] y = 0$, $[x^{2n} D^n - 1] y = 0$ auf direktem Wege. Verallgemeinerungen wie z. B.: $[x^{3n} D^{2n} - 1] y = 0$ werden auf die durch Besselsche Funktionen lösbare Differentialgleichung $x(x D + 1 - n)(x D + 1 - 2n) y = \lambda y$ zurückgeführt.

O. Volk.

Kemp, R. R. D. and Norman Levinson: On $u'' + (1 + \lambda g(x)) u = 0$ for

$$\int_0^\infty |g(x)| dx < \infty. \text{ Proc. Amer. math. Soc. } \mathbf{10}, 82-86 (1959).$$

Soit $u = u(x, \lambda)$ la solution de l'équation $u'' + [1 + \lambda g(x)] u = 0$ (où g est une fonction continue et $\int_0^\infty |g(x)| dx < +\infty$) qui vérifie les conditions $u(0, \lambda) = 0$, $u'(0, \lambda) = 1$. Alors il existe deux fonctions analytiques $r = r(\lambda)$, $\theta = \theta(\lambda)$ telles que $\lim_{x \rightarrow \infty} \{u(x, \lambda) - r(\lambda) \sin [x + \theta(\lambda)]\} = 0$. En répondant à une question de R. Bellman [*Bull. Amer. math. Soc.* **64**, 61 (1958) Research problems], les AA. démontrent que $u = u(x, \lambda)$ est une fonction entière de λ (pour chaque x fixe) et donnent quelques résultats sur les points singuliers de $r = r(\lambda)$ et de $\theta = \theta(\lambda)$.

K. Tatarkiewicz.

Stein, R. P.: A solution of the steady linear heat-flow equation with heat generation and conductivity arbitrary functions of temperature. *J. appl. Mech.* **26**, 685—686 (1959).

Intégration par quadratures de l'équation $d[k(t) dt/dx]/dx + q_0(t) = 0$.

Ch. Blanc.

Dolmatov, K. I.: Das verallgemeinerte Gesetz von Bachmetev. *Doklady Akad. Nauk Uzb. SSR* **1959**, Nr. 5, 8—11 (1959) [Russisch].

In der Arbeit wird die Differentialgleichung

$$ds/dh = (\kappa^2 - j)/i(\kappa^2 - 1) \quad (\kappa, j \text{ sind Funktionen von } h),$$

die mit dem Problem der ungleichförmigen Bewegung von Flüssigkeiten in Kanälen rechteckigen Querschnitts zusammenhängt, mit Hilfe der Transformation $s = h f(\kappa)$ gelöst [$f(\kappa)$ ist dabei eine beliebige Funktion, die der Bedingung $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} h f(\kappa) = -\infty$ genügt und für einen bestimmten Wert $h = h_1$ gleich Null ist]. Die Lösung wird in der Form

$$\frac{h}{h_1} = \exp \left[\int_{x_1}^x \frac{df}{dt} dt \left/ \left[\frac{t-j}{i(t^2-1)} - f(t) \right] \right. \right]$$

dargestellt. Durch eine spezielle Wahl der Funktion $f(\kappa)$ kann man verschiedene Lösungen, z. B. die Lösungen von Bachmetev, von Pavlovskij sowie andere Lösungen finden. Der Ref. hat in der Arbeit mehrere Druckfehler gefunden: in einigen Ausdrücken ist anstatt κ der Buchstabe χ gedruckt.

M. Růžička.

Bittner, R.: On certain axiomatics for the operational calculus. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys.* **7**, 1—9 russ. Zusammenfassung I (1959).

Sei S ein Homomorphismus von einer Gruppe G_1 in eine Gruppe G_2 und $x = a \cdot T f = T f \cdot b$ (mit einem Isomorphismus T) die allgemeine Lösung der Gleichung $Sx = f$. Eine Bedingung $\gamma_L x = a$ ($\gamma_p x = b$), welche x eindeutig festlegt, wird linke (bzw. rechte) „limit condition“ genannt. Verf. betrachtet insbesondere den Fall

abelscher Gruppen mit $G_2 \subset G_1$. $\gamma_L = \gamma_p = \gamma$ ist dann ein Endomorphismus. Für diesen Fall wird ein formaler Operatorenkalkül zur Lösung von Gleichungen der Form

$$A_n S^n x + A_{n-1} S^{n-1} x + \dots + A_0 x = f, \quad S^k x = c_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

entwickelt, wobei die Endomorphismen A_i mit S kommutativ sind. Die Ergebnisse werden u. a. auf Probleme folgender Art angewendet: Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, „harmonische“ Differentialgleichungen $a_n \Delta^n z + a_{n-1} \Delta^{n-1} z + \dots + a_0 z = f(x, y)$ mit konstanten Koeffizienten bei bestimmten Randbedingungen und die Differentialgleichung $x^2 u_{xx} - u_{yy} + x u_x = 0$ bei den Bedingungen $u(1, y) = \varphi(y)$, $u_x(1, y) = \psi(y)$.
J. Schröder.

• Wyler, Oswald: On operator solutions of boundary-value problems. (Sandia Corporation Monograph, SCR 139) Washington: Office of Technical Services, Department of Commerce 1959. 33 p.

Verf. berichtet über klassische Ergebnisse aus der Theorie der regulären Randwertaufgabe für eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

K. Maurin.

• Wyler, Oswald: On the algebra of boundary-value problems. (Sandia Corporation Monograph, SCR 185) Washington: Office of Technical Services, Department of Commerce 1960. 27 p.

Die Abhandlung besteht aus 14 Abschnitten. In §§ 1–9 werden einige klassische Definitionen und Ergebnisse aus der Theorie der lokalkonvexen Räume zusammengestellt. §§ 10–14 sind der Definition und Existenz des sogenannten Greenschen Operators (G. O.) von L gewidmet: Definition: Es sei L eine lineare Abbildung $L: E \supset D(L) \rightarrow R(L) \subset F$, wo E, F lokalkonvex sind. $D(L)$ ist dicht in E , L -abgeschlossen. Die Abbildung $T: E \rightarrow F$ heißt G. O. von L falls 1. $LTL = L$, 2. $R(T) \subset D(L)$, 3. $R(T^*) \subset D(L^*)$ gilt. Wenn außerdem $TLT = T$, dann heißt T eigentlicher G. O. von L . Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für Existenz des G. O. und des eigentlichen G. O. von L gefunden. Falls die Nullräume $N(L)$, $N(L^*)$ endlichdimensional sind, dann übertragen sich viele Resultate der elementaren Theorie der Greenschen Operatoren (vgl. folgendes Referat). Falls E, F Banachräume sind, dann ist für die Existenz von G. O. von L notwendig und hinreichend die Existenz der stetigen Projektionen von E auf $N(L)$ und von F auf $R(L)$.

K. Maurin.

• Wyler, Oswald: Generalized functions of Green for systems of ordinary differential equations. (Sandia Corporation Monograph, SCR 98) Washington: Office of Technical Services, Department of Commerce 1959. 25 p.

Die Abhandlung bringt inhaltlich nichts Neues. Es wird dasselbe Thema wie in der vorstehend referierten Abhandlung behandelt.

K. Maurin.

Charazov, D. F.: Über die gleichmäßige Konvergenz von Reihen nach den Eigenfunktionen gewisser Differentialoperatoren. Soobšćenija Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 24, 257–264 (1960) [Russisch].

In a previous paper (this Zbl. 81, 121) the author considered the equation (1) $F(u) = \lambda G_1(u) + \lambda^2 G_2(u) - f(x)$ where

$$F(u) = \sum_{\nu=0}^n (p_{\nu}(x) u^{(\nu)})^{(\nu)}, \quad G_i(u) = \sum_{\nu=0}^{m_i} (g_{i\nu}(x) u^{(\nu)})^{(\nu)},$$

$m_i < n-1$, $i = 1, 2$, and λ is a complex parameter. The problem (1) on an interval (a, b) with certain boundary conditions has the solution

$$u(x) = - \int_a^b H(x, y) f(y) dy + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \left(\int_a^b f(t) u_k(t) dt \right) u_k(x).$$

The present paper shows the uniform convergence of this expansion.

G. Bergendal.

Kampen, N. G. van: Spectral decomposition of the operator $p^2 - q^2$. *Physica* 24, 545—556 (1958).

The quantum-mechanical operator $p^2 - q^2$ is investigated in the realization $H = -\hbar^2/dx^2 - x^2$ in the Hilbert space $L_2(-\infty, +\infty)$. Although it is well known that H defines a unique self-adjoint operator (both boundaries $\pm\infty$ belonging to the limit point case) having a pure continuous spectrum ranging from $-\infty$ to $+\infty$, with multiplicity 2 [Titchmarsh, *Eigenfunction expansions*, Oxford, 1946], the author here gives a direct proof of this fact and the associated expansion theorem by making use of Fourier and Mellin transforms. The behavior of wave packets under the Schrödinger equation of motion is studied in detail. T. Kato.

Golokvosčus (Golokvoschus), P. B.: Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Periodizität eines Fundamentalsystems von Lösungen gewisser linearer Differentialgleichungssysteme. *Doklady Akad. Nauk BSSR* 3, 287—291 (1959) [Russisch].

The theorems announced here concern 2-dimensional vector equations which were previously considered by Erugin [The method of Lappo-Danilevskij in the theory of linear differential equations, Leningrad 1956; this *Zbl.* 72, 92] and Fedorov [Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat. 3 (4), 217—224 (1958); *Vestnik Leningradsk. Univ.* 8, Nr. 11, 57—65 (1953)]. A typical result is the following. Consider the matrix equation

$$\frac{dX}{dt} = X[U_1\varphi_1(t) + U_2\varphi_2(t)]$$

where φ_1, φ_2 are continuous functions with period 1 and mean value 0 and U_1, U_2 are constant matrices, either

$$U_1 = \begin{pmatrix} a, & 0 \\ c, & a \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} b_1, & 0 \\ 0, & b_2 \end{pmatrix}, \quad \text{or} \quad U_1 = \begin{pmatrix} a + 2cm, & -cm^2 \\ c, & a \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} b, & m^2n \\ n, & b \end{pmatrix}.$$

In the first case, define $\alpha = b_2 - b_1$; in the second, $\alpha = 2mn$. Let

$$I(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k!} \right) \alpha^k, \quad \text{where} \quad a_k = \int_0^1 \varphi_1(t) \left[\int_0^t \varphi_2(s) ds \right]^k dt, \quad k = 0, 1, \dots$$

Then every solution is periodic with period 1 if and only if $I(\alpha) = 0$.

H. A. Antosiewicz.

R.-Salinas, Baltasar: Sulla stabilità delle soluzioni per l'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti periodici. *Rend. Circ. mat. Palermo*, II. Ser. 8, 206—224 (1959).

Verf. gibt für die Differentialgleichung (1) $y'' + p(x)y' + \lambda q(x)y = 0$ mit stetigen mod ω periodischen Koeffizienten einige Stabilitätskriterien. Er geht von der Gleichung $y'' + p(x)y' + \lambda q(x)y = 0$ aus, wobei $y_1(x, \lambda)$ und $y_2(x, \lambda)$ ein Fundamentalsystem mit $y_1(0, \lambda) = 1$, $y_1'(0, \lambda) = 0$, $y_2(0, \lambda) = 0$, $y_2'(0, \lambda) = 1$ ist. Weiter sei

$$A(\lambda) = \frac{1}{2}(y_1(\omega, \lambda) + y_2'(\omega, \lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n A_n \quad \text{und} \quad P(x) = \int_0^x \exp\left(-\int_0^t p(s) ds\right) dx.$$

Verf. leitet neun Kriterien her, wovon hier eines genannt sein möge: Ist $q(x) \geq 0$ und $q(x) \not\equiv 0$,

$$2A_1 = \int_0^\omega \frac{P(\omega) - P(x) + P'(\omega)P(x)}{P'(x)} q(x) dx \leq (1 + P'(\omega)^{\frac{1}{2}})^2,$$

gilt weiter $-P'(\omega)^{\frac{1}{2}} < A_0 - A_1 < A < A_0 = \frac{1}{2}(1 + P'(\omega))$, schließlich noch

$\int_0^\omega p(x) dx \geq 0$, dann ist (1) stabil.

W. Haacke.

McCarthy, P. J.: On the disconjugacy of second-order linear differential equations. *Amer. math. Monthly* 66, 892—894 (1959).

Let I be an interval on the x -axis with endpoints a and b ($a < b$). I is not assumed to be closed and we denote the closure of I by I' . Let $r(x)$ and $p(x)$ be real-valued functions which are continuous over I' , and assume that $r(x) > 0$ there. We consider the self-adjoint second-order differential equation (1) $[r(x)y']' + p(x)y = 0$. This equation is said to be disconjugate on I if and only if no nontrivial solution of (1) vanishes more than once on I . The principal result of the paper is the following one: Let $f(x)$ be a monotone, differentiable function over the interval I' such that $f(a) = 0$ and $f(b) = \pm \pi$. Then the equation (1) is disconjugate on I if there is a function $w(x)$ which is positive and continuously differentiable over I' and for which

$$|w/r + p/w| + |w/r - p/w| + |w'/w| \leq 2|f'|$$

for all x in I , with strict inequality for some x in I if b belongs to I .

M. Greguš.

Krasovskij, N. N.: Über den glatten Schnitt eines dispersiven dynamischen Systems. *Izvestija vyšš. učebn. Zaved., Mat.* **1**, 167—173 (1957) [Russisch].

The author proves that any locally Lipschitzian dispersive dynamical system has a section $v = \text{const.}$, $v \in C_\infty$.

J. L. Massera.

Reissig, R.: Über stabiles Verhalten bei periodischer Erregung. *Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin* **1**, 205—211 (1959).

Let $P(t) = f(t, P_0)$ be a dynamical system, $P_n = f(n\theta, P_0)$, n integer, θ fixed. For the "discontinuous motion" $M(P_0) = \{P_n\}$, J. P. LaSalle (this Zbl. **80**, 73) has defined D -stability as follows: a) there is a $\delta_0 > 0$ such that $P_m Q_0 < \delta_0$ for any m implies $\overline{P_{m+n} Q_n} \rightarrow 0$ when $n \rightarrow \infty$; b) $\{P_n\}$ has a point of accumulation. Condition (i) says: c) given $\varepsilon > 0$ there is a $\delta > 0$ such that $\overline{P_0 Q_0} < \delta$ implies $P_n Q_n < \varepsilon$ for each n ; d) condition c) also applies to some point of accumulation P'_0 of $\{P_n\}$. Then: D -stability plus condition (i) is equivalent to uniform asymptotic stability of the continuous motion $P(t)$. Via the theorem of Malkin-Massera-Kurzweil about the existence of a Ljapunov function it is then possible to apply the methods of LaSalle to the investigation of total stability.

J. L. Massera.

Opial, Zdzisław: La presque-périodicité et les trajectoires sur le tore. *C. r. Acad. Sci., Paris* **250**, 3565—3566 (1960).

Es sei $d\theta/dq = A(q, \theta)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung auf dem Torus T^2 mit stetiger Funktion A und auf T^2 dicht liegenden Trajektorien. Dann kann jedes Integral als Summe einer universellen linearen Funktion und einer fast-periodischen Funktion dargestellt werden. Hierdurch wird eine von A. Denjoy (dies. Zbl. **83**, 313) aufgeworfene Frage beantwortet.

H. Bauer.

Denjoy, Arnaud: Sur les trajectoires du tore. *C. r. Acad. Sci., Paris* **251**, 175—177 (1960).

Ergänzende Bemerkungen (vor allem beweistechnischer Natur) zu dem vorstehend besprochenen Resultat von Z. Opial (und nicht von Z. Orlia, wie es in dieser Note laufend heißt).

H. Bauer.

Miščenko, E. F. und L. S. Pontrjagin: Ableitung einiger asymptotischer Abschätzungen für die Lösungen von Differentialgleichungen mit kleinem Parameter bei den Ableitungen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **23**, 643—660 (1959) [Russisch].

Es wird bewiesen, daß die formale asymptotische Lösung eines Systems von Differentialgleichungen $\varepsilon \dot{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^k; y^1, \dots, y^l)$; $\dot{y}^j = g^j(x^1, \dots, x^k; y^1, \dots, y^l)$, $i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, l$, $\varepsilon > 0$ ein kleiner Parameter, welche früher (dies. Zbl. **78**, 80) abgeleitet wurde, in der Umgebung der Störungspunkte (d. h. der Punkte, wo $\text{Det } \partial f^i / \partial x^k = 0$ ist) die wirkliche Lösung mit der angeführten Genauigkeit approximiert. Die Hauptideen des Beweises wurden schon früher publiziert (E. F. Miščenko und L. S. Pontrjagin, dies. Zbl. **86**, 73).

M. Ráb.

Volosov, V. M.: Oscillation equations with slowly variable parameters. Doklady Akad. Nauk SSSR 121, 22—25 (1958) [Russisch].

Volosov, V. M.: The asymptotic of the integrals of some perturbed systems. Doklady Akad. Nauk. SSSR 121, 959—962 (1958) [Russisch].

Sono studiati in dettaglio alcuni casi particolari di un problema trattato in generale dallo stesso A. in una Nota successiva (v. la recensione seguente). *R. Conti.*

Volosov, V. M.: Solutions of some perturbed systems in the neighbourhood of periodical motions. Doklady Akad. Nauk SSSR 123, 587—590 (1958) [Russisch].

Sia dato il sistema di equazioni differenziali (1) $\dot{x} = F(x)$, dove x, F sono n -vettori ed è $\dot{x} = dx/dt$, ed il corrispondente sistema perturbato (2) $\dot{x} = F(x) + \varepsilon f(x, \varepsilon)$, dove f è anch'esso un n -vettore ed ε è un parametro reale variabile in un intorno di $\varepsilon = 0$. Supponiamo che in una certa regione dello spazio x il sistema (1) abbia soltanto soluzioni periodiche, di periodo $T(c)$, con $c = (c_1, \dots, c_{n-1})$ cost. arbitraria. Tali soluzioni siano rappresentate nella forma (3) $x = x_0(c, \varphi)$, $x_0(c, \varphi + 2k\pi) = x_0(c, \varphi)$, dove $\varphi = \omega(c)t + h$, $\omega(c) = 2\pi/T(c) \geq \text{cost.} > 0$, h costante arbitraria. Si ricerca una rappresentazione approssimata rispetto ad ε , valida in un intervallo $t \sim 1/\varepsilon$, delle soluzioni del sistema (2) nella forma (3) con $c = c(t, \varepsilon)$, $\varphi = \varphi(t, \varepsilon)$ funzioni incognite. Il risultato principale cui si perviene col metodo delle medie di Bogoljubov (questo Zbl. 65, 427) è dato dalla rappresentazione della approssimazione di ordine zero nella forma (4) $\dot{c} = \frac{\varepsilon}{T(c)} \int_0^{T(c)} f_x^0 c dt$

dove f_x^0 è la matrice jacobiana di f rispetto ad x calcolata per $\varepsilon = 0$. La dimostrazione è solo accennata e l'A. afferma che con lo stesso metodo si possono ottenere anche le approssimazioni degli ordini successivi. Vengono quindi esaminati ed interpretati dal punto di vista fisico diversi casi particolari precedentemente studiati dall'A. e da altri. Tra questi ricordiamo i seguenti: i) il sistema (5) $\dot{y} = \Phi(y, \mu) + \varepsilon \varphi(y, \mu, \varepsilon)$, $\dot{\mu} = \varepsilon \psi(y, \mu, \varepsilon)$, con y n -vettore e μ m -vettore è del tipo (2) con $x = (y | \mu)$, $F = (\Phi | 0)$, $f = (\varphi | \psi)$. Nel caso $n = 2$ il sistema (2) è stato considerato in dettaglio dallo stesso A. (v. la recensione precedente) ii) il sistema (6) $\dot{q} = H_p(p, q, \mu) - \varepsilon f'(p, q, \mu, \varepsilon)$, $\dot{p} = -H_q(p, q, \mu) + \varepsilon f''(p, q, \mu, \varepsilon)$, $\dot{\mu} = \varepsilon \varphi(p, q, \mu, \varepsilon)$, dove H è la funzione di Hamilton (scalare), H_p il gradiente di H rispetto a p , H_q quello rispetto a q , è anch'esso caso particolare di (2) con $x = (p | q | \mu)$, $F = (H_p | -H_q | 0)$, $f = (-f' | f'' | \varphi)$. L'A. aveva studiato in precedenza il caso particolare di p e q scalari (loc. cit.) e, ancora più in particolare il caso $H = \frac{p^2}{2m(\mu)} + \int_0^q Q(\mu, z) dz$, $f' \equiv 0$, $f'' = \tilde{f}(q, \frac{p}{m(\mu)}, \mu)$, $\varphi = \tilde{\varphi}(q, \frac{p}{m(\mu)}, \mu)$ (loc. cit.) Indipendentemente il sistema (6) è stato considerato anche da G. S. Makaeva (v. la recensione seguente). *R. Conti.*

Makaeva, G. S.: The asymptotic behaviour of solutions to differential equation involving a small parameter, whose systems of "rapid motions" are nearly Hamiltonian. Doklady Akad. Nauk SSR 121, 973—976 (1958) [Russisch].

Vengono enunciati e dimostrati risultati analoghi a quelli di V. M. Volosov (v. la recensione precedente sistema (6)); tali risultati sono tuttavia troppo complicati per poterli riferire qui. *R. Conti.*

Janssens, Paul: Quelques progrès récents dans l'étude des phénomènes non-linéaires. Mém. Publ. Soc. Sci. Arts Lettr. Hainaut, Volume hors Série, 79—95 (1958).

Verf. gibt einen allgemeinen Überblick über die Herkunft und den gegenwärtigen Stand der Theorie der nichtlinearen Erscheinungen. Im Zusammenhang mit Beispielen aus der Himmelsmechanik, Astrophysik, analytischen Mechanik, Elasto- und Hydromechanik erwähnt er einige Problemstellungen und Untersuchungsmethoden; insbesondere erörtert er verschiedene Typen von nichtlinearen Schwingungen. Dazu wird ein umfangreiches Literaturverzeichnis angeführt. *R. Reißig.*

Četaev, N. G.: Über gewisse Aufgaben zur Stabilität einer Bewegung in der Mechanik. *Trudy tret'ego vsesojuzn. mat. S'esda, Moskva, Ijuń—Ijul' 1956*, 3, 507—512 (1958) [Russisch].

Verf. bringt allgemeine Bemerkungen zu einigen Stabilitätsaufgaben aus der Mechanik. Zuerst untersucht er dynamische Systeme mit nichtholonomen Bindungen und zeigt, welche Schwierigkeiten hier bei der Formulierung der Stabilitätsfrage auftreten. Dann erörtert er die zwar nicht für die Praxis, wohl aber für die analytische Mechanik sehr wichtigen konservativen holonomen Systeme, deren Bewegungsgleichungen in der kanonischen Hamiltonschen Form geschrieben werden können, und bildet die Variationsgleichungen, die eine Invariante besitzen, auf Grund deren ein allgemeiner Satz über die charakteristischen Zahlen und die Reduzibilität der Gleichungen aufgestellt werden kann. Den Zusammenhang zwischen dem Stabilitätscharakter von Gleichgewichtslagen und den Extrema der Kräftefunktion erläutert Verf. am Beispiel des ebenen Dreikörperproblems. Des weiteren behandelt er die Existenz erster Integrale für die Variationsgleichungen gewisser Kreiselbewegungen und widmet sich zum Schluß noch Stabilitätsbetrachtungen bei konservativen holonomen mechanischen Systemen, welche die Analogie zwischen der Dynamik solcher Systeme und der Huygensschen Optik beleuchten.

R. Reiff.

Minorski, Nicolas: *Nouvelles méthodes de la théorie des oscillations*. Conference Sem. Mat. Univ. Bari 25—28, 64 p. (1957).

Im vorliegenden Heft veröffentlicht Verf. vier Abhandlungen über Themen aus der Nichtlinearen Mechanik. 1. Neue Theorie der Schwingungen — Topologische Methoden. Verf. gibt einen historischen Rückblick und erwähnt als typische nichtlineare Erscheinung die Selbsterregung eines dynamischen Systems. Er geht auf die ebenen Phasendiagramme autonomer Systeme näher ein und erörtert wichtige Konfigurationen der Phasentrajektorien. Dazu bringt er einige Sätze der Theorie von Poincaré-Bendixson. Schließlich behandelt er die qualitative Änderung der topologischen Struktur, wenn ein Systemparameter variiert, und spricht über die damit zusammenhängende Verzweigungstheorie. — 2. Analytische Methoden in der Theorie der Schwingungen. Als Gegenstück zu den qualitativen Verfahren erläutert Verf. nun quantitative Methoden, die meist auf Reihenentwicklungen hinauslaufen und bei der numerischen Auswertung Näherungsausdrücke liefern. Er legt die Störungsrechnung dar, weist auf die Methode von Lindstedt zur Elimination der säkularen Glieder in den sukzessiven Approximationen hin und bringt den Satz von Poincaré über die Entwicklung der Lösungen von Differentialgleichungen nach einem Parameter. Dieser wird nach dem bekannten Verfahren von Poincaré auf die Bestimmung periodischer Lösungen angewandt. Schließlich widmet sich Verf. noch kurz der Methode der harmonischen Balance von Krylov-Bogoljubov. — 3. Die stroboskopische Methode. Verf. geht davon aus, daß sich die Hauptschwierigkeit der analytischen Methoden in der Frage der Stabilität nicht-autonomer Systeme zeigt. Zu diesem Zweck hat Verf. ein Verfahren entwickelt, nach dem man ein nicht-autonomes System durch ein autonomes Hilffssystem ersetzt; er nennt es stroboskopische Methode. Um diese zu erklären, führt man eine Transformation der Phasenebene durch: Jedem Punkt ordnet man auf der von ihm zur Anfangszeit ausgehenden Lösungskurve den nach einer bestimmten Zeitspanne (etwa der Erregerperiode) erreichten Punkt als Bildpunkt zu. Man betrachtet die Abbildung, ihre Iterierten und insbesondere die Fixpunkte. Des weiteren beschränkt man sich auf ein quasiharmonisches System und stellt für dieses näherungsweise die Gleichung der Transformation auf. Dabei bevorzugt man Polarkoordinaten. Die Differenzenquotienten, gebildet aus den Koordinatendifferenzen zwischen Objekt- und Bildpunkten sowie der stroboskopischen Zeit, ersetzt man durch Differentialquotienten und erhält dadurch die stroboskopischen Differentialgleichungen. Diese sind autonom und gestatten ein einfaches Studium mannigfaltiger Probleme, z. B. der Stabilitätsfrage.

— 4. Relaxationsschwingungen. Verf. erörtert an Hand von Beispielen die physikalische und mathematische Seite der Existenz von Relaxationsschwingungen.

R. Reißig.

Mitropol'skij, Ju. A.: Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen. Trudy tret'ego vsesojuzn. mat. S'ezda, Moskva, Ijuń—Ijul' 1956, 3, 531—542 (1958) [Russisch].

Verf. gibt einen allgemeinen Überblick über den Stand und die Reichweite der asymptotischen Methoden in der nichtlinearen Mechanik und beruft sich dabei auf eine Anzahl sowjetischer Arbeiten aus der neueren Zeit. Er geht von den quasilinearen Systemen aus, die seit langem in der Störungstheorie der Himmelsmechanik eine Rolle spielen, und erwähnt, daß der für solche Probleme entwickelte mathematische Apparat infolge der durch das Auftreten der sogenannten säkularen Glieder bedingten Schwierigkeit nicht ohne weiteres auf die Untersuchung nichtlinearer Schwingungen angewandt werden kann. Die Grundidee der für diese ausgearbeiteten Methoden (z. B. von Krylov-Bogoljubov) erläutert Verf. am Beispiel der Differentialgleichung $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = \varepsilon f(x, dx/dt, \varepsilon)$, bei der man die Lösung des linearen Falles ($\varepsilon = 0$) zum Vorbild nimmt, um für $\varepsilon \neq 0$ eine Lösung von gleicher Bauart, aber mit veränderlicher Amplitude und Frequenz zu konstruieren. Es wird darauf hingewiesen, daß die hierbei entstehende m -te Näherung mit einem Fehler $\varepsilon^{m+1} t$ behaftet ist, während sich bei der Entwicklung der Lösung nach Potenzen von εt im Sinne der üblichen Störungsrechnung ein Fehler der Ordnung $\varepsilon^{m+1} t^{m+1}$ ergibt. Verf. erwähnt ferner das Durchschnittsprinzip, nach dem bei einem Differentialgleichungssystem 1. Ordnung die zeitabhängigen rechten Seiten, die einem kleinen Parameter proportional sind, durch ihre zeitlichen Mittelwerte ersetzt werden, sowie daran anknüpfende Verfahren für verschiedene Aufstellungen. Dann streift er in zwangloser Reihenfolge nichtlineare Probleme und ihre Verallgemeinerungen, skizziert die zur Lösung vorgeschlagenen Methoden und berichtet über Anwendungsbeispiele.

R. Reißig.

Iglisch, Rudolf: Über den Begriff der Resonanz bei linearen und nichtlinearen Schwingungen. Mém. Publ. Soc. Sci. Arts Lettr. Hainaut, Volume hors Série, 207—210 (1958).

Verf. bringt in seinem Vortragsauszug einige Bemerkungen, die er an anderer Stelle ausführlicher darlegen will, über den Resonanzbegriff bei gewissen nichtlinearen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Er geht davon aus, daß im linearen Fall $y'' + \lambda^2 y = f(t)$; $f(t + P) = f(t)$ Resonanz vorliegt, wenn $P = 2n\pi/\lambda$ und

(*) $\int_0^P f(t) \eta(t) dt \neq 0$ für eine Lösung $\eta(t)$ der zugehörigen homogenen Differential-

gleichung. Hat diese einen periodischen Koeffizienten [$y'' + g(t)y = 0$; $g(t + P) = g(t)$], so können ebenfalls periodische Lösungen $\eta(t)$ mit der Periode P auftreten. Wenn für eine von ihnen die Bedingung (*) erfüllt ist, kann man zeigen, daß jede Lösung der inhomogenen Gleichung künftig unbeschränkt ist. Verf. gelangt dann zu dem nichtlinearen Fall $y'' + g(y, t) = f(t)$; $g(y, t + P) = g(y, t)$, $f(t + P) = f(t)$, wo eine mit P periodische Lösung $y(t)$ existieren soll. Er ändert die rechte Seite der Gleichung in $f(t) + \beta F(t)$; $F(t + P) = F(t)$ ab, studiert also den Einfluß der Dauerstörung $\beta F(t)$. Hierzu werden die gestörten Lösungen $y(t) + u(t)$ herangezogen, bei denen Verf. zeigen kann, daß es unter gewissen Bedingungen eine positive Konstante D gibt, mit der die Ungleichung $|u(t)| < D\sqrt{|\beta|}$ nicht ständig erfüllt ist. Die Bedingungen bestehen darin, daß die Gleichung $\eta'' + [\partial g(y(t), t)/\partial y] \eta = 0$

eine mit P periodische Lösung besitzt, für die $\int_0^P F(t) \eta(t) dt \neq 0$ wird.

R. Reißig.

Gutowski, Roman: Free vibration of a system of one degree of freedom with non-linear elastic characteristic, taking into consideration linear viscose damping. Arch. Mech. stosow. 9, 647—668 (1958).

Verf. untersucht die Bewegungsdifferentialgleichung eines freien einfachen Schwingers, auf den eine nichtlineare Rückstellkraft und eine lineare Dämpfungskraft wirken: $x'' + 2hx' + \alpha^2\varphi(x) = 0$. Die Funktion $\varphi(x)$ soll monoton wachsen und analytisch sein; ferner wird $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ vorausgesetzt. Verf. nennt die Charakteristik $\varphi(x)$ absolut hart oder weich, wenn $x - \varphi(x) \leq 0$ bzw. ≥ 0 für alle x , und hart oder weich für fast alle x , wenn diese Ungleichung nur für genügend große x -Beträge gilt. Er befaßt sich zuerst mit dem oszillatorischen Verhalten der Lösungen $x(t)$ und leitet hierfür die Bedingungen ab: $h/\alpha < 1$ bzw. $(h/\alpha)^2 < \varphi'(0)$, wenn die Charakteristik $\varphi(x)$ absolut hart bzw. hart für fast alle x ist. Dabei sind die Anfangsbedingungen der Lösungen beliebig. Bei weicher Charakteristik sind die Lösungen oszillatorisch, wenn $\varphi'(x) \geq \beta = (h/\alpha)^2$ für alle x . Aus dem oszillatorischen Verhalten der Lösungen folgt unmittelbar das Gleiche für deren Ableitungen; ferner ist es selbstverständlich, daß die sukzessiven Extremwerte alternierendes Vorzeichen haben. Verf. begründet aber diese Tatsachen durch ausführliche Rechnung. Danach schätzt er den Abstand zweier Nullstellen nach oben ab und betrachtet eingehend das Phasenbild in der xx' -Ebene. Zum Schluß leitet er aus der Differentialgleichung äquivalenten Integralgleichung eine Interpolationsformel zur angenäherten Bestimmung einer Lösung her; die zugrundegelegte Annahme besteht darin, daß sich die zweite Ableitung der Lösung x'' im Interpolationsintervall linear ändert. Es werden noch allgemeinere Gleichungssysteme angegeben, bei denen man das Verfahren anwenden kann. Numerische Rechnungen und Vergleiche mit exakten Lösungen fehlen.

R. Reißig.

Caughey, T. K.: Response of Van der Pol's oscillator to random excitation. Appl. Mech. 26, 345—348 (1959).

Verf. behandelt die Gleichung eines Van-der-Polschen Oszillators, auf den eine schwache Zufallsstörung in Form von weißem Rauschen wirkt:

$$\frac{d^2V}{dt^2} - (\alpha - r) \frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V + \gamma \frac{d}{dt}(V^3) = N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_N(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Die Spektraldichte soll eine Normalverteilung sein. Die Lösung wird in der Form $V(t) = V_p(t) + V_N(t)$ angesetzt, wobei $V_p(t) = A \sin \omega_0 t$ der periodische Anteil und $V_N(t)$ die stochastische Komponente darstellt. Verf. untersucht zunächst die Spektraldichtefunktion des Termes $(V_p(t) + V_N(t))^3$ und findet, daß diese so beschaffen ist, als ob die beiden Anteile V_p und V_N die Lösungen der beiden folgenden linearen Gleichungen wären:

$$\frac{d^2V_p}{dt^2} - \{\alpha - r - 3\gamma(\psi_0 + \tfrac{1}{4}A^2)\} \frac{dV_p}{dt} + \omega_0^2 V_p = 0,$$

$$\frac{d^2V_N}{dt^2} - \{\alpha - r - 3\gamma(\psi_0 + \tfrac{1}{2}A^2)\} \frac{dV_N}{dt} + \omega_0^2 V_N = N(t).$$

Dabei ist $\psi_\tau = \psi(\tau)$ die Korrelationsfunktion von $V_N(t)$,

$$\psi_\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T V_N(t) V_N(t + \tau) dt.$$

Zwei stabile Lösungen $V_p(t)$ sind möglich: $V_p = A \sin \omega_0 t$ für $\alpha - r - 3\gamma(\psi_0 + \frac{1}{4}A^2) = 0$, so daß $A^2 = A_0^2 - 4\psi_0$ (A_0 die Schwingungsamplitude in Abwesenheit von Zufallsstörungen), oder $V_p = 0$, falls $\alpha - r - 3\gamma\psi_0 < 0$. Aus der Gleichung für V_N berechnet Verf. den Mittelwert des Quadrates dieser Komponente ψ_0 und deren Spektraldichtefunktion sowie die sog. Bandbreite. Die Resultate der Untersuchungen sind die folgenden: Die Amplitude A der Selbstschwingung nimmt ab, wenn die Intensität des Rauschens zunimmt. Das Spektrum der stochastischen Komponente

V_N verteilt sich beiderseits der Frequenz der Selbstschwingung ω_0 , die Bandbreite nimmt mit der Schwingungsamplitude zu. Das mittlere Amplitudenquadrat der stochastischen Komponente ist proportional der Störintensität und umgekehrt proportional dem Quadrat der Schwingungsamplitude.

R. Reißig.

Barbălat, I.: Systèmes d'équations différentielles d'oscillations non linéaires. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 4, 267—270 (1959).

Verf. verallgemeinert bekannte Sätze über das asymptotische Verhalten der Lösungen einer nichtlinearen Differentialgleichung 2. Ordnung auf den Fall eines Systems von n simultanen Gleichungen 2. Ordnung, das in Vektorform geschrieben wird: $x'' + H(x)x' + A x = e(t)$. Hierbei ist A eine positiv-definite konstante (n, n) -Matrix, $e(t)$ ein im Intervall $t \geq 0$ definierter und stetiger n -Vektor, $u(x)$ eine über R^n zweimal stetig differenzierbare skalare Funktion und $H(x)$ die zugehörige Matrix $(\partial^2 u / \partial x_i \partial x_k)$. Es wird der Satz bewiesen: Alle Lösungen $x(t)$ sind für $t \geq 0$ definiert mit beschränkter Norm $\|x(t)\|$, wenn $H(x)$ über R^n positiv-semidefinit ist, $A H(x) = H(x) A$ gilt und eine für $t \geq 0$ definierte Lösung $\varphi(t)$ mit beschränkter Norm $\|\varphi(t)\|$ existiert. Ist zudem $\|\varphi'(t)\|$ beschränkt, so trifft das auch für $\|x'(t)\|$ zu. Zum Beweis setzt Verf. (wie üblich) in dem äquivalenten System 2 n -ter Ordnung $x' = -f(x) + y$, $y' = -A x + e(t)$ ($f(x) = [\text{grad } u]_{x=0}$) $x = \varphi(t) + \xi$, $y = \psi(t) + \eta$ [$\psi(t) = \varphi'(t) + f(\varphi(t))$] und bildet die Ljapunovsche Funktion $V(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(A \xi, \xi) + \frac{1}{2}(\eta, \eta)$. Für sie berechnet er die totale zeitliche Ableitung

$$V' = - \int_0^1 (A H(\varphi + \lambda \xi) \xi, \xi) d\lambda \leq 0. \quad \text{Daraus ergibt sich aber die Behauptung.}$$

Es wird noch ein weiterer Satz aufgestellt, bei dem die Voraussetzung über die Matrix $H(x)$ verschärft wird; diese soll jetzt über R^n positiv-definit sein, eine Anzahl isolierter Punkte möglicherweise ausgenommen. Dann werden die Beziehungen $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x'(t) - \varphi'(t)\| = 0$ behauptet. Zum Beweis verwendet

Verf. wieder die Ljapunovsche Funktion V in Verbindung mit folgendem Hilfssatz: Wenn die Funktion $g(t)$ für $t \geq t_0$ eine gleichmäßig stetige Ableitung $g'(t)$ und für $t \rightarrow \infty$ einen (endlichen) Grenzwert besitzt, dann muß $\lim_{t \rightarrow \infty} g'(t) = 0$

sein.

R. Reißig.

Opial, Z.: Sur une équation différentielle non linéaire du second ordre. Ann. Polon. math. 8, 65—69 (1960).

The equation under discussion is $x'' + \varphi(x, x')x' + h(x) = e(t)$ where φ, h, e are continuous, $x h(x) > 0$ for $x \neq 0$, and $\int_0^\infty |e(t)| dt < \infty$. Using arguments similar to those the reviewer used to prove the boundedness of every solution (this Zbl. 64, 84), the author shows that for every solution $x(t) \rightarrow 0$, $x'(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ provided the following assumptions hold: There exists a continuous function $g(x)$

such that $\varphi(x, u) - g(x)u$ is positive definite, $a(x) = \exp\left(\int_0^x g(u) du\right) \leq A < \infty$,

and $\int_0^x a^2(u)h(u)du \rightarrow \infty$ with $|x| \rightarrow \infty$. If $\varphi(x, x') = f(x) + g(x)x'$ then, in addition,

$x \int_0^x a(u)f(u)du > 0$ for $x \neq 0$ is required.

H. A. Antosiewicz.

Ezeilo, J. O. C.: On the stability of solutions of certain differential equations of the third order. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 11, 64—69 (1960).

Man betrachtet Differentialgleichungen dritter Ordnung von der Form: $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) + h(x) = 0$ und gibt ein Kriterium für die Stabilität der Lösungen an. Man setzt voraus, daß die Funktionen f, g, h , reell und stetig sind und $g(0) = 0$ und $h(0) = 0$, sowie $\partial f / \partial x$, $\partial h / \partial x$ existieren und stetig sind. Außerdem

eien folgende Bedingungen I erfüllt: $f(x, y) \geq \delta_0 > 0$ für alle x und y ; $g(y)/y \geq \delta_1 > 0$ für $y \neq 0$, $h(x)/x \geq \delta_2 > 0$ für $x \neq 0$; $h'(x) \leq c$ für alle x und $\delta_0 \delta_1 > c > 0$; $\partial f / \partial x \leq 0$ für alle x und y . Unter diesen Voraussetzungen beweist man, daß jede Lösung der Differentialgleichung die Bedingung: $x(t) \rightarrow 0$, $\dot{x}(t) \rightarrow 0$, $\ddot{x}(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow +\infty$ erfüllt. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung von Sätzen von Barbasin und Simanov, und die Bedingungen I kann man in die Bedingungen von Routh überführen, wenn die Differentialgleichung linear ist. Der Satz wird mit Hilfe der Ljapunov-Funktion bewiesen. Die Ljapunov-Funktion ist in folgender Form dargestellt:

$$2V = 2H(x) + \alpha \{2G(y) + z^2\} + 2\alpha y h(x) + 2 \int_0^y \eta f(x, \eta) d\eta + 2yz,$$

wo $G(y) = \int_0^y g(\eta) d\eta$, $H(x) = \int_0^x h(\xi) d\xi$, und $\frac{\delta_1}{c} > \alpha > \frac{1}{\delta_0}$. Die Bedingung für $h'(x)$

in I kann durch eine schwächere ersetzt werden, das heißt, $h'(x)$ darf in einigen Punkten $x_i (\neq 0)$, $i = 1, \dots, n$, in denen die linke und die rechte Ableitung $h'(x_i - 0)$, $h'(x_i + 0)$ existiert, unstetig sein.

W. Bogusz.

● Gille, J. C., M. Pelegrin und P. Decaulne: **Lehrgang der Regelungstechnik. Band I: Theorie der Regelungen.** München: R. Oldenbourg; Berlin: Verlag Technik 1960. XXII, 447 S. DM 69,—.

Der vorliegende 1. Band des aus insgesamt 3 Bänden bestehenden Werkes gibt eine umfassende Einführung in die Theorie der Regelsysteme und der erforderlichen mathematischen Methoden. Für den Ingenieur geschrieben, werden lediglich die komplexe Rechnung, die Differentialgleichung und die Partialbruchzerlegung rationaler Brüche vorausgesetzt. Die bei fortschreitendem Studium des Stoffes notwendigen mathematischen Verfahren — Fourier- und Laplacetransformation, Matrizen, konforme Abbildung, die Methoden der Statistik und der Informationstheorie, die z -Transformation — werden von Fall zu Fall entwickelt. Den drei Verff., Fachleuten von internationalem Ruf, ist es gelungen, in klarer und didaktisch wohlüberlegter Form den Studierenden der Regelungstechnik mit nahezu allen Problemstellungen seines Arbeitsgebietes vertraut zu machen und ihm damit die Benutzung einer weit verstreuten Fachliteratur zu ersparen. — Im 1. Abschnitt wird die Dynamik der linearen Systeme vom Ansatz der Gleichungen über die Berechnung der Einschwingvorgänge, der Ortskurve der Übertragungsfunktion, Pole und Nullstellen, Stabilitätskriterien bis zur statistischen Betrachtungsweise und der Informationstheorie behandelt. Es folgt die Anwendung der allgemeinen Theorie auf lineare Regelungen: Die Übertragungsfunktion des offenen und geschlossenen Regelkreises, stationärer Zustand, das Wurzelortverfahren, die praktische Anwendung der gebräuchlichsten Stabilitätskriterien, die Kenngrößen für die Regelgüte, Kompensationsverfahren, Impulssysteme. Bei der im 3. Abschnitt behandelten Theorie der nichtlinearen Regelungen beschränken sich die Verff. bewußt auf die Verfahren der Phasenebene und das Näherungsverfahren mit Hilfe der Grundschwingung. Trotzdem wird mit einer Fülle von Einzelheiten ein guter Überblick über die nichtlinearen Problemstellungen erreicht. Im Anhang sind großformatige Faltblätter des Amplituden- und Phasenverlaufes für Systeme 1. und 2. Ordnung in logarithmischer Darstellung sowie des Nichols-Diagrammes enthalten. — Als zusammenfassendes Lehrbuch der Regelungstechnik dürfte dieses Buch für Studierende und Dozenten gleichermaßen geeignet sein.

H. Schließmann.

Magnus, Kurt: **Über einige neuere Ergebnisse der Regelungstheorie und ihre Bedeutung für die Lageregelungen von Flugzeugen.** Jahrbuch 1957 wiss. Ges. Luftfahrt 350—358 (1958).

Verf. betrachtet das Problem der Kursregelung eines Flugzeuges und betont, daß Fragen der dynamischen Stabilität sehr aktuell geworden sind, da sich die Ver-

größerung von Fluggeschwindigkeit, Flughöhe und Flächenbelastung auf die Dämpfungseigenschaften eines Flugzeugs ungünstig auswirken kann. Die Beschränkung auf die Untersuchung der Stabilität im kleinen wird daher als nicht mehr zulässig angesehen, und es wird empfohlen, zur Beurteilung der Sicherheit auch das Verhalten im großen zu studieren. Verf. erörtert nun an Hand sehr einprägsamer Übersichtsdiagramme das asymptotische Verhalten linearer und gewisser nichtlinearer Systeme und veranschaulicht insbesondere die Änderung des Verhaltens bei Parameterschwankungen, die eine Überschreitung der Stabilitätsgrenze zur Folge haben; in Zusammenhang damit werden die Begriffe der gefährlichen und ungefährlichen Grenzschnitte (bei denen die Überschreitung irreversibel bzw. reversibel ist) erläutert. Verf. wendet sich dann speziell technischen Fragen zu, die die Einführung von nichtlinearen Gliedern in die Regelanordnungen betreffen, und erwähnt schließlich Verfahren zur mathematischen Behandlung von nichtlinearen Differentialgleichungssystemen, auf die die Regelungsprobleme führen: Das Näherungsverfahren nach Ritz-Galerkin und die direkte Methode von Ljapunov.

R. Reißig.

Cremer, H. und F. Kolberg: Zur Stabilitätsprüfung mittels der Frequenzgänge von Regler und Regelstrecke. Regelungstechnik 8, 190—194 (1960).

In der Arbeit wird ein notwendiges und hinreichendes Stabilitätskriterium mittels der Ortskurven von Regler und Regelstrecke hergeleitet, sowohl für den Fall, daß Regler oder Regelstrecke für sich instabil sind, als auch für den Fall, daß Regler und Regelstrecke für sich stabil sind. Es sei $Q(\lambda) + R(\lambda) = 0$ die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises und $Q(\lambda) = 0$ die charakteristische Gleichung des aufgeschnittenen Kreises. Das Kriterium wird aus dem bekannten Theorem hergeleitet: Sei P_q die Anzahl derjenigen Nullstellen der charakteristischen Gleichung $Q(\lambda) = 0$, welche positive Realteile besitzen; dann ist für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises notwendig und hinreichend, daß die zum Frequenzgang $F_0(i\omega) = -R(i\omega)/Q(i\omega)$ gehörige Ortskurve den kritischen Punkt $P_k = (1, 0)$ derart umläuft, daß der Umlaufwinkel gleich $P_q \cdot \pi$ ist (entgegen dem Uhrzeigersinn). Diesem Satz wird in der Arbeit eine andere Fassung gegeben. Es sei $F_0(i\omega) = A(\omega) e^{i\Phi(\omega)}$, wo $A(\omega) = |F_0(i\omega)|$ und $\Phi(\omega) = \arg F_0(i\omega)$ ist. Nun sei $\omega_\mu \geq 0$ eine Frequenz, bei der ein Übergang der Ortskurve von $F_0(i\omega)$ auf dem offenen Intervall $(1, \infty)$ der reellen Achse von der unteren in die obere Halbebene stattfindet. Dort muß das Argument $\Phi(\omega)$ wachsen, d. h. in einer Umgebung von ω_μ muß $d\Phi/d\omega > 0$ sein. Ist dagegen ω_μ eine Frequenz, bei der die Ortskurve von $F_0(i\omega)$ das offene Intervall $(1, \infty)$ der reellen Achse von der oberen in die untere Halbebene überschreitet, so muß $d\Phi/d\omega < 0$ in einer Umgebung von ω_μ sein. Der vorige Satz ist so formuliert. Satz 1. Es seien P_q die Anzahl der Wurzeln der charakteristischen Gleichung des aufgeschnittenen Regelkreises $Q(\lambda) = 0$, welche positive Realteile besitzen. Ferner seien $0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_r \leq \infty$ die Frequenzen, bei denen $\Im F(i\omega_\nu) = 0$ und $\Re F(i\omega_\nu) > 1$, $\nu = 1, \dots, r$, gilt. Mit M bzw. N werde die Anzahl derjenigen dieser ω_ν bezeichnet, in deren Umgebung $d\Phi/d\omega > 0$ bzw. < 0 gilt. Ist $\omega_1 = 0$ oder $\omega_r = \infty$, so sind ω_1 bzw. ω_r bei der Bildung der Zahlen M bzw. N nicht als 1, sondern als $\frac{1}{2}$ zu zählen. Für die Stabilität des geschlossenen Systems ist dann notwendig und hinreichend, daß $M - N = \frac{1}{2} P_q$ gilt. Aus dem Satz 1 folgt Satz 2, welcher die Stabilitätsprüfung liefert. Man betrachtet einen Regelkreis, bei dem sich der Frequenzgang des aufgeschnittenen Regelkreises nach der Formel

$$F_0(p) = -F_S(p) \cdot F_R(p) = -[R_S(p)/Q_S(p)] \cdot [R_R(p)/Q_R(p)]$$

aus den Frequenzgängen von Strecke und Regler zusammensetzt, und man setzt

$$\Phi_S^{-1}(\omega) = \arg \left\{ -\frac{1}{F_S(i\omega)} \right\} = \arg \left\{ -\frac{Q_S(i\omega)}{R_S(i\omega)} \right\}, \quad \Phi_R(\omega) = \arg \{F_R(i\omega)\} = \arg \left\{ \frac{R_R(i\omega)}{Q_R(i\omega)} \right\}$$

ein. So wie in Satz 1 ist M (bzw. N) die Anzahl derjenigen ω_r , in deren Umgebung $d\Phi_R d\omega > (bzw. <) d\Phi_S^{-1}/d\omega$ gilt. Für die Stabilität des geschlossenen Systems ist, so wie in Satz 1, notwendig und hinreichend, daß $M - N = \frac{1}{2} P_q$ gilt, wo P_q die Anzahl der Wurzeln der charakteristischen Gleichung des aufgeschnittenen Regelkreises $Q_S(\lambda) \cdot Q_R(\lambda) = 0$ ist, welche positive Realteile besitzen. In den beiden anderen Sätzen, d. h. in dem Satz 3 und 4 werden spezielle Fälle betrachtet. Die Anwendung dieser Sätze wird an einfachen Beispielen erläutert.

W. Bogusz.

Krasovskij, N. N.: Über die beste Regelung in nichtlinearen Systemen. Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat. 5 (12), 122—130 (1959) [Russisch].

Man betrachtet das Regelsystem, das durch das System von Differentialgleichungen (1) $\dot{x} = f(x, t) + B \cdot u$ beschrieben wird. In diesen Differentialgleichungen ist x ein Vektor in dem n -Phasenraum, $f(x, t)$ ist eine nichtlineare, stetige Vektorfunktion, welche stetige partielle Ableitungen nach allen Veränderlichen bis zur zweiten Ordnung besitzt, B ist eine nicht singuläre $n \times n$ Matrix mit konstanten Koeffizienten, und u ist die Regelvektorfunktion. Das Problem ist, die optimale Regelfunktion u^0 , die optimale Integralkurve x und die optimale Zeit T^0 , in welcher die optimale Integralkurve x aus dem Punkte $x = x^0$ in den Punkt $x = 0$ übergeht, zu bestimmen. In der Arbeit wird eine Methode zur Lösung dieses Problems beschrieben. Die Methode erlaubt es, die Schwierigkeiten bei der Lösung der Grenzprobleme zu umgehen. Es wird ein Parameter ϑ für die Differentialgleichungen eingeführt, und die Abhängigkeit der optimalen Lösungen von dem Parameter ϑ wird durch die Systeme von Differentialgleichungen beschrieben. Diese Differentialgleichungen sind sehr kompliziert, und sie können nur mit algebraischen Methoden integriert werden. Zusammen mit der Differentialgleichung (1) wird die Differentialgleichung (2) $\dot{x} = \vartheta f(x, t) + B \cdot u$ betrachtet, wo für den Parameter $0 \leq \vartheta \leq 1$ gilt. Aus Gleichung (2) wird folgende Differentialgleichung der Variationen aufgestellt: (3) $d\delta x/dt = \vartheta P(t, \vartheta) \delta x + B \cdot u$, wo die Elemente der Matrix $P(t, \vartheta)$ durch die Formel $P_{ij}(t, \vartheta) = \partial f_i / \partial x_j$ längs der optimalen Integralkurve x beschrieben werden. Wird die fundamentale Matrix der Lösungen der Differentialgleichung mit $F(t, \vartheta)$ bezeichnet und ist $H(t, \vartheta) = F^{-1}(t, \vartheta) \cdot B$, so ist die Differentialgleichung $dH^*/dt = -\vartheta B^* \cdot P^*(t, \vartheta) (B^*)^{-1} \cdot H^*$ erfüllt. (Mit dem Zeichen $*$ ist die transponierte Matrix bezeichnet.) Die optimale Regelfunktion u^0 wird durch die Formel (5) $u_j^0(t, \vartheta) = v_j(t, \vartheta, \lambda_j^0) / \|v(t, \vartheta, \lambda_j^0)\|$ dargestellt. Die Funktionen v_j in der Formel (5) sind Lösungen der Differentialgleichung (4), und die Zahlen λ_j^0 ($j = 1, \dots, n$) sind durch die Bedingung, daß die optimale Integralkurve in der optimalen Zeit T^0 aus dem x^0 Punkte zu $x = 0$ übergeht, bestimmt. Die Bestimmung dieser Zahlen λ_j^0 begegnet ersten Schwierigkeiten. In der Arbeit werden drei Systeme von Differentialgleichungen für die Ableitungen von λ_j^0 , c_j^0 , und T^0 nach dem Parameter ϑ aufgestellt, und diese Differentialgleichungen und die Bedingung $\sum \lambda_j c_{j0} = 1$ erlauben es, die optimale Integralkurve für $\vartheta = 1$ zu bestimmen. Ist das Problem linear, so sind diese Differentialgleichungen einfach zu integrieren. W. Bogusz.

Filippov, A. F.: Über einige Fragen der Theorie der optimalen Regelung. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. (Chim. 14, Nr. 2, 25—32 (1959) [Russisch].

Verf. betrachtet die Vektor-Differentialgleichung $x' = f(t, x, u)$, wobei x und f n -dimensionale Vektoren sind und $u = u(t)$ einen r -dimensionalen Steuerungsvektor darstellt, der bei beliebigen Variablen t und x Werte aus einer vorgegebenen Menge $Q(t, x)$ annehmen kann. Die Aufgabe der optimalen Steuerung besteht darin, zu vorgeschriebenen Punkten x_1 und x_2 eine solche Funktion $u(t) \in Q(t, x(t))$ zu finden, die die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $x(0) = x_1$ in möglichst kurzer Zeit in den Punkt x_2 überführt. Zunächst beweist Verf. einen

allgemeinen Satz über die Existenz einer optimalen Steuerung $u(t) \in Q(t, x(t))$, die eine meßbare Funktion ist, und bemerkt dann, daß sich diese in realen physikalischen Systemen nicht nachbilden läßt, wenn sie nicht wenigstens stückweise stetig ist. Man kann sie aber im Mittel durch eine stetige Funktion hinreichend genau annähern, so daß nach der minimalen Einstellzeit ein Punkt aus einer beliebig engen Umgebung von x_2 erreicht wird. Eine stückweise stetige Steuerungsfunktion $u(t)$ wird bei dem System $x' = f(t, x, u) = f_0(t, x) + B(t)u(t)$ nachgewiesen, wo $B(t)$ eine stetige (n, r) -Matrix ist und für die Beträge u_j der Komponenten von u die Schranke 1 vorgeschrieben wird. Der Beweis stützt sich auf das Maximum-Prinzip $f(t, x, u) \cdot \psi(t) = \text{Max.}$, $\partial \psi / \partial t = -(\psi_{ik}) \psi$, $\psi_{ik} = \partial f_k / \partial x_i$, aus dem im vorliegenden Spezialfall $u_j(t) = \text{sgn} [b_j(t) \cdot \psi(t)]$; $j = 1, \dots, r$; $b_j = (b_{1j}, \dots, b_{nj})$ folgt. Verf. betrachtet auch noch Bedingungen für eine stetige Steuerfunktion und verallgemeinert dann die Aufgabe insofern, als der Übergang aus einer Menge in eine andere während einer möglichst kurzen Zeitspanne verlangt wird. Schließlich bringt er ein Beispiel, bei dem eine Bedingung des eingangs bewiesenen Satzes nicht erfüllt und eine optimale Steuerung infolgedessen ausgeschlossen ist. *R. Reißig.*

Herschel, R.: Über die Grenzen' des quadratischen Optimums. Regelungstechnik 5, 469—472 (1957).

Verf. nimmt an, das quadratische Optimum werde zur Festlegung der Güte eines Regelungssystems verwendet, und behandelt die Frage: Wie kann ein Regelungsprozeß bestenfalls aussehen, wenn eine solche Optimierungsforderung erfüllt ist? Dazu erörtert er einige Ergebnisse sowjetischer Mathematiker. Um der Bedingung

$I = \int_0^\infty x^2(t) dt = \text{Min.}$ zu genügen, wird die Cosinus-Fouriertransformierte von $x(t)$

eingeführt, $\xi(\omega) = \int_0^\infty x(t) \cos \omega t dt$ [$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \xi(\omega) \cos \omega t d\omega$]; dabei erhält

man $I = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \xi^2(\omega) d\omega$. Erstreckt sich der Durchlaßbereich des Systems nur bis zu einer Frequenz ω_0 , so kann man die obere Grenze des Integrals durch ω_0 ersetzen, und man rechnet nun näherungsweise auf Grund der Trapezformel

$$\int_0^{\omega_0} \xi(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2} x(0) = \frac{\omega_0}{n} \left(\frac{1}{2} \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_{n-1} + \frac{1}{2} \xi_n \right),$$

$$\int_0^{\omega_0} \xi^2(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2} I = \frac{\omega_0}{n} \left(\frac{1}{2} \xi_0^2 + \xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 + \frac{1}{2} \xi_n^2 \right).$$

Die Minimaufgabe unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $x(0) = \text{konst.}$ liefert $\xi(\omega) = \text{konst.} = \frac{\pi}{2} x(0)/\omega_0$ für $0 \leq \omega \leq \omega_0$ und $\xi(\omega) = 0$ für $\omega > \omega_0$.

Damit wird $x(t) = x(0) [\sin(\omega_0 t)]/(\omega_0 t)$. An Hand dieses Resultates diskutiert Verf. den Übergangsverlauf. Dann bezieht er sich auf das verallgemeinerte quadratische Optimum $\int_0^\infty (x^2 + \mu x'^2) dt = \text{Min.}$, das in $\int_0^\infty (x + \mu x')^2 dt + \mu x^2(0)$ um-

geformt werden kann. Daraus läßt sich ableiten, daß der optimale Prozeß durch $x = x(0) e^{-t/\mu}$ gegeben ist. Entsprechende Überlegungen gelten für Integralkriterien, in denen noch höhere Ableitungen der Regelgröße auftreten. Verf. bringt einige kritische Betrachtungen zu den Ergebnissen und deutet an, wie man Analogrechner zur Auswertung der Integralkriterien verwenden kann. *R. Reißig.*

Tupieyn (Tupitsyn), A. I.: An integral estimate for selecting the optimum parameters of an automatic control system with a given overshoot. Automat. Remote Control 20, 394—402 (1960), Übersetzung aus Avtomat. Telemech. 20, 406—414 (1959).

Ist J_1 das Integral über das Quadrat der Regelabweichung und J_{01} das Integral über das Quadrat der Ableitung der Regelabweichung, so werden hier Ausdrücke der Form $J_{11} = J_1 + (\alpha/\Delta_0^4) J_1^2 J_{01}$ zur Abschätzung der Regelgüte benutzt. Das Minimum dieser Integralausdrücke liefert optimale Parameter von Regelsystemen, wobei das Überschwingen in weiten Grenzen vorgegeben werden kann. Die angeführten Beispiele zeigen, daß diese theoretisch gefundenen Werte mit realen Regelvorgängen hinsichtlich Regelzeit und Überschwingen gut übereinstimmen.

R. Herschel.

Matycyn (Matytsin), V. D. and V. A. Rjapolov (Ryapolov): Use of an integral-square estimate to determine the optimal parameters of an autopilot with rate feedback. *Automat. Remote Control* **20**, 403—408 (1960), Übersetzung aus *Avtomat. Telemekh.* **20**, 415—421 (1959).

Es wird eine Formel für die näherungsweise Bestimmung der Übertragungsfaktoren eines Autopiloten mit Geschwindigkeitsrückführung in Abhängigkeit von den Flugbedingungen und den aerodynamischen Charakteristiken des Flugzeugs angegeben. Die Trägheit des Reglers wird dabei berücksichtigt. Als Kriterium für den optimalen Stabilisierungsprozeß wird das Minimum des Integrals über das Abweichungsquadrat genommen.

R. Herschel.

Gorskij, V. V.: Der Übergangsprozeß im Resonanzkreis bei Einschaltung einer EMK mit linear veränderlicher Amplitude und Frequenz. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* **1957**, Nr. 7, 8—13 (1957) [Russisch].

Die Arbeit schließt eine Lücke in den Untersuchungen von linearen Resonanzsystemen, weil zu dem bereits bekannten Verhalten bei linear variabler Frequenz hier eine gleichzeitig linear variable Amplitude vorausgesetzt wird. Als typisches Beispiel wird ein Serienresonanzkreis angegeben, auf den eine EMK mit variabler Frequenz und Amplitude einwirkt. Beide wachsen mit der gleichen Geschwindigkeit. Damit ist die angelegte EMK vollständig bestimmt. Aus der (zweckmäßig normierten) Differentialgleichung des Kreises wird in der Arbeit und im Anhang die Lösung mit bekannten Methoden der Operatorenrechnung hergeleitet. Als Anfangsbedingung wurde R, L, C gleich Null gesetzt. Die Lösung für den Verlauf der Stromstärke als Funktion der Zeit, die explizit ermittelt wird, besteht aus zwei Komponenten, von denen die erste das Übergangsverhalten ausdrückt. Der Einfluß dieser Komponente verschwindet, wenn die Frequenz ihren Nennwert erreicht hat. Die zweite Komponente weist eine feste Frequenz (Eigenfrequenz) auf, ihre Amplituden werden gedämpft. Der Einfluß der Kreisparameter R, L, C und der Anstiegsgeschwindigkeit von Frequenz und Amplitude wird unter Hinweis auf vorhandene Literatur nicht untersucht. Die theoretisch erhaltenen Ergebnisse werden in einer experimentellen Anordnung nachgebildet und die Meßergebnisse durch zwei Oszillogramme wiedergegeben. Weiterhin wird eines der experimentellen Beispiele mit Hilfe der zuvor abgeleiteten Lösung überprüft. Dies führt zu Diagrammen, in denen die auftretenden Komponenten der Stromstärke und der resultierende Verlauf der Stromstärke in ihren errechneten und gemessenen Werten gegenübergestellt werden. Die auftretenden Unterschiede ergeben sich aus dem in praxi nicht streng linearen Anstieg von Frequenz und Amplitude. In einem weiteren Diagramm werden daher die theoretische und praktische EMK miteinander verglichen. Dennoch sind die Übereinstimmungen hinreichend gut.

W. Holz.

Matjuchin, V. M.: Über die statische Stabilität der Elektroübertragung im Zusammenhang mit dem Vorhandensein mehrerer Generatoren im Übertragungswerk. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* **1957**, Nr. 7, 3—7 (1957) [Russisch].

Unter dem Begriff der Stabilität der Stromerzeuger versteht man, zum Unterschied von der dynamischen Stabilität bei schroffen Veränderungen der Belastung, die Stabilität im kleinen bei konstanter oder nur allmählich sich verändernder Belastung. In der besprochenen Arbeit wird die Stabilität von symmetrischen Strom-

erzeugern, die in das gemeinsame Netz von praktisch unendlicher Leistung arbeiten in bezug auf ihre gegenseitige kleine Schwingung bei beliebiger kleiner Störung an einer der Maschinen untersucht. Von diesen parallel geschalteten symmetrischen Stromerzeugern wird vorausgesetzt, daß sie insgesamt gleiche Parameter haben, gleich eingestellt sind (gleiche angegebene Leistung, gleicher Rotorstrom und gleiche Einstellung von Regulatoren) und dasselbe Erregungsschema und Spannungsregelung besitzen. Die Ausgangsgleichung der Rotorbewegung gilt für den Fall, wo die Drehzahlregelung der Turbine die kleinen Bewegungsänderungen des Rotors nicht aufnimmt und die Turbine eine konstante Leistung abgibt. Das System der Bewegungsgleichungen des Rotors und die Gleichungssysteme der elektromagnetischen Übergangserscheinungen in der Rotorwicklung mit der allgemein ausgedrückten Spannungsregelung in Operatorenform ist für kleine Abweichungen von dem stationären Zustand linearisiert, und die Konstanten dieser Gleichungen sind in eine Operatorenmatrix zusammengestellt, die dank der erwähnten Voraussetzungen eine besondere Form besitzt. Der Verf. zeigt, wie diese Matrix durch eine einfache mathematische Transformation in eine kollineare Matrix übergeführt wird, aus der sich direkt ergibt, daß die charakteristische Systemgleichung in das Produkt von $(n - 1)$ gleichen Polynomen, die die Schwingungen einzelner Stromerzeuger bestimmen, und in ein Polynom zerfällt, das einen äquivalenten Ersatzstromerzeuger des gesamten Systems bestimmt. Die Arbeit ist mathematisch konzipiert und klar geschrieben, und ihr wichtiges Ergebnis, der Zerfall der charakteristischen Gleichung in das Produkt von n -Polynomen, ist ein bedeutender Beitrag zur Theorie des Parallelganges der Stromerzeuger großer Kraftwerke.

J. Rippl.

Flidlíder, G. M.: Transient responses in the magnetic circuits of electromagnet clutches. Automat. Remote Control **20**, 27—40 (1959), Übersetzung von Avtomat. Telemekh. **20**, 31—43 (1959).

Für die technische Berechnung des Einschaltverhaltens eines aus mehreren festen Teilen bestehenden magnetischen Kreises einer elektromagnetischen Kupplung wird eine Methode beschrieben, die es gestattet den Einfluß von Wirbelströmen zu erfassen. Wesentlich ist dazu die analytische Erfassung der Wirbelströme in bezug auf das Übergangsverhalten des Kreises. Neben der praktisch unbequemen Methode der klassischen Feldtheorie, der mit äquivalenten kurzgeschlossenen Windungen steht die Methode mit (magn.) Widerstandoperatoren zur Verfügung, die hier angewendet wird. Die Berechnung wird unter gebräuchlichen Einschränkungen am Beispiel eines hohlzylindrischen Magnetkreises mit einer Lochscheibe als „Anker“ durchgeführt. Ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen werden die magnetischen Leitwerte der einzelnen Teile in Reihenform ermittelt, summiert und zur Bildung des Induktionsoperators benutzt. Daraus lassen sich für das Ein- und Ausschalten die Flüsse berechnen. Bei der Berechnung des Anzugverhaltens des Ankers wurde bisher irrtümlicherweise mit einem Anfangsstrom Null gerechnet, was insbesondere bei kleinen Gegenkräften zu erheblichen Fehlern führte. Durch Erfassen des Wirbelstromverhaltens wird genauer gerechnet. Indem die Reihenausdrücke der Leitwerte durch Näherungsausdrücke ersetzt werden, sind in drei gezeigten Varianten technische Berechnungen einfacher geworden. Aus der Darstellung im Frequenzbereich wird auch in den Zeitbereich transformiert. Der geringe Einfluß der Permeabilität und die Auswirkung des Streuverlustes werden diskutiert. Ein Vergleich der Berechnungen mit experimentell ermittelten Werten ergibt einen maximalen Fehler zwischen 20% und 25%. Die beschriebene Methode scheint umfassender und dabei einfacher zu handhaben sein als die bisher bekannten.

A. Hückler.

Hannakam, L.: Übergangsverhalten des Drehstrom-Schleifringläufers. I: Aufstellung der elektromagnetischen Systemgleichungen. II: Aufstellung des Strukturbildes. Regelungstechnik **7**, 393—398, 421—427 (1959).

I: Um das Strukturbild eines Drehstrom-Schleifringläufers aufzustellen, müssen die elektromechanischen Systemgleichungen, bestehend aus den Spannungsgleichungen und der Bewegungsgleichung, abgeleitet werden. Die auftretenden nichtlinearen Operationen würden jedoch einen zu hohen Aufwand vom elektronischen Analogrechner erfordern. Durch eine Transformation lassen sich alle trigonometrischen Funktionen beseitigen, wobei der Schleifringläufer rechnerisch in zwei Gleichstromanker verwandelt wird. Die noch bestehende Kopplung der transformierten Spannungsgleichungen über die Differentialquotienten der Ströme ist unbequem, weshalb dann an Stelle der Ströme transformierte Flüsse als Variable eingeführt werden, um weiter zu vereinfachen. Die so erhaltenen Systemgleichungen sind dimensionslos. Die Rechnungen werden in Matrizenform durchgeführt. — In II. wird das allgemeine Strukturbild durch Übersetzen der dimensionslosen elektromechanischen Systemgleichungen in Struktursymbole von Übertragungselementen aufgestellt. Für Spezialfälle ergeben sich Vereinfachungen. Die experimentelle Ermittlung von Systemparametern wird beschrieben und das Übergangsverhalten der Maschine an Hand eines Schnellhochlaufs erläutert.

A. Hückler.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Miltzlaff, Gerhard: Über einen Satz, das allgemeine Integral einer nichtlinearen Differentialgleichung mit Hilfe von Bedingungsgleichungen zu ermitteln. *Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg* 4, 75—77 (1960).

Expression (incorrecte) de l'intégrale générale bien connue de l'équation $f(\partial z/\partial x_1, \dots, \partial z/\partial x_n) = 0$ (dans le second membre de (2.5), il faudrait remplacer p_1 par z).

Ch. Blanc.

Prouse, Giovanni: Sulla risoluzione del problema misto per le equazioni iperboliche non lineari mediante le differenze finite. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. Ser. 46, 313—341 (1958).

Per il sistema di tipo iperbolico di n equazioni quasi lineari

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \alpha^{ji} \left[\frac{\partial w^i}{\partial y} + \gamma^j \frac{\partial w^i}{\partial x} \right] = \beta^j, \quad (j = 1, \dots, n),$$

dove $\alpha^{ji}, \gamma^j, \beta^j$ sono funzioni di x, y, w^s , è risolto il problema misto: assegnate $(n+r)$ funzioni $\mu^i(x)$ ($i = 1, \dots, n$), $\nu^k(y)$, ($k = 1, \dots, r$), definite rispettivamente per $0 \leq x \leq \alpha$, $0 \leq y \leq \beta$, soddisfacenti opportune ipotesi di derivabilità e inoltre soddisfacenti certe condizioni di compatibilità per $x = y = 0$, determinare una soluzione del sistema (1), soddisfacente le

$$(2) \quad \begin{cases} w^i(x, 0) = \mu^i(x), (i = 1, \dots, n) & \text{per } 0 \leq x \leq \alpha, \\ w^k(0, y) = \nu^k(y), (k = 1, \dots, r) & \text{per } 0 \leq y \leq y^* \text{ (con } 0 < y^* \leq \beta), \end{cases}$$

nell'ipotesi che r tra le quantità $\gamma^j(0, 0, \mu^s(0))$ siano positive (per fissare le idee quelle corrispondenti a $j = 1, 2, \dots, r$) e le altre $n-r$ negative. Com un cambiamento di funzioni incognite ci si riconduce a supporre $\mu^i(x) = \nu^k(y) = 0$ identicamente, ($i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, r$). Le funzioni $\alpha^{ji}, \gamma^j, \beta^j$ siano allora definite per $0 \leq x \leq \alpha, 0 \leq y \leq y^*, |w^s| \leq \varrho^s$ (essendo ϱ^s numeri positivi), è siano ivi continue assieme alle loro derivate dei primi due ordini; sia Δ_m il determinante delle α^{ji} per $j, i = 1, \dots, n$, e Δ_{n-r} il determinante delle α^{ji} per $j, i = r+1, \dots, n$; esistano tre numeri positivi $\varepsilon, \delta, \delta'$ tali che $\varepsilon \leq |\gamma(x, 0, 0)|$ per $0 \leq x \leq \alpha$, $\delta \leq \Delta_n(x, 0, 0)$ per $0 \leq x \leq \alpha$, $\delta' \leq \Delta_{n-r}(0, 0, 0)$. È dimostrato che nelle ipotesi enunciate esiste una e una sola n -pla di funzioni $w^j(x, y)$, definite in un intorno sufficientemente piccolo del segmento $0 \leq x \leq \alpha$, aventi derivate prime lipschitziane, soddisfacenti il sistema (1) e le condizioni (2). La dimostrazione utilizza un metodo alle differenze finite, studiato in un lavoro di Courant, Isaacson e Rees (questo Zbl. 47, 117).

M. Cinquini-Cibrario.

Agmon, S., L. Nirenberg and M. H. Protter: A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type. *Commun. pure appl. Math.* **6**, 455—470 (1953).

Nel dominio D del piano xy limitato da due segmenti $0 \leq x \leq h$, $0 \leq y \leq k$ e da una curva regolare $y = g(x)$, con $g(0) = k$, $g(h) = 0$, una soluzione regolare dell'equazione $u_{xy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = 0$, per la quale sia $u_y(0, y) \geq 0$, raggiungerà il suo massimo in un punto della curva $y = g(x)$, se si suppone che sia $a \leq 0$, $a_x + ab - c \leq 0$, $c \leq 0$, e inoltre o $c \equiv 0$, o il massimo della u positivo. Ne discende un teorema analogo per le soluzioni di un'equazione di tipo Tricomi nel dominio del semipiano $y < 0$ di iperbolicità, limitato da due archi di caratteristiche e da un segmento dell'asse x , sotto ipotesi peraltro alquanto complicate. Come conseguenza si trova un teorema di unicità della soluzione del problema al contorno di tipo misto. Gli AA. considerano anche principi di massimo „del tipo di Haar“, nei quali, cioè, sotto opportune ipotesi si prova il sussistere del fatto che il massimo è raggiunto in un punto del contorno, non per la soluzione u dell'equazione alle derivate parziali, ma per il prodotto gu , ove g sia una certa funzione positiva.

G. Cimmino.

Fleishman, B. A.: Progressing waves in an infinite non-linear string. *Proc. Amer. math. Soc.* **10**, 329—334 (1959).

Es wird die Frage behandelt, ob die spezielle nichtlineare Wellengleichung $u_{tt} - v^2 u_{xx} = -\alpha u - \beta u^3$ fortschreitende Wellen von der Form $u = \psi(x - ct) = \psi(\xi)$ als Lösungen besitzt. Die Forderung führt auf die Differentialgleichung $(c^2 - v^2) \psi'' + \alpha \psi + \beta \psi^3 = 0$, die durch Jacobische elliptische Funktionen gelöst wird. Je nach den Vorzeichen der Größen $\bar{\alpha} = \alpha/(c^2 - v^2)$ und $\bar{\beta} = \beta/(c^2 - v^2)$ haben diese verschiedene Gestalt. Sind $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ positiv, so sind die Lösungen oszillatorisch; bei verschiedenen Vorzeichen gibt es nichtoszillatorische Lösungen, die u. U. nicht beschränkt sind.

A. Weigand.

Žitomirskij, Ja. I.: Das Cauchysche Problem für gewisse Typen von nach G. E. Šilov parabolischen Systemen linearer partieller Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **23**, 925—932 (1959). [Russisch].

Soit

$$(1) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) \quad (u(x, t) = u_1(x, t), \dots, u_N(x, t), x = (x_1, \dots, x_n), P\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

une matrice quadratique, dont les N^2 éléments sont des polynômes en $(1/i) \partial/\partial x_k$ ($k = 1, \dots, n$) aux coefficients constants) un système parabolique au sens de Šilov (ce *Zbl.* **66**, 341). L'A. effectue certaines évaluations de la fonction de Green du système (1). Ces évaluations permettent de démontrer un théorème d'existence et d'unicité d'une solution du problème de Cauchy relatif à un système parabolique au sens de Šilov aux coefficients dépendant de x et assez réguliers. Dans la démonstration de ce théorème l'A. applique la méthode des approximations successives.

M. Krzyżański.

Éjdel'man, S. D.: Integralprinzip des Maximums für stark parabolische Systeme und einige seiner Anwendungen. *Izvestija vyssš. učebn. Zaved., Mat.* **2** (9), 252—258 (1959) [Russisch].

Let

$$(*) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^n B_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x, t) u, \quad x = (x_1, \dots, x_n), u = (u_1, \dots, u_N),$$

be a system of differential equations, with real continuous coefficients and $u(x, t)$ a real, regular solution of (*) in $\Pi_1 \{0 < t \leq T, x \in E^n\}$. Write $u \in W_{2,g}^{(1)}$ if

$$\int_{t_1}^T dt \int \left\{ |u|^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right\} \exp \{-g(x, t)\} dx < +\infty, \quad |u|^2 = \sum_{s=1}^N u_s^2$$

for any $t_1 \in (0, T)$, where $g(x, t)$ is a real differentiable function in Π_1 , and put

$$F(t) = \|u(x, t)\|_{L_{2,g}} = \int |u|^2 \exp \{-g(x, t)\} dx.$$

The following theorem is proved: If 1. $u \in W_{2,g}^{(1)}$; 2. $|A_{ij}(x, t)| < M$, $(x, t) \in \Pi_1$;

3. $(\mathcal{E}c, c) = - \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}(x, t) a_i, a_j) + \sum_{i=1}^n \left(\left(B_i + \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) a_i, b \right) + \left(\left(c - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial t} E \right) b, b \right) \leq 0$,

E — unit matrix, for every real vector $c = (a_1, \dots, a_n, b)$, where (\cdot) means ordinary scalar product in E^N , then $F(t_1) \geq F(t_2)$ for every $t_1 < t_2$, in $(0, T]$. If instead of 3. the condition 4. $(\mathcal{E}c, c) \leq -\psi(t) (b, b)$, $\psi(t) > 0$ is satisfied, then

$$F(t_1) \geq \exp \left\{ 2 \int_{t_1}^{t_2} \psi(\beta) d\beta \right\} F(t_2) \quad \text{for } t_1 < t_2,$$

i. e. $F(t)$ decreases. [Note of the reviewer: there is an obvious misprint in the exponent of the formula above in the paper.] Some consequences of the theorem are derived: i) (uniqueness in Cauchy problem) if $u \in W_{2,g}^{(1)}$, $\lim_{t \rightarrow 0+} \|u\|_{L_{2,g}} = 0$,

then $u \equiv 0$; ii) (stability of the solution of Cauchy problem) if $u \in W_{2,g}^{(1)}$ for every layer $(0, T)$ and $\lim_{t \rightarrow 0+} \|u(x, t) - \varphi(x)\|_{L_{2,g}} = 0$ then from 2. and 3. it follows

$\|u(x, t)\|_{L_{2,g}} \leq \|\varphi(x)\|_{L_{2,g}}$, for every $t \geq 0$; while from 2. and 4. with

$$\int_0^{+\infty} \psi dt = +\infty, \text{ it follows } \|u(x, t)\|_{L_{2,g}} \leq \|\varphi(x)\|_{L_{2,g}} \exp \left\{ - \int_0^t \psi(\beta) d\beta \right\};$$

in the first case the trivial solution is stable, in the second asymptotically stable;

iii) 2. and 4. for $t \leq 0$, $u \in W_{2,g}^{(1)}$ in every layer $(T, 0)$, $T < 0$ and

$$\|u(x, t_1)\|_{L_{2,g}} \exp \left\{ -2 \int_{t_1}^0 \psi(\beta) d\beta \right\} \rightarrow 0 \quad \text{for } t_1 \rightarrow -\infty,$$

imply $u \equiv 0$. Some examples of application of the theorem and the corollaries are given for systems satisfying the condition

$$\int_{V_R} \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) e^{-g(x,t)} dx \geq \delta \int_{V_R} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 e^{-g(x,t)} dx, \quad \delta > 0$$

for every $u \in W_{2,g}^{(1)}$ and every sphere $V_R \{ |x| \leq R \}$. They are called strongly parabolic systems. An integral maximum principle, analogous to that of the theorem above, was established by M. M. Lavrent'ev (this Zbl. 80, 80) for second order strongly elliptic systems.

L. Cattabriga.

Li Dé-juán' (Li Der-yuan): Uniqueness of Cauchy's problem for an equation of parabolic type. Doklady Akad. Nauk SSSR 129, 979—982 (1959) [Russisch].

Consider the parabolic equation

$$L^* u \equiv \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t) u \quad \frac{\partial u}{\partial t} = d(x, t),$$

$x \equiv (x_1, \dots, x_n)$, in the domain $G \{ x \in D, 0 \leq t \leq T \}$, with $L_1^* \equiv \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ik}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_k}$

uniformly elliptic in G . Suppose a_{ik} thrice continuously differentiable in x and once in t , and b_i, c, d bounded in G . Let Π be a piece of $(n-1)$ -dimensional hyper-surface contained in D , with continuous normal and η the normal to the surface of the cylinder $\Gamma \{ x \in \Pi, 0 \leq t \leq T \}$. The fundamental theorem of the paper asserts the uniqueness of the solution of the Cauchy problem

$$L^* u = d \text{ in } G, \quad u|_{\Gamma} = f(x, t), \quad \partial u / \partial \eta|_{\Gamma} = g(x, t)$$

in the class K of the functions u , with second x -derivatives and first t -derivative continuous in G . The main tool used in the proof of this result is an inequality, analogous to that of Heinz (this Zbl. 67, 75), for certain parabolic operators of special type and for functions defined in the cylinder $\{r \leq a, 0 \leq t \leq T\}$, $a \leq t$, $r = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. With the aid of the method of H. Cordes (this Zbl. 74, 80) this

inequality applies to the operator L^* , after suitable changes of variables. The paper ends with a uniqueness theorem for the solution of the Cauchy problem

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial t} = h \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right), \quad u|_r = 0, \frac{\partial u}{\partial \eta}|_r = 0$$

in the class K ; its hypothesis are too long to be stated here.

L. Cattabriga.

Aronson, D. G.: The fundamental solution of a linear parabolic equation containing a small parameter. Illinois J. Math. 3, 580—619 (1959).

Si considera il problema iniziale (1) $u(x, 0, \varepsilon) = g(x)$, ($\varepsilon > 0$, $g(x)$ definita e continua per $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, n -spazio euclideo) associato all'equazione

$$(2) \quad L_\varepsilon(u) = \varepsilon \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x, y) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x, y) u - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y),$$

con $a_{ij} = a_{ji}$, a_i, b, f definite per $x \in E^n, y \in I = [0, \bar{y}]$ e sia soddisfatta la condizione di parabolicità $l_1^* \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, y) \lambda_i \lambda_j \leq l_2^* \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$, $0 < l_1^* \leq l_2^*$, uniformemente rispetto ad $(x, y) \in R = E^n \times I$ per tutti gli n -vettori $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in E^n$. Accanto a questo si considera il problema iniziale (1₀) $v(x, 0) = g(x)$, per l'equazione ridotta

$$(2_0) \quad L_0(v) = \sum_{i=1}^n a_i(x, y) \frac{\partial v}{\partial x_i} + b(x, y) v - \frac{\partial v}{\partial y} = f(x, y),$$

che si ottiene dalla (2) per $\varepsilon = 0$. Detta $H(\gamma, x, R)$ la classe di tutte le funzioni $\varphi(x, y)$ definite in R , ivi limitate, uniformemente continue e soddisfacenti, uniformemente rispetto ad $y \in I$, una condizione di Hölder di esponente γ rispetto ad x , cioè tali che per ogni coppia $(x', y) \in R, (x, y) \in R$ sia $|\varphi(x', y) - \varphi(x, y)| \leq H |x' - x|^\gamma$, $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$, l'A. suppone che le a_{ij}, a_i, b e le $\partial a_i / \partial x_j$ appartengano tutte ad $H(\gamma, x, R)$. Sotto queste ipotesi il sistema differenziale ordinario $dx/dy = -a(x, y)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, con le condizioni iniziali $x(\eta) = \alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\alpha, \eta) \in R$, ammette una ed una sola soluzione $x = \Phi(y; \alpha, \eta)$ definita in I , mediante la quale, supposta la $f(x, y)$ continua in R , è possibile definire la soluzione debole di (1₀), (2₀), rappresentata da

$$v^*(x, y) = g(\Phi(0; x, y)) \exp \int_0^y b(\Phi(v; x, y), v) dv - \int_0^y f(\Phi(\tau; x, y), \tau) \exp \left\{ \int_\tau^y b(\Phi(v; x, y), v) dv \right\} d\tau.$$

Se esistono due costanti $m_1 > 0, m_2 \geq 0$, tali che $|g(x)| \leq m_1 e^{m_2 |x|^2}$, $x \in E^n$, $|f(x, y)| \leq m_1 e^{m_2 |x|^2}$, $(x, y) \in R$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ il problema (1) (2) ammette una soluzione (unica nella classe delle funzioni limitate in R da $k_1 e^{k_2 |x|^2}$ per qualche coppia di costanti $k_1 > 0, k_2 > 0$) definita per $x \in R, 0 \leq y \leq y(\varepsilon) \leq \bar{y}$ e si ha inoltre in $R \times [0, y(\varepsilon)]$: (3) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} u(x, y; \varepsilon) = v^*(x, y)$. Questa relazione di con-

vergenza puntuale costituisce un perfezionamento del risultato di convergenza in L^2 conseguito, per i sistemi, da O. A. Ladyženskaja [Vestnik Leningradsk. Univ. 12, Nr. 7 (Ser. Mat. Mech. Astron. Nr. 2), 104—120 (1957)]: l'A. congettura una possibile estensione agli stessi sistemi del proprio risultato. La dimostrazione della (3) è ottenuta attraverso una accurata analisi della soluzione $u(x, y; \varepsilon)$ che viene

rappresentata in forma esplicita dopo la costruzione, alquanto laboriosa, di una soluzione fondamentale. L'A. completa quindi il risultato ottenuto ricavando la (3) sotto ipotesi del Dini, anziché di Hölder, ed assegnando una valutazione della differenza $|u(x, y; \varepsilon) - v^*(x, y)|$.

R. Conti.

Kim, E. I. and L. P. Ivanova: The mixed boundary value problem for a certain system of parabolic differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR 126, 1183—1186 (1959) [Russisch].

Les AA. considèrent un système parabolique de la forme (1) $\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \Delta u_k$ ($i = 1, \dots, n$), où $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ et a_{ik} sont des nombres constants complexes. On suppose que les racines λ de l'équation $|A - \lambda E| = 0$ ($A = \|a_{ik}\|$, E matrice unitaire) sont distinctes et que $\operatorname{Re} \lambda > 0$. La solution fondamentale du système (1) est représentable sous la forme

$$G_i^{(k)}(x - \xi, y - \eta, t - \tau) = \sum_{j=1}^n C_j^{(k)} B_{ij} g_j(x - \xi, y - \eta, t - \tau),$$

$g_j(x - \xi, y - \eta, t - \tau)$ étant la solution fondamentale de l'équation $\partial u/\partial t = \lambda_j \Delta u$ ($j = 1, \dots, n$). On détermine B_{ij} , $C_j^{(k)}$ et λ_j de façon que les fonctions $G_i^{(k)}$ satisfassent aux équations du système (1). Les AA. définissent ensuite les intégrales analogues aux potentiels (potentiels de chaleur) dont les noyaux constituent les fonctions $G_i^{(k)}$. L'introduction de ces potentiels permet de ramener les problèmes mixtes relatifs au système (1) aux systèmes d'équations intégrales de Volterra. M. Krzyżański.

Krzyżański, Miroslaw: Sur l'allure asymptotique des solutions des problèmes de Fourier relatifs à une équation linéaire parabolique. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur. VIII. Ser. 28, 37—43 (1960).

Einleitend möchten wir verabreden, daß alle Gleichungen (Bedingungen usw.) im klassischen Sinne verstanden werden sollen, d.h. daß die in ihnen auftretenden Funktionen oder deren Ableitungen stetig sind. Verf. untersucht für $t \rightarrow \infty$ das Verhalten der Lösung des Fourierschen Problems für die Gleichung

$$(1) \quad L(u) = a(x, t) u_{xx} + b(x, t) u_x + c(x, t) u - u_t = 0$$

im Halbstreifen $\Sigma: 0 \leq x \leq 1, t \geq 0$. Von den Koeffizienten wird $a > 0, c \leq 0$ vorausgesetzt. Die Randbedingungen sind durch folgende Operatoren definiert

$$l_1(u) = u_\sigma(0, t) - h_1(t) u(0, t), \quad l_2(u) = -u_x(1, t) - h_2(t) u(1, t),$$

wobei die Funktionen h_i von unten durch eine positive Konstante beschränkt sind. Die Arbeit basiert auf dem Satz, welcher eine gleichmäßige (lokal gleichmäßige) Konvergenz der Lösung der Gleichung (1) gegen Null unter folgenden Voraussetzungen garantiert. Es gilt (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} l_i(u) = 0, i = 1, 2$. Es gibt eine Funktion $v(x, t)$ die

folgende Bedingungen erfüllt: 1. $v(x, t) > 0$ in Σ ; 2. $L(v) \leq 0$ im Innern von Σ ; 3. $l_i(v) = 0$ für $t > 0$; 4. $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$ gleichmäßig (lokal gleichmäßig). Falls

man von den Koeffizienten der Gleichung noch voraussetzt, daß $a \geq a_0 > 0, b(x, t) \leq B$ gilt, dann gibt es eine Funktion $v(x, t)$, die die Bedingungen 1—4 erfüllt. Eine Folgerung dieses Satzes ist die gleichmäßige Konvergenz der Lösung des Fourierschen Problems für die Gleichung $a(x) v_{xx} + b(x) v_x + c(x) v - v_t = f(x)$, welche die Bedingungen $\lim_{t \rightarrow \infty} l_i(v) = g_i$ erfüllt, gegen die Lösung des Randwertproblems

$a(x) w'' + b(x) w' + c(x) w = f(x), w'(0) = h_1^0 w(0) = g_1, w'(1) = h_1^0 w(1) = g_2$, wobei $h_i^0 = \lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t)$ (Existenz wird vorausgesetzt) ist. Verf. leitet noch ähnliche Resultate

für eine Viertelebene ab und untersucht näher die Bedeutung der Voraussetzung $h_i(t) > \alpha > 0$.

R. Výborný.

Gehring, F. W.: The boundary behavior and uniqueness of solutions of the heat equation. Trans. Amer. math. Soc. 94, 337—364 (1960).

Una funzione $u(x, t)$ in un dominio δ del piano x, t , avente derivate seconde continue e soddisfacente all'equazione $u_{xx} - u_t = 0$, si dice di classe H ; se in più è positiva o nulla è detta di classe H^+ ; se infine è differenza di due funzioni di classe H^+ , sarà detta di classe H^d in δ . Widder [cfr. Trans. Amer. math. Soc. **55**, 85—95 (1944)] ha dato l'espressione caratteristica delle funzioni $u \in H^d$ in $0 < t < c$. Nel lavoro si estendono alle funzioni di classe H^d in $0 < t < c$ noti teoremi sulle funzioni armoniche, mostrando fra l'altro con un esempio, che teoremi che permettono di conoscere l'andamento della $u(x, t)$ nelle vicinanze del punto $(x_0, 0)$ dal modo di comportarsi di $\alpha(x) = u(x, 0)$ nelle vicinanze di x_0 , non sono invertibili. L'invertibilità di tali teoremi, e cioè la possibilità di risalire al comportamento di $\alpha(x)$ nelle vicinanze di $x = x_0$ da quello di $u(x, t)$ nelle vicinanze di $(x_0, 0)$, resta invece assicurata per $u(x, t) \in H^+$. Si ottengono anche gli analoghi risultati per funzioni rispettivamente delle classi H^d e H^+ in $0 < t < \infty$. Completano il lavoro estensioni di teoremi di Widder, Tychonoff (questo Zbl. **11**, 115), Rosenbloom (questo Zbl. **58**, 87), Birkhoff-Kotik (questo Zbl. **55**, 86), Cooper (questo Zbl. **37**, 346) e l'estensione alle funzioni di classe H^d in $0 < t < \infty$ di una nota disuguaglianza di Fejer-Riesz per le funzioni armoniche.

G. Sestini.

Friedman, Avner: Free boundary problems for parabolic equations. III: Dissolution of a gas bubble in liquid. J. Math. Mech. **9**, 327—345 (1960).

Questa terza parte di un vasto ed interessante lavoro su problemi al contorno per equazioni paraboliche analoghi o più generali di quello unidimensionale lineare di Stefan [questo Zbl. **89**, 78; J. Math. Mech. **9**, 19—66 (1960)] tratta del problema analitico connesso con la soluzione di bolle di gas in un liquido. Se $s(t)$ è il raggio della bolla al tempo t , $u(x, t)$ una funzione legata alla concentrazione della soluzione gas-liquido, $s(t)$ e $u(x, t)$ devono soddisfare al seguente problema ai limiti: $u_{xx} = u_t$ per $x > s(t)$, $t > 0$; $u(x, 0) = \varphi(x)$, $x > b > 0$; $u(s, t) = m(1 - s/b)$, $t > 0$; $\alpha u_x(s, t) = (n + s)\dot{s} + \alpha m(1/s - 1/b)$, $t > 0$; u ed u_x limitate per $x \rightarrow \infty$ uniformemente rispetto a t in ogni intervallo finito, dove b, α, m, n sono costanti e q , non

identicamente nulla, è tale che $\int_b^\infty |\varphi| dx < \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi' = 0$, con est. sup. $|\varphi|$ limitato nell'intervallo $[b, +\infty)$. Si dimostra, con procedimento sostanzialmente analogo a quello usato nelle precedenti parti, basato sulla dimostrazione dell'esistenza di un sol punto unito, in piccolo prima ed in grande poi, per una conveniente trasformazione funzionale, che, se m, n ed α sono positive, $\varphi \leq 0$ con $\varphi(b) = 0$, il sistema ha una unica soluzione per $t < t_0$ ($t_0 > 0$) ed è $s(t)$ monotona decrescente con $s(t_0) = 0$. Quando sia $\varphi(b) < 0$ o $\varphi(x) \geq 0$, per la validità del teorema si rendono necessarie ipotesi sul comportamento di \dot{s} e sulla costante α . Nel caso $\varphi \geq 0$, $s(t)$ risulta monotona crescente e tendente all'infinito con t .

G. Sestini.

Adler, Georges: Un type nouveau des problèmes aux limites de la conduction de la chaleur. Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci. **4**, 109—126, russ. Zusammenfassung 126—127 (1959).

Si risolve in un campo C di superficie regolare S il seguente problema ai limiti per l'equazione del calore analogo a quello considerato da Freud (questo Zbl. **89**, 77): $\Delta U = a^2 U_v$, $P \in C$, $t > 0$; $U + \alpha U_n = f(t)$, $\alpha \geq 0$, $t > 0$, $P \in S$; $Q(t) = \beta \int_S U_n dS + \gamma f'$, con $\beta > 0$ e $\gamma > 0$; $f(0) = f_0$, $U(P, 0) = U_0(P)$; dove $Q(t)$ è la quantità di calore prodotta per unità di tempo nell'ambiente in cui è immerso C di cui è $f(t)$ l'incognita temperatura. Tre Lemma consentono all'A. di stabilire il seguente principio di massimo per la soluzione U del problema: se per ogni $0 \leq t \leq T$ è $Q \geq 0$, $f_0 \geq 0$, $U_0 \geq 0$, allora in C , e per $0 < t \leq T$, è $U(P, t) \geq 0$. Da questo teorema discende un teorema di unicità per la soluzione del problema della cui esistenza ci si assicura mediante un procedimento che si appoggia al classico teorema di Duhamel.

G. Sestini.

Danilova, I. N.: Die Temperaturverteilung in einem unbegrenzten Hohlzylinder bei Wärmeaustausch an den Grenzen mit Medien von veränderlicher und konstanter Temperatur. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1958, Nr. 12, 148—150 (1958) [Russisch].

Mit Hilfe der Laplace-Transformation wird für konstante $k, k_1, k_2, T_{10}, A, T_2$ folgendes Randwertproblem aus der Wärmeleitungstheorie

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right) \text{ für } 0 < a < r < b, 0 < t;$$

$$T(r, 0) = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = k_1(T_{10} + A t - T) \text{ für } r = b, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -k_2(T_2 - T) \text{ für } r = a,$$

gelöst. Die Lösung wird durch eine unendliche Reihe dargestellt. *R. V ýborn ý.*

Černigovskaja, E. I.: Wärmewellen in einer Schicht und einer Platte, die auf der Schicht liegt. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. Techn. Nauk* 1958, Nr. 9, 91—93 (1958) [Russisch].

Die Temperaturverteilung in einer sehr dünnen Platte ($-\infty < x, y < +\infty, H < z < H + h$), in welcher man die Temperaturänderung in der Richtung der z -Achse vernachlässigen kann, wird untersucht. Die Platte liegt auf einer wärmeleitenden Schicht ($-\infty < x, y < +\infty, 0 < z < H$), die von unten wärmeisoliert ist. Die Wärmestromdichte durch die obere Seite der Platte wird durch die Funktion $\sin \alpha x \sin \beta y (C_1 \sin \omega \tau + C_2 \cos \omega \tau)$ ($C_i, \alpha, \beta, \omega$ sind Konstanten) beschrieben. Verf. bemerkt noch abschließend, daß man mit Hilfe der abgeleiteten Formel den Fall der nur in einem Rechteck oder in einem Kreis ausgebreiteten Wärmequellen behandeln kann. *R. V ýborn ý.*

Szeptycki, P.: Existence theorem for the first boundary problem for a quasi-linear elliptic system. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys.* 7, 419—424 (1959).

The author considers the following system:

$$(1) \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N c_{li} u_i = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N$$

where the coefficients are functions of the x_i 's, of the u_i 's and of the $\partial u_i / \partial x_i$'s. It is assumed that the coefficients are bounded and for arbitrary values of the u_i 's and of the $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$'s, satisfy a Hölder condition of exponent < 1 , that $\sum_{i,j} c_{ij} \eta_i \eta_j < 0$ for all η_i 's and that $m |\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j \leq M |\xi|^2$ where $|\xi|^2 = \sum_i |\xi_i|^2$, $0 < \tau_1 \leq M/m \leq \tau_2$ and τ_1 and τ_2 are roots to the equation $(a - \eta) \tau^2 - 2[a + \eta(N-1)]\tau + a - \eta(N-1)^2 = 0$ where $0 < \eta < 1$ and a is a function of N . It is shown that there exists a solution of (1) defined in a domain Ω whose boundary $\partial\Omega$ is of class $C_{2+\gamma}$, $\gamma < 1$ and such that $u_i(x) = \Phi_i(x)$ on $\partial\Omega$, the Φ_i 's being, in the notation of Nirenberg, of class $C_{2+\gamma}(\partial\Omega)$. The proof follows closely those found in H. O. Cordes (this Zbl. 70, 96) and A. Douglis and L. Nirenberg (this Zbl. 66, 80). The original contribution of the author is mostly contained in his lemma I: If the coefficients of (1) depend only on the x_i 's and if $\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq c |\xi|^2$, then $\sum_i [u_i(x)]^2$ attains its maximum on $\partial\Omega$.

C. Racine.

Maz'ja (Mazia), V. G.: On the solution of Dirichlet's problem for equations of the elliptic type. *Doklady Akad. Nauk SSSR* 129, 257—260 (1959) [Russisch].

Consider the elliptic equation

$$(1) \quad \mathfrak{M} u \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = f(x)$$

in a closed, bounded domain Ω of the n -dimensional euclidean space, with twice piece-wise continuously differentiable boundary. Suppose $a_{ij}, b_i \in C^{(1)}(\Omega)$,

$c \in C^{(0)}(\Omega)$ and $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \alpha_i \alpha_j \geq \mu^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$, $\mu^2 = \text{const}$. Put $W_{p,0}^{(2)} = \overset{0}{W}_p^{(1)}(\Omega) \cap W_p^{(2)}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, and denote by λ^2 the first eigenvalue of the operator $\Re u \equiv - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$ defined in $\overset{0}{W}_2^{(2)}(\Omega)$. The author states the following results: I) If $\alpha \in [0, 1]$, $f \in L_{1/\alpha}(\Omega)$ and for every $x \in \Omega$

$$(2) \quad 4\alpha(1-\alpha)\lambda^2 - c(x) + \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(x) \geq \kappa^2 = \text{const}$$

then for the solution of the Dirichlet problem for (1) in $W_{1/\alpha,0}^{(2)}$ the inequality (3) $\|u\|_{L_{1/\alpha}(\Omega)} < \kappa^{-2} \|f\|_{L_{1/\alpha}(\Omega)}$ holds. For $\alpha = 0$, or $\alpha = 1$ and $\kappa = 0$, (3) holds with a different constant. II) If (2) is satisfied by some $\alpha \in [0, 1]$, then the a priori estimate $\|u\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < c \|f\|_{L_p(\Omega)}$, $1 < p < \infty$, holds for the solution of the Dirichlet problem for (1) in $W_{p,0}^{(2)}(\Omega)$. [Note of the reviewer: the condition $p > 1/\alpha$ should however be added.] For $\alpha = \frac{1}{2}$, II. gives a uniqueness condition for the solution of the Dirichlet problem, which is stronger than that of Picard; the well known Paraf and Lichtenstein conditions are also particular cases of (2). In the second part of the paper the following theorems on the Dirichlet problem for the equation (4) $\Re u = \varphi(x; u, u_{x_p})$ are given: III) Let $\varphi(x; u, u_p)$ be continuous in $Q \{x \in \Omega, -\infty < u, u_1, \dots, u_n < \infty\}$ and such that

$$\varphi(x; u, u_p) - \varphi(x; v, v_p) < M_0(u-v) + \sum_{v=1}^n M_v |u_p - v_p| \text{ for } u \geq v,$$

where $M_v = \text{const}$. ($v = 0, 1, \dots, n$); then: 1. if $M_0 \leq 0$, the Dirichlet problem for (4) has no more than one solution in $W_{p,0}^{(2)}$, for p sufficiently large; 2. if $M_0 \geq 0$ and (5) $\lambda < M_0^{1/2} + \frac{1}{2}\mu \left(\sum_{v=1}^n M_v^2 \right)^{1/2}$, (λ, μ as above), the same conclusion as in 1. holds for $p > 1$. Examples show that the inequality (5) cannot be improved with \geq and that the coefficient of $\frac{1}{\mu} \left(\sum_{v=1}^n M_v^2 \right)^{1/2}$ in it cannot be $< \frac{1}{4}\pi$. Estimates from below for λ^2 with the aid of (5) lead to uniqueness theorems for the solution of the Dirichlet problem in regions "large" in various senses. IV) Let $\varphi(x; u, u_p)$ be continuous and $|\varphi(x; u, u_p) - \varphi(x; v, v_p)| \leq M_0 |u - v| + \sum_{v=1}^n M_v |u_p - v_p|$ in Q , with M_v non negative constants such that $\frac{M_0}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{v=1}^n M_v^2 \right)^{1/2} < 1$; then there exists a solution of the Dirichlet problem for (4) in $W_{2,0}^{(2)}$. V) Let Ω be convex and $\varphi(x; u, u_p, u_{\eta\mu})$ continuous and

$|\varphi(x; u, u_p, u_{\eta\mu}) - \varphi(x; v, v_p, v_{\eta\mu})| \leq M_0 |u - v| + \sum_{v=1}^n M_v |u_p - v_p| + \sum_{\eta,\mu=1}^n M_{\eta\mu} |u_{\eta\mu} - v_{\eta\mu}|$ in $x \in \Omega$, $-\infty < u, u_p, u_{\eta\mu} < \infty$, where M_v are non negative constants satisfying the inequality $\frac{M_0}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{v=1}^n M_v^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{\eta,\mu=1}^n M_{\eta\mu}^2 \right)^{1/2} < 1$, then there exists a unique solution in $W_{2,0}^{(2)}$ for the Dirichlet problem for the equation $-\Delta u = \varphi(x; u, u_p, u_{x_\eta} x_\mu)$. No proofs of the theorems stated are given.

L. Cattabriga.

Hörmander, Lars: On the uniqueness of the Cauchy problem. II. Math. Scand. nav. 7, 177—190 (1959).

Dans ce second article (v. L. Hörmander, ce Zbl. 88, 302) on démontre une „*inégalité de Carleman*“ pour des opérateurs différentiels à coefficients variables. Soit $P(x, D) = \sum a_\alpha(x) D^\alpha$ un opérateur homogène d'ordre m , à coefficients vérifiant une condition de Lipschitz uniforme dans un ouvert Ω contenant l'origine.

On suppose que $P(0, D)$ est elliptique et à caractéristiques simples. L'A. obtient l'inégalité

(1) $(1 + \tau \delta^2)^{m-|\alpha|-1} \tau^{m-|\alpha|} \int \exp(2\tau \varphi_\delta) |D^\alpha u|^2 dx < C \int \exp(2\tau \varphi_\delta) |P(x, D) u|^2 dx$ valable pour $\tau \delta > M$, $\delta < \delta_0(M)$, δ_0 sont certaines constantes) et pour tout $u(x)$ indéfiniment dérivable et à support compact contenu dans un ouvert $U_\delta \subset \Omega$. La fonction „poids“ est $\varphi_\delta(x) = (x_1 - \delta)^2 + \delta(x_2^2 + \dots + x_n^2)$. Afin d'obtenir (1) l'A. donne une généralisation de l'inégalité de Trèves au cas des opérateurs à coefficients variables. La démonstration de (1) s'appuie sur cette inégalité de Trèves et sur une partition de l'unité utilisée aussi dans l'article précédent; elle est particulièrement ingénieuse et délicate. A partir de (1) on obtient par un raisonnement standard un théorème d'unicité du prolongement à travers des surfaces „suffisamment convexes“ des solutions d'inégalités du type $|P(x, D) u| < C \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|$.

Ce résultat généralise un théorème de Ca l d é r o n (ce Zbl. 80, 303). On démontre ensuite que le produit de deux opérateurs vérifiant les conditions de ci-dessus donne lieu à une inégalité de Carleman et à un théorème d'unicité. On peut remplacer l'hypothèse de „simplicité“ des caractéristiques par une condition plus faible; on obtient de même une inégalité du type (1) et par suite aussi un théorème d'unicité.

G. Gussi.

Hörmander, Lars: Differential operators of principal type. Math. Ann. 140, 124—146 (1960).

This paper is centered around the following general question: Let $P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ be any differential operator with C^∞ coefficients in a domain Ω of R^n ; consider the equation (1) $Pu = f$. Has (1) locally a distribution solution u for every C^∞ right hand side f ? It is clear that this is not true e. g. if the coefficients all vanish at some point $x_0 \in \Omega$. But that this phenomenon may occur even if the coefficients are seemingly well-behaved in this respects was discovered only recently by H. Lewy (this Zbl. 78, 81); Lewy's example is the operator $P = P(x, D) = -i D_1 + D_2 - 2(x_1 + i x_2) D_3$. On the other hand the question has a positive answer in the following cases: 1. differential operators with constant coefficients (Ehrenpreis, Malgrange); 2. more generally, differential operators such that the polynomials $P(x, \xi)$, $x \in \Omega$, are equally strong in the sense of Hörmander; 3. differential operators such that $A. \xi \neq 0 \rightarrow \text{grad } p(x, \xi) \neq 0$ for every ξ and every $x \in \Omega$ [p , the principal part of P], B. $p(x, \xi)$ is real for every ξ and every $x \in \Omega$, or more generally B'. $c(x, \xi) = 0$ for every ξ and every $x \in \Omega$ [c , the principal part of $C = \bar{P}P - P\bar{P}$] (Hörmander; this Zbl. 67, 322). One of the essential points of the present paper is now the introduction of the following condition, which is weaker than B. and B': B''. $p(x, \xi) = 0 \rightarrow c(x, \xi) = 0$ for every ξ and every $x \in \Omega$. If A. and B. or B'. hold then there exists for every $x_0 \in \Omega$ a number $\gamma_0 = \gamma_0(x_0) > 0$ such that the following inequality holds:

$$(2) \sum_{|\alpha| \leq m} \delta^{-|\alpha|} \|D_\alpha f\| \leq C \|Pf\|, \quad f \in \mathcal{B}(U_{x_0, \delta}),$$

$\delta = \gamma_0$ [$U_{x_0, \delta}$ the set of points $x \in \Omega$ such that $|x - x_0| < \delta$; $\|g\|_1 = (\int |g(x)|^2 dx)^{1/2}$] (Hörmander, loc. cit.). It follows that (1) has a solution $u \in L^2(U_{x_0, \delta})$ for every $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Now quite generally the author defines an operator P to be of principal type if (2) holds for every $x_0 \in \Omega$ for some $\gamma_0 = \gamma_0(x_0)$. If P has constant coefficients then P is equivalent to the condition A., and the definition is thus consistent with the one given in Hörmander (loc. cit.). The author establishes the following results: i) A. is necessary for P to be of principal type. ii) B''. is necessary. iii) The following condition, which is stronger than B'', but weaker than B. or B', is sufficient: $p(x, \xi) = q(x, \xi) p(x, \xi) + q(x, \xi) p(x, \xi)$ where $q(x, \xi)$ is a polynomial of degree $m-1$. The proof utilizes the energy inequality method in the form given to it by Trèves. iv) Let P be of principal type. For every $s \geq 0$ and every $x_0 \in \Omega$ there

is a number $\gamma_s = \gamma_s(x_0) > 0$ such that the following inequality holds:

$$(2_s) \quad \sum_{|\alpha| < m} \delta^{-|\alpha|} \|D_\alpha f\|_{-s, \delta} \leq C \|Pf\|_{-s, \delta}, \quad f \in \mathcal{B}(U_{x_0, \delta}), \quad \delta < \gamma_s$$

$\|g\|_{-s, \delta} = (\int (\delta^{-2} + |\xi|^2)^s |g(\xi)|^2 d\xi)^{1/2}$. It follows that (1) has a solution $u \in H^s(U_{x_0, \delta})$, $\delta < \gamma_s$, for every $f \in \mathcal{L}(\Omega)$. The proof depends on a variant of the usual regularization technique, in a less precise form already used by the author in an previous paper (this Zbl. 81, 315). Finally, the following result is proved, and this is the most important contribution of the paper: v) Let $m = 1$. If (1) has a solution u for every right hand side f , then B'' holds. This includes the above example of H. Lewy; one verifies directly that in this case B'' is not fulfilled. It may also be considered as a generalization of ii), and the proof is also quite similar. In fact, using Baire's category theorem one easily obtains an inequality similar to (2), which assuming that B'' is not fulfilled, one has to disprove in order to get a contradiction. The "testing functions" are of the form: $\varphi e^{t u}$ where $\varphi \in \mathcal{B}(\Omega)$, t is a real number, u is a function of the form: $u(x) = u(x_0) + i\xi(x - x_0) + \frac{1}{2}\alpha(x - x_0)^2 + \dots$, ξ being a real vector which violates the condition B'' , and α being a symmetric matrix satisfying certain requirements. (Remark. In a following paper the author has shown that v) is valid even without the restriction $m = 1$. The proof is an adaptation of the proof of ii) and v) above).

J. Peetre.

Littman, Walter: A strong maximum principle for weakly L -subharmonic functions. J. Math. Mech. 8, 761—770 (1959).

Sei $Lf \equiv \sum a_{ij}(x) \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j + \sum b_i(x) \partial f / \partial x_i$ ein elliptischer Operator, definiert in einem Gebiete D des R_n ($a_{ij} \in C^2(D)$, $b_i \in C^1(D)$), und es bezeichne L^* den zu L formal adjungierten Operator. Verf. nennt eine Funktion $u(x)$ schwach L -subharmonisch in D , falls u in D meßbar und „wesentlich“ nach oben beschränkt (d. h. nach oben beschränkt mit Ausnahme einer Menge vom Maß 0) ist und die Ungleichung $\int_D u L^* v \geq 0$ erfüllt für alle nichtnegativen Funktionen $v(x)$ in $C^2(D)$ mit kompaktem, in D enthaltenem Träger. Resultate: (1) Sei u schwach L -subharmonisch in D und es nehme u fast überall auf einer offenen Untermenge von D seine „wesentliche obere Grenze M (bezüglich D) an. Dann ist $u = M$ fast überall auf D . (2) Sei u schwach L -subharmonisch im Gebiete D . Nimmt u in einem Stetigkeitspunkte x_0 seine „wesentliche“ obere Grenze M (bezüglich D) an, so ist $u = M$ fast überall in einer Umgebung von x_0 .

A. Huber.

Žislin (Zhislin), G. M.: On the spectrum of Schrödinger's operator. Doklady Akad. Nauk SSSR 122, 331—334 (1958) [Russisch].

The author considers the Schrödinger operator

$$H = - \sum_{i=1}^n a_i \Delta_i - 2 a_0 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{r_i} + \sum_{i < j} \frac{c_{ij}}{r_{ij}},$$

where $a_i = a_0 + a'_i$, a'_i, b_i, c_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) are arbitrary positive numbers, and a_0 is any non-negative number. In a preceding note (this Zbl. 84, 308) the author considered the case when $a_0 = 0$. Here he includes the case $a_0 > 0$. A self-adjoint operator \tilde{H} in $L^2(R_{3n})$ naturally associated with H is considered, and it is shown that the limit spectrum of \tilde{H} consists of a halfline $\lambda \geq \mu_1$, for some $\mu_1 < 0$. If, in addition, $b_i > \sum_{j \neq i} c_{ij}$, ($i = 1, \dots, n$), then the spectrum to the left of μ_1 is discrete, consisting of eigenvalues λ_p tending to μ_1 . The corresponding eigenfunctions ψ_p are infinitely differentiable, and satisfy $H \psi_p = \lambda_p \psi_p$ in R_{3n} , except where $r_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$), $r_{ij} = 0$ ($i, j = 1, \dots, n$; $i \neq j$).

E. A. Coddington.

Lions, Jacques-Louis: Sur l'existence de solutions des équations de Navier-Stokes. C. r. Acad. Sci., Paris 248, 2847—2849 (1959).

Existenzbeweis von Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen, die zugleich mit ihren Ableitungen nach t von der Ordnung γ ($0 < \gamma < \frac{1}{4}$) über t quadratisch

integrabel sind. Jedoch scheinen diese Lösungen nicht „stark“ genug zu sein, um die Eindeutigkeit zu garantieren. *C. Heinz.*

Cammino, Gianfranco: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico.* Rend. Sem. mat. fis. Milano **23**, 183—203 (1953).

Si espone un metodo per la dimostrazione di teoremi esistenziali relativi ai problemi al contorno per (1) $\Delta u = f(x, y)$. I. Teorema di completezza. Per ogni coppia formata da una funzione f definita in $D - FD$ e da una φ definita in FD , esiste una successione di combinazioni lineari u_n per cui riesce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\iint_D (\Delta u_n - f)^2 dx dy + \int_{FD} (u_n - \varphi)^2 ds \right] = 0$$

II. Teorema di convergenza. Se vale la (2), vi sarà una funzione u in $D - FD$, limite della successione della u_n , che verificherà (1) in $D - FD$ e si ridurrà ai valori assegnati su FD . III. Teorema di unicità. Una funzione $u(x, y)$ armonica in $D - FD$, per la quale sia $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{FD} u^2 ds = 0$ non può essere che identicamente nulla in $D - FD$.

M. Coroi Nedelcu.

Frostman, Otto: *Suites convergentes de distributions d'équilibre.* 13. Skand. Mat.-Kongr., Helsinki 1957, 86—89 (1958).

Let F be a compact set in a Euclidean space, let $\alpha > 0$ and let μ denote a non-negative unit mass supported by F . The energy of μ is $I^\alpha(\mu)$ and the α -capacity is $C^{(\alpha)}(F) = \inf_{\mu} [1/I^\alpha(\mu)]$. It is known that there is a non-negative unit mass $\mu^{(\alpha)}$ supported by F which minimizes the energy; and $\mu^{(\alpha)}$ is unique if $C^{(\alpha)}(F) > 0$. The author considers the following problem. Given $\beta > 0$; assume that $C^{(\alpha)}(F) > 0$ for all $\alpha < \beta$. What happens to the set $\{\mu^{(\alpha)}\}$ as $\alpha \rightarrow \beta$? If $C^{(\beta)}(F) > 0$ then the author shows that $\mu^{(\alpha)}$ converges "vaguely" to $\mu^{(\beta)}$ as $\alpha \rightarrow \beta$. If $C^{(\beta)}(F) = 0$, and F is a rectifiable curve (length l) in the plane, then the author shows

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \left[\frac{C^{(\alpha)}(F)}{1 - \alpha} \right] = \frac{1}{2} l$$

and the $\mu^{(\alpha)}$ converge "vaguely" to some mass on F . The proof does not appear to be complete. *M. O. Rade.*

Variationsrechnung:

Malinskij (Malinsky), K. K.: *On the form of the second variation of the multiple integral with the varied domain of the integration.* Vestnik Leningradsk. Univ. **14**, Nr. 1 (Ser. Mat. Mech. Astron. 1) 140—144, engl. Zusammenfassung 144 (1959) [Russisch].

The author considers the multiple integral $I(\alpha) = \int_T F(x, u(x, \alpha), u_x(x, \alpha)) dx$,

where $x = (x_1, \dots, x_m)$, $u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_m})$, $u_{x_1} \equiv \partial u / \partial x_1$, etc. By means of the standard technique of the calculus of variations the author constructs the first variation

$$\delta I = \int_T \delta F d\tau + \int_S F \delta n d\sigma = 0, \quad \text{where} \quad d\tau = dx_1 \cdots dx_m, \quad d\sigma = dt_1 \cdots dt_{m-1},$$

where t_i are the parameters on which the x_k 's depend, i. e., $x_k = x_k(t_1, \dots, t_{m-1})$, $k = 1, \dots, m$. The condition $\delta I = 0$ leads in the usual way to the Euler-Lagrange

called by the author Euler-Poisson) differential equation, to which there is attached the usual transversality condition. Next, the author constructs the second variation,

$$\delta^2 I = \int_T \delta^2 F d\tau + \int_N \cdots d\sigma, \quad \text{which is subject to certain formal operations,}$$

resulting in the expression $\delta^2 I = \int_T \left(\sum_{r, l=1}^m a_{rl} v_{xr} v_{xl} - \cdots \right) d\tau + \int_S \cdots d\sigma$. The

author discusses the conditions for which $\delta^2 I > 0$ (sufficient conditions) and $\delta^2 I \geq 0$ (necessary conditions).

M. Z. v. Krzywoblocki.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

● Yosida, Kôzaku: Lectures on differential and integral equations. (Pure and Applied Mathematics. Vol. X.). New York and London: Interscience Publishers 1966 IX, 220 p.

Vgl. die Besprechung des japanischen Originals in diesem Zbl. 83, 97.

Woodward, David A.: On a special integral equation. Proc. Amer. math. Soc. 10, 853—854 (1959).

R. H. Cameron posed the following question [Analyse Math. 5, 136—18 (1957)]: does the equation

$$y(t) = x(t) + \int_0^t [x(s)]^2 ds, \quad 0 \leq t \leq 1$$

have a solution $x \in C$ for almost every choice of $y \in C$, "almost every" being taken in the sense of Wiener? C denotes the space of continuous functions on $(0, 1)$ vanishing for $t = 0$. The author shows that the question must be answered in the negative. He constructs the following uniform neighbourhood N of C : $N = \{y \in C \mid |y(t) + 4t| < \frac{1}{2}, t \in (0, 1)\}$ and proves that if $y \in N$ and $x \in C$ there is a contradiction, for N has positive measure. C. Racine.

Vladimirov, V. S.: Über eine Integro-Differentialgleichung. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 21, 3—52 (1957) [Russisch].

Eine Monographie über die lineare Integro-Differentialgleichung

$$\frac{1}{a(P)}(s, \text{grad } \varphi) + \varphi = \lambda b(P) \int_{\Omega} \varphi(s, P) ds + F(s, P), \quad a(P), b(P) > 0,$$

im Rahmen der Funktionalanalysis und der Operatorentheorie. Sie soll von diesem Standpunkt aus das bekannte Material über diese Gleichung zusammentragen und begründen, sowie neue Ergebnisse hinzufügen. Die unbekannte Funktion $\varphi(s, P)$ hängt ab von einem Punkt P einer offenen, beschränkten Menge G im R_n und von der Richtung s in diesem Raum. Ω bedeutet die $(n-1)$ -dimensionale Menge aller Richtungen s in R_n , repräsentiert durch die Einheitsvektoren. $(s, \text{grad } \varphi) = \partial \varphi(s, P + \xi s) / \partial \xi|_{\xi=0}$ ist das gewöhnliche skalare Produkt in R_n . Die auftretenden Integrale sind alle im Lebesgueschen Sinne zu verstehen. — Es werden genaue Angaben über die Struktur von G und die Natur der Koeffizientenfunktionen $a(P)$ und $b(P)$ gemacht. Wesentlich zugrunde gelegt wird der Hilbertsche Raum H des samt ihrem Quadrat in $\Omega \times G$ summierbaren Funktionen mit der üblichen mit $a(P)$ als Gewichtsfunktion versehenen Metrik. Ihm sollen $F(s, P)$ und $\varphi(s, P)$ angehören, wobei $\varphi(s, P)$ noch gewisse Randbedingungen bezüglich G befriedigen soll, die in Falle $n = 1$ vom Typus der Sturm-Liouvilleschen Randbedingungen sind, und es soll $l\varphi = [(s, \text{grad } \varphi)/a(P)] + \varphi$ ebenfalls dem Raume H angehören: $\varphi \in D \subset H$. Bezeichnet man den durch $l\varphi$ in D definierten linearen Differentialoperator mit $L\varphi$ und den Integraloperator $\int_{\Omega} \varphi(s, P) ds$ mit $S\varphi$, so nimmt die Gleichung die Operatorenform $L\varphi = \lambda b S\varphi + F$ an, die Gegenstand der Abhandlung ist. — Zur Vorbereitung dienen Untersuchungen der Eigenschaften der Operatoren L und S (L besitzt einen inversen Operator L^{-1} und einen adjungierten, in UD definierten $L^* = ULU$, wobei $UF = F(-s, P)$ ist; S ist beschränkt und selbstadjungiert in H) und der Peierlsschen Integralgleichung $n(P) = \lambda K n(P) + f(P)$ mit dem Operator

$$K n(P) = \int_G a(P') b(P') K(P, P') n(P') dP', \quad P \in G,$$

dessen symmetrischer Kern die Form hat:

$$K(P, P') = \frac{1}{|P - P'|^{n-1}} \exp \left\{ -|P - P'| \int_0^1 a[tP + (1-t)P'] dt \right\}$$

Peierls, dies. Zbl. 22, 429). Da der Operator K vollstetig und selbstadjungiert ist und überdies jede nichtnegative Funktion aus G in eine positive überführt, so ist die Peierlssche Gleichung vom Fredholmschen Typus, ihr Spektrum ist somit erkannt und hat die üblichen Eigenschaften; zudem sind die Eigenwerte λ_k ($k = 1, 2, \dots$) positiv, der kleinste λ_1 ist einfach und die zugehörige Eigenfunktion $n_1(P)$ ist ebenfalls positiv. — Es wird gezeigt, daß durch die Substitution $n = S\varphi$ die vorgelegte Gleichung in die Peierlssche mit $f = S L^{-1} F$ übergeführt werden kann. Beide haben die gleiche Anzahl von wesentlich verschiedenen Lösungen. Definiert man das Spektrum des Operators L entsprechend der vorgelegten Operatorgleichung, also reguläre Punkte von λ durch die Existenz von $(L - \lambda b S)^{-1}$ in H und Eigenwerte durch das Bestehen von $L\varphi_k = \lambda_k b S\varphi_k$, so stimmt es mit dem Spektrum des Operators K überein: die Eigenwerte λ_k sind einschließlich ihrer Vielfachheit die gleichen, und die Eigenfunktionen φ_k bzw. n_k sind durch $n_k = S\varphi_k$ verknüpft. Es lassen sich ferner fast sämtliche Eigenschaften des Operators K auf L übertragen. Für $\lambda \neq \lambda_k$ existiert eine eindeutig bestimmte Lösung φ der inhomogenen Gleichung $L\varphi = \lambda b S\varphi + F$, und zwar ist für alle $F \in H$

$$\varphi = \lambda L^{-1} b (I - \lambda K)^{-1} S L^{-1} F + L^{-1} F \quad (I \text{ ist der Einheitsoperator}).$$

Diese Lösung hängt stetig von a, b und F ab. Somit ist die Aufgabe der Lösung der Gleichung in der vorgelegten Form korrekt gestellt. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen hängen ebenfalls stetig von a und b ab. Ein Unterschied besteht, abgesehen davon, daß L nicht selbstadjungiert ist, darin, daß das System der Eigenfunktionen φ_k nicht wie dasjenige der n_k im zugehörigen Raum vollständig ist. — Anschließend werden noch nach dem Muster der Iterationsmethode von Kellogg zur genäherten Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen eines vollstetigen und symmetrischen Operators [Math. Ann. 86, 14—17 (1922)] Formeln angegeben, die zur Berechnung von λ_1 und φ_1 sowie der Lösung φ der inhomogenen Gleichung für $\lambda < |\lambda_1|$ durch Bildung aufeinanderfolgender Näherungen dienen. Dazu werden in der jeweiligen Metrik Fehlerabschätzungen bewiesen, die die Konvergenz des Verfahrens gewährleisten. Schließlich wird die vorgelegte Gleichung mit ihrer Adjungierten $L^*\psi = \lambda b S\psi + F$, $\psi \in UD$, in einer Integro-Differentialgleichung zweiter Ordnung zusammengefaßt:

$$-\frac{1}{a(P)} \left(s, \operatorname{grad} \frac{1}{a(P)} (s, \operatorname{grad} u) \right) + u = \lambda b(P) \int_{\Omega} u(s, P) ds + F(s, P),$$

deren Lösungen u vermöge $\varphi = u + v$, $\psi = u - v$, $v = -(s, \operatorname{grad} u)/a(P)$ alle Lösungen φ und ψ der beiden adjungierten Gleichungen erster Ordnung liefern, und deren Operator L_0 , der von der linken Seite der Gleichung gebildet wird, alle die vorteilhaften Eigenschaften von L besitzt, außerdem aber noch selbstadjungiert ist. Infolgedessen lassen sich auf ihn die Maximum-Minimum-Variationsprinzipien von Courant anwenden, die eine näherungsweise Berechnung der Eigenwerte λ_k und der Lösung der inhomogenen Gleichung mit Hilfe der direkten Methoden der Variationsrechnung gestatten. Alle die erwähnten Aufgabestellungen werden des näheren mit sämtlichen zugehörigen Beweisen ausgeführt.

E. Svenson.

Vekua, N. P.: Über ein Verfahren der Lösung von singulären Integrodifferentialgleichungen. Soobščeniia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR 23, 129—134 (1959) [Russisch].

The author considers a system of singular integro-differential equations of the form

$$I) \quad A(t_0) \frac{d\varrho(t_0)}{dt_0} + B(t_0) \varrho(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \left[K(t_0, t) \varrho(t) + \Gamma(t_0, t) \frac{d\varrho(t)}{dt} \right] \frac{dt}{t - t_0} = f(t_0).$$

where L denotes a smooth contour in the complex plane $z = x + iy$; $A(t_0)$, $B(t_0)$, $K(t_0, t)$, $\Gamma(t_0, t)$ are matrices of order n , satisfying Hölder's condition. (H),

defined on L ; $f(t_0) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ is a given vector satisfying (H); $\varrho(t_0)$ is a vector. As it is seen, the singular integro-differential equation of the kind

$$(II) \quad \sum_{k=0}^m a_k(t_0) \frac{d^k \mu(t_0)}{dt_0^k} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{H_k(t_0, t) d^k \mu(t)/dt^k}{(t - t_0)} dt = g(t_0),$$

can be transformed into the system (I) by means of the proper substitutions. In 1934 A. I. Nekrasov (this Zbl. 11, 72) furnished a simple method of solving integro-differential equations of the Fredholm type

$$(III) \quad a_0(x) \frac{d^n z(x)}{dx^n} + \dots + a_n(x) z(x) + \lambda \int_a^b \left[b_0(y) \frac{d^m z(y)}{dy^m} + \dots + b_m(y) z(y) \right] K(x, y) dy = 0.$$

The author adjusts the method of Nekrasov to solving Eq. (I). The author begins with the equation

$$(IV) \quad A(t_0) d\varrho(t_0)/dt_0 + B(t_0) \varrho(t_0) = \mu(t_0),$$

with the conditions that the $\det A(t_0)$ is not equal to zero; in the first step he assumes the fundamental solutions of (IV) with zero on the right hand side. Having these the solution of the system (IV) can be constructed; by means of a sequence of operations the author reduces (I) to the form to which (IV) can be extended, thus solving the problem. In the closing paragraph the author points out that the problem of Cauchy for (I) can be solved by means of technique proposed previously by himself [Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR 22, 641—648 (1959)]. *M. Z. v. Krzywoblocki.*

Hsiang, Fu-Cheng: An inequality for Fourier transforms. *Portugaliae Math.* 18, 87—89 (1959).

Es sei $\varphi(t)$ reell und $\in \mathcal{L}(-\infty, \infty)$, ferner $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \varphi(t) dt$. Wenn $f(x) = 0$ für $|x| \geq R$ ist, so gilt:

$$|f(0)| + \frac{1}{3} |f(x)| \leq \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt \quad \text{für } |x| \geq \frac{R}{2}. \quad G. Doetsch.$$

Saltz, Daniel: An inversion theorem for Laplace-Stieltjes transforms. *Pacific J. Math.* 10, 309—312 (1960).

In Verallgemeinerung einer im wesentlichen von Phragmén herrührenden Umkehrformel der Laplace-Transformation wird für die Laplace-Stieltjes-Transformation

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t) \equiv \mathcal{L}_S\{\alpha(t)\}$$

gezeigt: Wenn $\alpha(t)$ lokal von beschränkter Variation ist und $\mathcal{L}_S\{\alpha(t)\}$ für ein $s > 0$ konvergiert, so gilt:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} f(ns) e^{nst} = \begin{cases} [\alpha(0+) - \alpha(0)] (1 - e^{-1}) & \text{für } t = 0 \\ [\alpha(t) - \alpha(0) - [\alpha(t+) - \alpha(t-)] (e^{-1} - \frac{1}{2})] & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

G. Doetsch.

Narain, Roop: Some properties of generalized Laplace transform. IV. *Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat.* 18, 35—41 (1960).

Teil III s. dies. Zbl. 89, 88. Für die verallgemeinerte Laplace-Transformation

$$\Phi(s; k, m) = s \int_0^{\infty} (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-st/2} W_{k, m}(st) f(t) dt \equiv W[f(t); k, m]$$

wird eine Formel bewiesen, die $W[t^{\nu-1} f(1/t); \lambda, \mu]$ durch ein Integral über $\Phi(y; k, m)$ ausdrückt, wo $\Re(\nu + 1 + \mu + m \pm m \pm \mu) > 0$. *G. Doetsch.*

Chandra Arya, Suresh: Abelian theorem for a generalization of Laplace transformation. Collect. Math. 11, 3—12 (1959).

Wenn die verallgemeinerte Laplace-Transformation

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st/2} (st)^{m-1/2} W_{k,m}(st) d\alpha(t)$$

für $s > 0$ konvergiert, so gilt für jede Konstante A :

$$\lim_{s \rightarrow 0 (s \rightarrow \infty)} |s^{\nu-k-m+1/2} f(s) - A| \leq \lim_{t \rightarrow \infty (t \rightarrow 0)} \left| C \frac{\alpha(t)}{t^{\nu-k-m+1/2}} - A \right|,$$

wo C ein Γ -Quotient ist, vorausgesetzt, daß $\alpha(t)$, ν , k , m gewisse Bedingungen erfüllen.
G. Doetsch.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

● Kolmogorov, A. N. und S. V. Fomin: Elemente der Funktionentheorie und der Funktionalanalysis. Lieferung II: Maß, Lebesguesches Integral, Hilbertscher Raum. [Elementy teorii funkciij i funkcional'nogo analiza. Vypusk II: Mera, integral Lebege, Gilbertovo prostranstvo]. Moskau: Verlag der Universität 1960. 119 S. R. 3,50 [Russisch].

Dieses Bändchen ist eine unmittelbare Fortsetzung des ersten Teils (dies. Zbl. 57, 336). Der Inhalt ist folgender: Kapitel V: Maßtheorie. Kapitel VI: Meßbare Funktionen. Kapitel VII: Das Lebesguesche Integral. Kapitel VIII: Funktionen mit integrierbarem Quadrat. Kapitel IX: Abstrakter Hilbertscher Raum, Integralgleichungen mit symmetrischem Kern. — Der Stoff ist sehr sorgfältig dargelegt, mit mancherlei interessanten Bemerkungen, die mit dem breiten Gesichtspunkt der Verff. übereinstimmen. Als eine kurze Einführung in die Theorie des Maßes und des Hilbertschen Raum ist das Buch sehr nützlich, doch ein vollständiges Lehrbuch für den ernsthaften Studenten ist es nicht.
E. Hewitt.

● Cristescu, Romulus: Geordnete lineare Räume. [Spații lineare ordinate.] (Biblioteca Matematică. 3.) București: Editura Academiei Republicii Populare Romîne 1959. 330 S. Lei 11,10 [Rumänisch].

The book is divided into nine chapters. In the first the basic definitions concerning ordered sets are given. Boolean algebras are studied and the Stone isomorphism theorem (a boolean algebra is isomorphic with the boolean algebra of all closed and open parts of a totally disconnected compact space) is proved. In a final paragraph various types of convergence are defined and studied; for instance, order convergence, (t) -convergence and convergence in Nakano's sense [a sequence (x_n) converges in Nakano's sense to x if $\lim (\sup (\inf (x_n, a), b)) = \sup (\inf (x, a), b)$ for all a, b]. In chapter II the notion of ordered vector space is introduced and various general properties are given. In particular, ordered vector spaces which are relatively σ -complete lattices and ordered vector spaces which are relatively complete lattices (Riesz spaces) are studied. Special mention should be made of the paragraphs in which the author studies the decomposition into components and the paragraphs in which he defines and studies in detail the projection operator on a component (if the considered space is a Riesz space then P is a projection operator if and only if $P^2 = P$, P is linear and $0 \leq Px \leq x$ if $x \geq 0$). In chapter III the author studies ordered vector spaces with unit element (e is a unit element if $\inf (|e|, |x|) = 0$ implies $x = 0$). For elements x in a relatively σ -complete ordered vector space the

following formula [due to H. Freudenthal (this Zbl. 14, 313)] $x = \int_{-\infty}^{+\infty} t de(t, x)$

is established. Various categories of ordered vector spaces, satisfying supplementary conditions, are defined and studied. In particular, ordered vector spaces endowed with a family (p_j) of semi-norms verifying the relations $p_j(x) \leq p_j(y)$ whenever

$|x| \leq |y|$, are considered. Spaces with strong unit are also studied. It is shown that in a space with strong unit a norm can be introduced in a natural way; the corresponding normed space is a Banach space and has the binary intersection property provided it is a relatively complete ordered vector space. In chapter IV various classical examples of ordered vector spaces are given. Linear and bilinear operators, with domain and range contained in ordered vector spaces, are studied in detail in chapter V. A generalization of the Hahn-Banach theorem for linear mappings with range in a relatively complete ordered vector space is given. Various other results concerning the extension of positive linear operators are proved. In chapter VI are studied ordered algebras or more generally ordered vector spaces in which one can define in a natural way a product for certain pairs of elements (as for instance in relatively σ -complete ordered vector spaces). In the last paragraph are studied multiplicative operators. Chapter VII is concerned with the integration theory, for functions having range in a " σ -regular" relatively σ -complete ordered vector spaces E . The measures m considered have their range in another " σ -regular" relatively σ -complete ordered vector space F . It is supposed that a bilinear mapping (with certain properties) $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ of $E \times F$ into G (G = a " σ -regular" relatively σ -complete ordered vector space) is given. The integrals defined are of the form $\int \langle x(t), dm(t) \rangle$. The integral is first defined for simple functions and then extended to a certain class of measurable functions. The method used here is suggested by S. Bochner's approach (this Zbl. 23, 116). The author indicates also various applications. Concerning this chapter see also E. J. McShane, Order preserving maps and integration processes (this Zbl. 51, 293). Various mean ergodic theorems as well as H. Nakano's ergodic theorems (this Zbl. 32, 359) are presented in chapter VIII. In chapter IX are studied various functional equations (linear and non-linear) by means of the theory of ordered vector spaces. The method of successive approximations and the majorant principle are presented in an abstract form and applications to special cases are derived. The book is well written, the definitions are precise and the proofs presented are complete.

C. Ionescu Tulcea.

Brainerd, Barron: On the embedding of a vector lattice in a vector lattice with weak unit. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 62, 25—31 (1960).

Hat ein Element x eines Vektorverbandes V die Eigenschaft, daß bei beliebigem $y \geq 0$, $y \in V$ das Supremum $\bigvee_n^{1, \infty} n|x| \wedge y$ existiert, so definiert man den Projektor

$[x]$ von x , eine Abbildung von V in sich, wie folgt: ist $y \geq 0$, so $[x]y = \bigvee_n^{1, \infty} n|x| \wedge y$; ist $y \not\geq 0$, so $[x]y = [x]y^+ - [x]y^-$. Nach Amemiya (dies. Zbl. 53, 258) heißt ein Vektorverband, in dem jedes Element einen Projektor besitzt, projizierbar. Verf. zeigt zunächst, daß sich jeder projizierbare Vektorverband V in einen projizierbaren Vektorverband L , der eine schwache Eins besitzt, einbetten läßt. Dabei ist V ordnungs-dicht in L . Ist ferner V archimedisch oder σ -vollständig, so auch L . Der konstruierte Vektorverband L ist jedoch, wie Verf. an einem Beispiel zeigt, durch die genannten Eigenschaften nicht bis auf Isomorphie bestimmt. Mit Hilfe eines Satzes von Amemiya (loc. cit.) folgt hieraus, daß sich jeder beliebige Vektorverband R ordnungs-dicht in einen projizierbaren Vektorverband L mit schwacher Eins einbetten läßt. Ist R archimedisch, so kann L ebenfalls archimedisch, vollständig und darüber hinaus so gewählt werden, daß jedes positive Element aus L Supremum von Elementen aus R ist. Als Korollar ergibt sich die Einbettbarkeit jedes archimedischen Vektorverbandes in einen vollständigen, regulären F -Ring.

G. Bruns.

Gordon, Hugh: Topologies and projections on Riesz spaces. Trans. Amer. math. Soc. 94, 529—551 (1960).

Es sei V ein Rieszscher Raum (Vektorverband) und V^* der vollständige Rieszsche Raum aller relativ beschränkten Linearformen auf V . Nach F. Riesz (dies. Zbl. 22, 318

ist dann die Menge M aller im Sinne der Daniellschen Integrationstheorie stetigen Linearformen aus V^* ein Band in V^* , d. h. es existiert ein Projektor P von V^* auf M derart, daß die Abbildungen P und $I - P$ positiv sind. Nach Resultaten des Ref. (dies. Zbl. 52, 265) bleibt diese Aussage richtig bei allgemeineren, mit Hilfe gerichteter Systeme definierten Stetigkeitsbegriffen. Dieser Fragenkomplex erhält in der vorliegenden Arbeit eine weitgehende Verallgemeinerung und natürliche Abrundung: Hierzu werden zunächst ähnlich wie bei Isaak Namioka [Mem. Amer. math. Soc. 24 (1957)] topologische Rieszsche Räume definiert und zusammen mit ihren Dualräumen untersucht. Ist sodann V ein Rieszscher Raum mit Topologien τ_1 und τ_2 , welche mit seiner algebraischen Struktur verträglich sind (Rieszsche Topologien), so wird die Menge M aller τ_2 -stetigen Linearformen aus dem topologischen Dualraum $V_{\tau_1}^*$ von V bezüglich τ_1 betrachtet und untersucht, wann M ein Band in dem vollständigen Rieszschen Raum $V_{\tau_1}^*$ ist. Hierfür wird eine notwendige und hinreichende Bedingung in Form einer Verträglichkeitsaussage über τ_1 und τ_2 angegeben. In Analogie zu den klassischen Fällen werden im letzten Teil der Arbeit Rieszsche Topologien τ_2 mit Hilfe gerichteter Systeme konstruiert derart, daß τ_2 mit einer oder sogar mit jeder Rieszschen Topologie auf einem Rieszschen Raum V im Sinne obiger Bedingung verträglich ist. Zu gegebener Rieszscher Topologie τ_1 auf V und zu gegebenem Band M in $V_{\tau_1}^*$ wird umgekehrt die Existenz einer durch gerichtete Systeme definierten Topologie τ_2 auf V bewiesen, bezüglich welcher M die Menge der τ_2 -stetigen Linearformen aus $V_{\tau_1}^*$ ist.

H. Bauer.

Zamansky, Marc: Sur l'intégrale de Daniell. Bull. Soc. math. Belgique 10, 67—78 (1958).

§ 1: Dans un groupe E de Riesz une semi-norme φ est introduite. Par rapport à φ on peut définir les notions de suite convergente, de suite de Cauchy et de suites équivalentes. Dans un groupe de Riesz semi-normé, dont les éléments positifs forment un ensemble fermé, il suit de la convergence de toute suite monotone et bornée que E est complet. §§ 2 et 3: E groupe de Riesz de fonctions numériques définies sur un ensemble abstrait A avec semi-norme $J(|x|)$, dérivée d'une forme linéaire positive $J(x)$ sur E . Axiome usuel: Pour toute suite (x_n) décroissante et convergeant simplement vers zéro, $J(x_n)$ tend vers zéro. Définition (de Riesz): A toute suite monotone $x_n(t)$, $t \in A$, $x_n \in E$ avec $\{J(x_n)\}$ bornée est associée un sous-ensemble e de A tel que si $t \in e$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n(t)| = +\infty$; ensemble négligeable est toute partie ou toute réunion

finie d'ensembles e . Déf.: α . Le complété \hat{E} de E est constitué par les classes d'équivalences définies par les suites de Cauchy de E (p. r. à $J(|f|)$); β . L est l'ensemble des fonctions f réelles (finies ou infinies) définies sur A qui sont limites simples de suites de Cauchy de E sauf aux points d'ensembles négligeables; \hat{L} est constitué par les classes de fonctions dans L , qui sont égales dans A sauf aux points d'ensembles négligeables. Théorème: Il existe une application biunivoque de \hat{E} , sur \hat{L} . (Cf. Zamansky, ce Zbl. 85, 43; 88, 42).

J. Ridder.

Präger, Milan: Über ein Konvergenzprinzip im Hilbertschen Raum. Czechosl. math. J. 10 (85), 271—282, deutsche Zusammenfassung 282 (1960) [Russisch].

Let H be a Hilbert space, H_i ($i = 1, 2, \dots, k$) its subspaces and P_i the projection on H_i . The author considers the sequence $A_n = P_{i_1} \cdots P_{i_n}$, where i_j stands for an integer, $1 \leq i_j \leq k$. The theorem due to J. v. Neumann and N. Wiener is generalized to the case $k > 2$, further the weak convergence of the operators A_n to the projection on $H_0 = \bigcap_{i=1}^k H_i$ is proved, provided that the following conditions are satisfied: 1. any number i , $1 \leq i \leq k$ is repeated in the sequence $\{i_n\}$ infinitely many times. 2. There is a constant K such that if $i_s = i$, $i_t = i$, $s < t$, $i_p \neq i$ for $s < p < t$, then $t - s < K$ holds. [The same theorem was previously published by

F. E. Browder, J. Math. Mech. **7**, 69—80 (1958)]. In the case of finite dimensional space the convergence is strong and it is sufficient to assume only 1). This result is used to prove a general theorem on the relaxation method of solving systems of linear algebraic equations. The author mentions, that some assertions on the weak convergence of A_n may be established, if H_i is an infinite sequence of subspaces.

He proves the strong convergence of A_n to the projection on $\bigcap_{i=1}^{\infty} H_i$, if A_n is defined by the equation $A_n = S_n A_{n-1} S_n$, where $S_n = P_1 P_2 \cdots P_{n-1} P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1$,
 $A_1 = P_1$ R. Výborný.

Taam, C. T.: Compact linear transformations. Proc. Amer. math. Soc. **11**, 39—42 (1960).

Ist $C(E)$ der Banachraum der auf einem kompakten Hausdorffraum E stetigen Funktionen, so wird gezeigt, daß sich jede kompakte lineare Abbildung T von einem Banachraum A in $C(E)$ in der Norm durch stetige lineare Abbildungen mit endlich-dimensionalen Bildräumen approximieren läßt. Diese Aussage kann als Spezialfall aus Ergebnissen von A. Grothendieck (dies. Zbl. **64**, 355), entnommen werden.

A. Pietsch.

Thorp, Edward O.: Note on linear operators. J. reine angew. Math. **203**, 110—112 (1960).

Es werden einige Sätze der folgenden Art bewiesen: Sind S und T nichtabzählbare Indexmengen, so ist für $\infty > p > q \geq 1$ jede beschränkte lineare Abbildung von $l^p(S)$ in $l^q(T)$ kompakt. Ein Diagramm von Taylor und Halberg (dies. Zbl. **78**, 103) wird ergänzt.

A. Pietsch.

Kato, Tosio: Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators. J. Analyse math. **6**, 261—322 (1958).

Im folgenden seien X und X' zwei komplexe Banachräume und A eine abgeschlossene lineare Abbildung aus X in X' , deren Definitionsbereich $D(A)$ ein beliebiger Unterraum von X sein kann. Mit $N(A)$ wird der Nullraum und mit $R(A)$ der Bildraum von A bezeichnet. Als untere Schranke von A wird die obere Grenze $\gamma(A)$ aller Zahlen $\gamma \geq 0$ mit $\|Ax\| \geq \gamma d(x, N(A))$ für $x \in D(A)$ eingeführt. $R(A)$ ist dann und nur dann abgeschlossen, wenn $\gamma(A) > 0$ gilt. Falls die Adjungierte A^* von A existiert, hat man $\gamma(A^*) = \gamma(A)$. Folglich ist $R(A^*)$ genau dann abgeschlossen, wenn $R(A)$ abgeschlossen ist. Nun wird vorausgesetzt, daß wenigstens eine der Zahlen $\alpha(A) = \dim N(A)$ und $\beta(A) = \dim X'/R(A)$ endlich sein soll und daß $R(A)$ abgeschlossen ist. Hat man dann eine lineare Abbildung B mit $D(B) \supset D(A)$, so daß für zwei negative Zahlen σ und τ mit $\sigma + \tau \cdot \gamma(A) < \gamma(A)$ die Abschätzung $\|Bx\| \leq \sigma \|x\| + \tau \|Ax\|$ für $x \in D(A)$ gilt, so ist $A + B$ eine abgeschlossene lineare Abbildung mit abgeschlossenem Bildraum und es bestehen die Beziehungen $\alpha(A + B) \leq \alpha(A)$ und $\beta(A + B) \leq \beta(A)$. Ohne die Voraussetzung, daß entweder $\alpha(A)$ oder $\beta(A)$ endlich ist, werden, beginnend mit $M_0 = X$ und $N_0 = \{0\}$, die Unterräume $M_n = B^{-1}(A(M_{n-1}))$ und $N_n = A^{-1}(B(N_{n-1}))$ gebildet. Nun wird dem geordneten Paar (A, B) die von r mit $1 \leq r \leq n$ unabhängige Zahl $\nu(A : B) = \sup \{n : N_r \supset M_{n-r+1}\} + 1$ zugeordnet. Für $\nu(A : B) = +\infty$ existiert eine positive Zahl ϱ , so daß $A - \lambda B$ für alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| < \varrho$ eine abgeschlossene lineare Abbildung mit abgeschlossenem Bildraum ist, für die $\alpha(A - \lambda B) = \alpha(A)$, $\beta(A - \lambda B) = \beta(A)$ und $\nu(A - \lambda B : B) = +\infty$ gilt. Der Fall $\nu(A : B) < +\infty$ wird, allerdings unter zusätzlichen Voraussetzungen über A und B , durch Zerlegung der Räume X und X' auf den Fall $\nu(A : B) = +\infty$ zurückgeführt. Eine abgeschlossene und beschränkte lineare Abbildung B aus X in X' heißt streng singulär (strictly singular operator), wenn jeder Unterraum M von $D(B)$, zu dem es eine positive Zahl γ mit $\|Bx\| \geq \gamma \|x\|$ für $x \in M$ gibt, endlich-dimensional ist. Jede vollstetige lineare Abbildung ist streng singulär. In Hilbert-

räumen gilt auch die Umkehrung dieser Aussage. Ist A eine abgeschlossene lineare Abbildung aus X in X' mit abgeschlossenem Bildraum, für die $\alpha(A) < +\infty$ gilt, so ist mit einer streng singulären Abbildung B auch $A + B$ eine abgeschlossene lineare Abbildung mit abgeschlossenem Bildraum und $\alpha(A + B) < +\infty$.

A. Pietsch.

Joichi, J. T.: On closed operators with closed range. Proc. Amer. math. Soc. **11**, 80—83 (1960).

Für eine abgeschlossene lineare Abbildung T eines Banachraumes X in einen Banachraum Y , deren Definitionsbereich $D(T)$ in X dichtliegt, wird gezeigt, daß der Bildraum der Adjungierten dann und nur dann abgeschlossen ist, wenn T einen abgeschlossenen Bildraum besitzt. Die gleiche Aussage wurde mit einer anderen Methode bereits von T. Kato bewiesen (vgl. vorstehendes Referat). *A. Pietsch.*

Krasnosel'skij (Krasnosel'skii), M. A. and P. E. Sobolevskij (Sobolevskii): Fractional powers of operators acting in Banach spaces. Doklady Akad. Nauk SSSR **129**, 499—502 (1959) [Russisch].

Let E be a Banach space, $A: E \rightarrow E$ a linear operator, $D(A)$ the domain of A , $R(A)$ the range of A and I the identity operator. An operator A is called normal-positive (n. p.) if $D(A)$ is dense in E and $-t$ is a regular point of A for every $t \geq 0$ and

$$\|(A + tI)^{-1}\| \leq \frac{C}{1+t} \quad (t \geq 0)$$

with some constant C . For a number $\alpha \geq 0$ set

$$A^0 = I, \quad A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha) \cdots (n-\alpha)} \int_0^\infty t^{n-\alpha} (A + tI)^{-n-1} dt$$

where $n > \alpha - 1$. In the case $\alpha = k$ is an integer the coefficient is to be replaced by $(-1)^{k+1} \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}$. The definition of $A^{-\alpha}$ does not depend on n and for $0 < \alpha < 1$ one can set $n = 0$. If A is n. p. then $A^{-\alpha}$ forms a strongly continuous semigroup of bounded operators in the sense that $A^{-\alpha-\beta} x = A^{-\alpha} [A^{-\beta} x]$ for $\alpha, \beta \geq 0$ and $x \in E$. Furthermore if $A^{-\alpha} x = 0$ then $x = 0$, $R(A^{-\alpha})$ is dense in E and $R(A^{-\alpha}) \subset R(A^{-\beta})$ if $\alpha > \beta \geq 0$. The operator A^α ($\alpha > 0$) is defined as the inverse of $A^{-\alpha}$ and however one has $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ for all α, β . If $0 < \alpha < \beta$ then A^α is the closed linear extension of the restriction of A^α to $D(A^\beta)$. If α and β are of the same sign, $|\alpha| \leq |\beta|$, then

$$\|A^\alpha x\| \leq K(\alpha, \beta; C) \|A^\beta x\|^{\alpha/\beta} \cdot \|x\|^{1-\alpha/\beta}, \quad x \in D(A^\beta)$$

where K is a constant. We write $F < A^\alpha$ if $D(F) \supset D(A^\alpha)$ and $\|F x\| \leq K \|A^\alpha x\|$ for $x \in D(A^\alpha)$. If A is n. p. and if F is a closed operator such that

$$\|F x\| \leq K(\beta) \|A^\beta x\|^{\alpha/\beta} \|x\|^{1-\alpha/\beta}, \quad x \in D(A^\beta)$$

then $F < A^{\alpha+\varepsilon}$ for any $\varepsilon > 0$. Here $\varepsilon > 0$ cannot be replaced by $\varepsilon = 0$. If A and B are n. p. operators, $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ and $A^{\gamma_1} < B^{\gamma_2}$ then

$$\|A^{\alpha_1 \gamma_1} x\| \leq M(\alpha_1, \alpha_2) \|B^{\alpha_2 \gamma_2} x\|, \quad x \in D(B^{\alpha_2 \gamma_2})$$

with $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$. The following theorem generalizes the wellknown theorem of E. Heinz (this Zbl. **43**, 326). If $A: E \rightarrow E$, $B: E^* \rightarrow E^*$ and both A and B are n. p. $F: E \rightarrow E$ is closed and $F < A^{\gamma_1}$ (in E), $F^* < B^{\gamma_2}$ (in E^*) where $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, then

$$\|y^* [F x]\| \leq C(\varrho_1, \varrho_2) \|A^{\varrho_1 \gamma_1} x\|_{E^*} \|B^{\varrho_2 \gamma_2} y^*\|_{E^*},$$

$x \in D(A^{\gamma_1})$, $y^* \in D(B^{\gamma_2})$ where $\varrho_1, \varrho_2 \in [0, 1]$ and $\varrho_1 + \varrho_2 > 1$. Problem: "It would be interesting and for the application important to find in a Hilbert space classes of non-selfadjoint operators and in a Banach space classes of operators such that $\|A x\| \leq \|B x\|$ implies $\|A^\alpha x\| \leq \|B^\alpha x\|$ for all $\alpha \in [0, 1]$ and $x \in D(B^\alpha)$ ".

S. Kurepa.

Santos Guerreiro, J.: La multiplication des distributions comme application linéaire continue. *Portugaliae Math.* **18**, 55—67 (1959).

Ist C_π der lokalkonvexe Raum der Distributionen und werden die stetigen linearen Abbildungen θ_{x_i} von C_π in sich durch die Ansätze $\theta_{x_i}(T) = x_i T$ mit $T \in C_\pi$ definiert, so gilt der folgende Satz: Durch die Zuordnung $\theta \leftrightarrow \varphi$ mit $\theta(T) = \varphi T$ und $\varphi = \theta(1)$ wird eine eindeutige Beziehung zwischen der Gesamtheit aller stetigen linearen Abbildungen von C_π in sich, die mit sämtlichen Abbildungen θ_{x_i} vertauschbar sind und dem Raum C^∞ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen hergestellt. Als Korollar ergibt sich die Aussage, daß zu der Distribution $S \in C_\pi$ dann und nur dann eine stetige lineare Abbildung θ von C_π in sich existiert, für die mit $\varphi \in C^\infty$ stets $\theta(\varphi) = S\varphi$ gilt, wenn S zu C^∞ gehört. Daraus folgt, daß sich das multiplikative Produkt φT mit $\varphi \in C^\infty$ und $T \in C_\pi$ ohne Verzicht auf die Stetigkeit nicht erweitern läßt. Ähnliche Aussagen gelten auch, wenn die zugrunde liegenden Distributionen auf der abgeschlossenen Hülle einer offenen und beschränkten Teilmenge des R^n definiert sind.

A. Pietsch.

Rosenblum, Marvin: On the Hilbert matrix. II. *Proc. Amer. math. Soc.* **9**, 581—585 (1958).

(For Part I see this Zbl. **80**, 105) — The Hilbert matrix is $H_k = ((n + m + 1 - k)^{-1})$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$, where k is real but not a positive integer. W. Magnus (this Zbl. **41**, 238) showed that the l_2 spectrum of H_0 is purely continuous and consists of the interval $[0, \pi]$. In the present note, the author considers the spectral nature of H_k . The result is summed up by his Theorem 5: (i) For all real $k \neq 1, 2, \dots$, H_k has continuous spectra of multiplicity one on $[0, \pi]$; (ii) if $k \leq \frac{1}{2}$, H_k has no point spectrum; (iii) if $k > \frac{1}{2}$, let p and q be the largest non-negative integers such that $2p < k - \frac{1}{2}$ and $2q < k - \frac{3}{2}$ respectively. Then $\pi \operatorname{cosec} \pi k$ and $-\pi \operatorname{cosec} \pi k$ are eigenvalues of H_k of multiplicities $p + 1$ and $q + 1$ respectively. H_k has no other point spectrum.

R. G. Cooke.

Hartman, Philip: On completely continuous Hankel matrices. *Proc. Amer. math. Soc.* **9**, 862—866 (1959).

Let $f = (f_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ be a sequence of complex numbers with $|f| = (\sum |f_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ finite. For two sequences f and g , let $[f, g] = \sum f_n g_n$. For a given f , let $f(t)$ denote the function of $L_2(0, 2\pi)$ having $\sum_0^\infty f_n e^{int}$ for its Fourier series, functions equal almost everywhere being regarded as identical. For given f , $H = H(f)$ denotes the Hankel matrix (f_{n+m}) , $n, m = 0, 1, 2, \dots$. The l. u. b. $[Hx, y]$ is denoted by $\|H\|$ and H is bounded if $\|H\|$ is finite. The author obtains a necessary and sufficient condition for the operator defined by H to be completely continuous on the same lines as the condition for boundedness obtained by Nehari (this Zbl. **77**, 106). Let $F(t) = f(-t) + g(t)$ where f is as above and $g = (0, g_1, g_2, \dots)$. A necessary and sufficient condition for H to be completely continuous is that there exists a g for which $F(t)$ is continuous. The corresponding condition for boundedness obtained by Nehari is that $F(t)$ is essentially bounded. The method used is to approximate to $H(f)$ by a sequence $H(f^{(n)})$ where $f^{(n)}$ has only a finite number of non-zero terms.

V. Ganapathy Iyer.

Rothe, E. H.: A note on gradient mappings. *Proc. Amer. math. Soc.* **10**, 931—935 (1959); **Errata.** *Ibid.* **11**, 999 (1961).

A continuous mapping of a subset V of a real Banach space E on its strong dual E^* is called completely continuous if the image of any bounded subset of V is relatively compact for the strong topology of E^* . The author considers a gradient mapping, namely one defined by the Fréchet differential $D(x, h)$ of a scalar function $I(x)$. He has already proved (this Zbl. **30**, 260) that if $D(x, h)$ is completely continuous, one has $|I(x + h) - I(x)| \leq \eta \|h\|$ where $\eta > 0$ is given in advance and h is such

that $|l_i(h)| < \frac{1}{2} \eta \|h\|$, $i = 1, \dots, N$, the l_i 's being elements of E^* determined by η . The purpose of this note is to prove a converse (theorem 1,1) when E satisfies the following property called property P : there exists a fundamental set $\{f_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ in E^* and a number $M > 0$ such that if $N_i = \{x \in E, f_i(x) = 0\}$ and $N^n = \bigcap_{i=1}^n N_i$ one may find a projection of norm $\leq M$ of E onto N^n . A Banach space with a base $\{b_i\}$ and a fundamental set of linear mappings $\{f_i\}$ such that $x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cdot f_i(x)$, in particular a reflexive Banach space with a base, has property P . In the general case the proof of the above mentioned converse is suggested by one easily found in this last case. Let l_1, \dots, l_p be p linearly independent elements of E^* and $N = \{x \in E, l_i(x) = 0, 1 \leq i \leq p\}$; then E is the direct sum of N and of a p -dimensional space. If $l \in E^*$ is such that $|l(y)| \leq \eta \|y\|$ for all $y \in N$ and a given $\eta > 0$, then $l(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i l_i(x) + R(x)$ where $|R(x)| \leq \eta \|n\|$, n being the component of x in N . Further there exists a projection of E onto N of norm $\leq M$ such that $|R(x)| \leq \varepsilon \|x\|$, $\varepsilon = M \eta$. Finally one may construct a mapping $D'(x, h)$ of E into E^* such that $|D(x, h) - D'(x, h)| \leq \varepsilon \|h\|$ and such that, under $D'(x, h)$, the image of V is contained in a subspace of E^* of finite dimension. The converse follows at once.

C. Racine.

Mirkil, H.: The work of Šilov on commutative semi-simple Banach algebras. *Notas Mat. Nr. 20*, 61 p. (1959).

Die vorliegende Arbeit ist eine Zusammenfassung der Šilovschen Untersuchungen über reguläre halb-einfache kommutative Banachalgebren. Zur Vorbereitung dienen folgende Abschnitte: Fundamentale Begriffe und Definitionen, Symmetrie, Quotienten- und Unterlgebren, Erzeugende Elemente, Analytische Funktionen in Banachalgebren, Algebren mit Einselement. Die nun folgenden Betrachtungen beziehen sich auf Šilovalgebren (= reguläre halb-einfache kommutative Banachalgebren). Es wird gezeigt, daß jedes Ideal Durchschnitt von Primäridealen ist. Anschließend wird die Darstellung von abgeschlossenen Idealen als Durchschnitt von abgeschlossenen Primäridealen behandelt (Ditkinsche Bedingung). Es folgen Anwendungen im Bereich der lokalkompakten abelschen Gruppen. Die folgenden Abschnitte enthalten in etwas abgeänderter Form die Theorie der Algebren vom Typ C [vgl. Šilov, Reguläre normierte Ringe (dies. Zbl. 45, 382), Kap. II]. Den Abschluß bilden die Šilovschen Untersuchungen (dies. Zbl. 53, 84) über homogene Algebren.

A. Pietsch.

Bear, H. S.: Some boundary properties of function algebras. *Proc. Amer. math. Soc.* 11, 1—4 (1960).

Es handelt sich um eine Weiterführung der früheren Untersuchungen des Verf. über Funktionenalgebren. (Vgl. dies. Zbl. 86, 316; die dort eingeführten Begriffe und Bezeichnungen werden im folgenden übernommen.) Es sei also A eine die Konstanten enthaltende, die Punkte von X trennende, echte, wesentliche, abgeschlossene Unter-algebra der Banach-Algebra $C(X)$ aller stetigen, komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorff-Raum X . Dieser sei homöomorph eingebettet in den Raum $\Sigma = \Sigma(A)$ aller maximalen Ideale von A : die Funktionen aus A können dann als stetige Funktionen auf Σ gedeutet werden. Schließlich wird $\Sigma \neq X$ gefordert. Maximummenge heiße jede Menge $\{x \in \Sigma: f(x) = |f|\}$, Nullmenge jede Menge $\{x \in \Sigma: f(x) = 0\}$, wenn hierbei f eine nicht-konstante Funktion aus A ist. Existiert zu einem positiven Radonschen Maß μ auf X ein Punkt $x \in \Sigma - X$ mit $f(x) = \int f d\mu$ für alle $f \in A$, so heißt μ ein Darstellungsmaß. Bewiesen werden u. a. folgende Resultate: Die auf eine Maximummenge E eingeschränkte Algebra $A|_E$ ist in $C(E)$ abgeschlossen; wird $A|_X$ zusätzlich als maximal in $C(X)$ vorausgesetzt, so ist sogar $A|_E = C(E)$. Ferner ist $\mu(E) = 0$ für jedes Darstellungsmaß, sofern E eine in X enthaltene Maximummenge ist. Gilt umgekehrt $A|_E = C(E)$ für eine abgeschlossene

Menge $E \subset \Sigma$, so ist E eine Nullmenge. Schließlich werden noch Aussagen gemacht unter der Voraussetzung, daß jede stetige reelle Funktion auf X gleichmäßig durch Realteile von Funktionen aus \mathcal{A} approximiert werden kann. Die hier gewonnenen Resultate verallgemeinern bekannte Sätze von M. und F. Riesz [Quatrième Congrès des Math. Scand. 1916, pp. 27—44 (1919)] und W. Rudin (dies. Zbl. 73, 297) über die spezielle Algebra \mathcal{A} aller auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $|z| \leq 1$ stetigen, in $|z| < 1$ holomorphen Funktionen. H. Bauer.

Oniščik, A. L.: Complex hulls of compact homogeneous spaces. Soviet Math., Doklady 1, 88—91 (1960); Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 130, 726—729 (1960).

Let $X = \mathfrak{K}/\mathfrak{L}$ be the homogeneous space of the compact Lie group \mathfrak{K} over the compact (connected) Lie subgroup \mathfrak{L} and $Z = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ be its complex envelope. A complex continuous function on X is called spherical if its transforms under \mathfrak{K} span a finite-dimensional linear space. The spherical functions on X form an algebra $\mathfrak{o}(X)$. The analytical spherical functions on Z form an algebra $\mathfrak{o}(Z)$. There is a natural isomorphism P of $\mathfrak{o}(X)$ onto $\mathfrak{o}(Z)$. Calling $\omega_z f$ the value that Pf takes in $z \in Z$ ($f \in \mathfrak{o}(X)$) one gets a homomorphism ω_z of $\mathfrak{o}(X)$ into the field C of complex numbers. $z \rightarrow \omega_z$ is a one-one-mapping of Z onto the set of all homomorphisms ω of $\mathfrak{o}(X)$ into C with $\omega(1) = 1$. — A few conclusions from this theorem and a connexion with Stein manifolds are indicated. H. Freudenthal.

● **Schatten, Robert: Norm ideals of completely continuous operators.** [Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, Heft 27. Reihe: Reelle Funktionen.] Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1960. VII, 81 p. DM 23,60.

A well written and easy to read exposition of the theory of spaces of completely continuous (c. c.) operators. Although some of the results of this theory are valid for arbitrary Banach space the author restricts his attention to Hilbert spaces, where a simple and reasonably complete theory of spaces of c. c. operators can be given to day. Let H be a complex Hilbert space and consider two orthonormal families φ_j and ψ_j and a sequence λ_j of complex numbers. The operator $A = \sum \lambda_j \varphi_j \otimes \bar{\psi}_j$ defined by $Ax = \sum \lambda_j(x, \psi_j) \varphi_j$ has a meaning if and only if the sequence λ_j is bounded and then $|A| = \sup |\lambda_j|$. An operator A is Hermitean and c. c. if and only if it admits a representation of the form $A = \sum \lambda_j \varphi_j \otimes \bar{\varphi}_j$ where φ_j is an orthonormal family, λ_j are real and $\lambda_j \rightarrow 0$. From the polar decomposition it follows that the c. c. operators are precisely those admitting a representation $A = \sum \lambda_j \varphi_j \otimes \bar{\psi}_j$ where φ_j and ψ_j are orthonormal sequences and $\lambda_j \rightarrow 0$. Further, proofs are given that the range of a c. c. operator does not contain any infinite-dimensional closed subspace and that a Hermitean operator is c. c. if and only if 0 is the only limit point of its spectrum. The minimax principle is explained. The algebra of all operators will be denoted by \mathfrak{A} ; let \mathfrak{R} and \mathfrak{C} be the sets of all finite and c. c. operators respectively. Consider now two-sided ideals in \mathfrak{A} . There are no nontrivial ideals if H is finite-dimensional and any non zero ideal always includes \mathfrak{R} so that \mathfrak{R} is "absolutely minimal". Further, no proper ideal can include an operator whose range contains a closed subspace of the same dimension as H . It follows that, for infinite-dimensional H , the set \mathfrak{S} of all operators none of which has in its range a closed subspace of the same dimension as H is an "absolutely maximal" non-trivial ideal in \mathfrak{A} . Let H_0 be separable. According to a result of Calkin, we have then $\mathfrak{S} = \mathfrak{C}$ so that each ideal \mathfrak{I} either coincides with \mathfrak{A} or consists of c. c. operators only. A result on uniformly closed left ideals of c. c. operators is also stated namely that a uniformly closed left ideal of c. c. operators which annihilates only the null vector coincides with all of \mathfrak{C} . — Chapter 2 describes the Schmidt-class (σc) of operators. If A is an operator and φ_j, ψ_i two complete orthonormal families of vectors then the families $\{A\varphi_j, \varphi_j^2\}$, $\{A^* \psi_i, \psi_i^2\}$, $\{|(A\varphi_j, \psi_i)|^2\}$ are simultaneously summable or not. Whenever they are

summable, their sum is the same independent of φ_j and ψ_i and is denoted by $(\sigma(A))^2$. The operators A for which $\sigma(A) < \infty$ form the Schmidt class. If $A \in (\sigma c)$ and $X \in \mathfrak{U}$ then $|A| \leq \sigma(A)$, both XA and AX belong to (σc) and both $\sigma(XA)$ and $\sigma(AX)$ are $\leq |X| \sigma(A)$. If both A and B belong to (σc) and φ_i is a basis of H then the family $\{(|A \varphi_j, B \varphi_j|)\}$ is summable; the sum $\sum (A \varphi_j, B \varphi_j)$ is independent of $\{\varphi_j\}$ and is denoted by (A, B) . Further $|(A, B)| \leq \sigma(A) \sigma(B)$. If $A \in (\sigma c)$ then A is c. c. A completely continuous operator $A = \sum \lambda_i \varphi_i \otimes \bar{\varphi}_i$ belongs to (σc) if and only if $\sum |\lambda_i|^2 < \infty$; we have then $\sigma(A) = (\sum |\lambda_i|^2)^{1/2}$. The Schmidt class is a Hilbert space with inner product (A, B) and norm $\sigma(A)$; moreover, it is a Banach algebra. If we take for H the L^2 -space then (σc) coincides with the class of all integral operators K defined by kernels $K(x, y)$ with $\int |K(x, y)|^2 dx dy$ finite; we have then $\sigma(K) = |K|$. — Chapter 3 describes the trace class (τc) as the class of products of two operators in (σc) . For $A \in (\tau c)$ the number $t(A) = \sum (A \varphi_j, \varphi_j)$ is independent of the basis and defines the trace of A . If B and C are in (σc) and $A = C^*B$ then $t(A) = (B, C)$. If $A \in (\tau c)$ then also $[A] \in (\tau c)$ where $[A] = (A^*A)^{1/2}$. We define $t(A) = t([A]) = (\sigma([A])^2)$. If $A \in (\tau c)$ and $X \in \mathfrak{U}$ then both AX and XA are in (τc) and both $|AX|$ and $|XA|$ are $\leq |X| \tau(A)$ so that $t(A) \leq \tau(A)$. Every operator in the trace-class necessarily belongs to the Schmidt class; (τc) consists precisely of those completely continuous operators $A = \sum \lambda_i \varphi_i \otimes \bar{\varphi}_i$ with $\lambda_i > 0$ for which $\sum \lambda_i < \infty$; we then have $\tau(A) = \sum \lambda_i$. Under the norm τ the trace class is a Banach algebra. — Chapter 4 is devoted to the study of \mathfrak{C} as a Banach space. Each linear functional f on \mathfrak{C} can be represented in the form $f(C) = t(CT)$ for some $T \in (\tau c)$; the norm of f equals $\tau(T)$. Hence \mathfrak{C}' and (τc) are equivalent. Every linear functional g on (τc) can be represented in the form $g(T) = t(TA)$ for some $A \in \mathfrak{U}$; the norm of g is $|A|$. Hence $(\tau c)^*$ and \mathfrak{U} are equivalent. \mathfrak{C} itself is not a conjugate space since its unit ball does not have any extreme points. Every bounded linear functional F on \mathfrak{U} may be represented in exactly one way in the form $F = F_1 + F_2$ with $F_1 \in (\tau c)$ and $F_2 \in \mathfrak{C}^\perp$. Moreover, $|F| = |F_1| + |F_2|$. Further, the strongest topology on \mathfrak{U} is introduced and it is shown that linear functionals on \mathfrak{U} continuous in the strongest topology are precisely those in (τc) . — Chapter 5 deals with norm ideals. Let \mathfrak{T} be an ideal in \mathfrak{U} ; a norm α on \mathfrak{T} is said to be a crossnorm if $\alpha(A) = |A|$ for all operators of rank 1. Further, α is said to be unitarily invariant if $\alpha(UAV^*) = \alpha(A)$ for A in \mathfrak{T} and U, V unitary; α is called uniform if $\alpha(XAY) \leq |X| |Y| \alpha(A)$ for $A \in \mathfrak{T}$ and $X, Y \in \mathfrak{U}$. It is easy to see that each uniform crossnorm is necessarily unitarily invariant. If α is a crossnorm on R , the associate function α' is defined by $\alpha'(A) = \sup |t(XA)|$ for $X \in \mathfrak{R}$ and $\alpha(X) \leq 1$; α' is also a crossnorm if and only if $\alpha(X) \geq |X|$ for all $X \in \mathfrak{R}$. A paragraph is devoted to the description of symmetric gauge functions on the real n -space. If Φ is a symmetric gauge function and A a linear operator in the n -dimensional Hilbert space H_n , put $\Phi(A) = \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ where $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ are the proper values of $|A|$. Then $\Phi(A)$ is a unitarily invariant crossnorm on the space of all operators on H_n . Every unitarily invariant crossnorm may be obtained in such a manner from a suitable symmetric gauge function. The bound $|A|$ represents the least unitarily invariant crossnorm, since it is generated by the function $\max \alpha_i$. If α is a unitarily invariant crossnorm, then so is α' . Moreover, if α is generated by the symmetric gauge function Φ then α' is generated by the symmetric gauge function ψ associated with Φ ; it follows that α'' is generated again by Φ so that $\alpha'' = \alpha$. In particular σ corresponds to $\Phi(u_1, \dots, u_n) = (\sum u_i^2)^{1/2}$ and is the only unitarily invariant crossnorm which fulfills $\sigma' = \sigma$. This correspondence between unitarily invariant crossnorms and symmetric gauge functions can be extended to operators of finite rank on an infinite-dimensional H . The representation of unitarily invariant crossnorms by means of Φ gives the fact that unitarily invariant crossnorms are also uniform. Indeed, if A is of finite rank and X arbitrary and $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ and $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$ are the proper values of $|A|$ and

$[XA]$ respectively, it may be shown that $\mu_i \leq |X| \lambda_i$. It follows that $\alpha(XA) = \Phi(\mu_1, \dots) \leq |X| \Phi(\lambda_1, \dots) = |X| \alpha(A)$. From this fact it follows that each unitarily invariant crossnorm is uniform; this combined with the converse result already obtained shows that the classes of uniform and unitarily equivalent crossnorms coincide. If α is a crossnorm whose associate α' is also a crossnorm, consider the normed space $\mathfrak{R}(\alpha)$ defined by taking the norm α on \mathfrak{R} . Its completion is denoted by \mathfrak{R}_α . Every linear functional f on $R(\alpha)$ (and hence on R_α) can be expressed in the form $f(X) = t(XA)$ where $A \in \mathfrak{R}$ is such that $|A|_\alpha = \sup t(XA)$ for $X \in \mathfrak{R}(\alpha)$ and $\alpha(X) \leq 1$, is finite. The space $(\mathfrak{R}(\alpha))' = (\mathfrak{R}_\alpha)'$ is thus a space of operators; moreover, if α is uniform, then $(\mathfrak{R}_\alpha)'$ is also an ideal. Now, if α is uniform, then $\alpha = \alpha'$ and $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{R}_{\alpha'} \subset (\mathfrak{R}_\alpha)'$ is a Banach space of operators and can be shown to be an ideal. The final result: \mathfrak{R}_α is a minimal norm ideal iff α is unitarily invariant and every minimal norm ideal is some \mathfrak{R} . The author has succeeded in developing an exceedingly simple and beautiful presentation of the theory. The prerequisites for reading the book are very evident and the book is a pleasure to read. V. Pták.

● Hua (Chua), Loo-keng (Lo-ken): *Harmonische Analyse von Funktionen mehrerer komplexer Variablen in klassischen Gebieten.* [Garmoničeskij analiz funkcij mnogich kompleksnykh peremennnykh v klassičeskich oblastjach.] Übersetzung aus dem Chinesischen von M. A. Evgrafov. Unter Redaktion von M. I. Graev. Moskau: Verlag für ausländische Literatur 1959. 163 S. R. 7,75 [Russisch].

Es sei \mathfrak{R}_I das Gebiet aller komplexen $m \times n$ Matrizen Z , für welche $I^{(m)} - \bar{Z}Z' > 0$ [$I^{(m)}$ ist die $m \times m$ Einheitsmatrix, \bar{Z}' die komplex-konjugierte Matrix der Transponierten von Z , > 0 bedeutet, daß die linksstehende Matrix positiv-definit ist]; \mathfrak{R}_{II} das Gebiet aller symmetrischen $n \times n$ Matrizen Z , für welche $I^{(n)} - \bar{Z}Z > 0$; \mathfrak{R}_{III} das Gebiet aller $n \times n$ schiefsymmetrischen Matrizen, für welche $I^{(n)} + \bar{Z}Z > 0$; \mathfrak{R}_{IV} das Gebiet im n -dimensionalen komplexen Raum aller (z_1, \dots, z_n) , für welche $|z|^2 + 1 - 2(\bar{z}, z) > 0$, $|(z, z)| < 1$ ist. Es handelt sich in diesem Buch um harmonische Analyse von Funktionen auf diesen vier klassischen Gebieten. Jedes hat seine charakteristische Mannigfaltigkeit \mathfrak{G}_j ($j = I, II, III, IV$); jedes läßt Kerne von Bergmann, Cauchy und Poisson zu; für jedes kann man auf natürliche Weise die Klassen sphärischer und harmonischer Funktionen definieren. Diese Funktionenklassen und Entwicklungen in solchen Klassen werden ausführlich studiert. Die Resultate stehen im engsten Zusammenhang mit den Arbeiten von Gel'fand und Graev [z. B. *Trudy Moskovsk mat. Obsč.* 8, 321—390 (1959)], Harish-Chandra [z. B. *Amer. J. Math.* 80, 241—310, 553—612 (1958)], und Godement (dies. Zbl. 49, 201). Doch verläßt sich Verf. auf rein rechnerische Methoden und wendet nur wenig die Begriffe der Gruppentheorie an. Die Rechnungen sind außerordentlich lang; das Buch ist in einem sehr kondensierten Stil geschrieben und verlangt vom Leser eingehende Bekanntschaft mit dem Stoff und außerdem große Aufmerksamkeit. Der größte Teil des Inhalts war nur in der chinesischen Sprache verfügbar. Der Übersetzer und der Redakteur haben einen wichtigen Dienst geleistet, diese Resultate in einer abendländischen Sprache zu veröffentlichen. E. Hewitt.

Akutowicz, Edwin J.: On extrapolating a positive definite function from a finite interval. *Math. Scandinav.* 7, 157—169 (1959).

Let $F(t)$ be a continuous complex valued positive definite function on a finite interval $(-A, A)$, that is $\sum F(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geq 0$ for t_j, t_k in $(0, A)$, z_j are arbitrary complex numbers and j, k vary over finite sets of positive integers. Then a theorem due to M. Krein (this Zbl. 22, 353) states that there exists a positive definite extension $F_1(t)$ of $F(t)$ to $(-\infty, \infty)$ which is equivalent to the result that there exists a bounded increasing normalized function $\sigma(x)$ in $(-\infty, \infty)$ with $\sigma(-\infty) = 0$ such that $F_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\sigma(x)$.

This extension is not unique in general. The author determines conditions under which the extension is unique and when it is not unique determines the class of extensions. Consider the class H_0 of all functions $f(u)$ where $f(u) = \int_{-a}^a e^{iux} d\mu(x)$, $-\infty < u < \infty$, $2a = A$ and $\mu(x)$ is any complex valued function of bounded variation. Define the inner product $(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) \overline{f_2(u)} d\sigma(u)$ where $\sigma(x)$ is a function defining the extension $F_1(t)$ above. The quotient space of H_0 by the subspace for which $(f, f) = 0$ is completed obtaining a Hilbert space H . It is shown that the operator T_0 defined by $T_0 f(u) = u f(u)$ from sets in H_0 into H_0 has a minimal closed extension T which is Hermitian. The main result of the paper is that the self adjoint extensions of T in H or a Hilbert space containing H determine the extensions via its spectral function defined as follows. A spectral function belonging to a closed Hermitian operator S in a Hilbert space H is any one parameter family of bounded self adjoint operators $E(t)$, $-\infty < t < \infty$, such that for f in H , $(E(t)f, f)$ is non decreasing function of t , $E(t-0)f = E(t)f$, $E(t)f \rightarrow 0$ as $t \rightarrow -\infty$ and f as $t \rightarrow \infty$ and for f belonging to the domain of S and g to H the relations $Sf, g = \int_{-\infty}^{\infty} t d(E(t)f, g)$ and $\|Sf\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E(t)f, f)$ hold, the inner products being taken with respect to H . The extensions of F mentioned above are provided by the functions $\sigma(t) = (E(t)1, 1)$ for every spectral function belonging to T and conversely. The extension is unique if and only if T is self-adjoint in H . It is also shown that there is a one to one correspondence between the spectral functions of T and its generalized resolvents.

V. Ganapathy Iyer.

Balakrishnan, A. V.: An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups. Trans. Amer. math. Soc. **91**, 330—353 (1959).

The general idea of the Hille-Philips operational calculus (Hille-Philips, Functional analysis and semigroups, this Zbl. **78**, 100) is to assign to every function $(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{\lambda \xi} d\alpha(\xi)$ the operator $f(A)x = \alpha(A)x = \int_0^{\infty} T(\xi)x d\alpha(\xi)$, $T(\xi)$ being a semigroup of bounded linear operators on a Banach space, with the infinitesimal generator A . The author extends this calculus to a more general class of functions f viz. those which are ratios of two Laplace transforms) the obtained operators $f(A)$ being closed but not necessarily bounded. The general idea may be sketched without entering into the details and imposed restrictions, as follows. Let $S(w)$ denote the class of all σ -additive set-functions defined for all Borel subsets of $[0, \infty)$ such that $\int_0^{\infty} |T(\xi)| |d\alpha(\xi)| < \infty$, let $L(w)$ be its subclass composed of the absolutely continuous functions. Then every Lebesgue integrable function q defines an operator $C^q: \mathfrak{L}(w) \rightarrow \mathfrak{L}(w)$ by the following conditions: $C^q f = g$ if and only if $q(\lambda) \int_0^{\infty} e^{\lambda \xi} df(\xi) = \int_0^{\infty} e^{\lambda \xi} dq(\xi)$. The operational calculus is constructed for the class \mathfrak{M} of those q for which the domain of the operator C^q is dense in $\mathfrak{L}(w)$: first there is defined the operator C_0 from the class of elements of form $\alpha(f)x$, f in the domain of C^q . The explicit formula for C_0 is $C_0 \alpha(f)x = \alpha(C^q f)x$, then $q(A)$ is defined as the operator C such that $Cx = \lim C_0 x_n$ where $x_n \in \text{domain of } C_0$, $x_n \rightarrow x$. A spectral theory parallel to this of Hille and Philips is developed. The obtained theory is applied to semigroups in the algebra $S(w)$ with respect to convolution. The paper

concludes with consideration of non-integral powers of infinitesimal generators of semigroups.

A. Alexiewicz.

Kreiss, Heinz-Otto: Über Matrizen, die beschränkte Halbgruppen erzeugen. *Math. Scandinav.* 7, 71—80 (1959).

Let F be a family of operators defined on a finite dimensional Hilbert space. Suppose that for every $A \in F$ there exists a hermitian, regular, positive definite operator $H(A)$ such that (1) $\sup_{A \in F} \{ \|H(A)\|, \|[H(A)]^{-1}\| \} < +\infty$ and (2) $H(A) \cdot A + A^* H(A) \leq 0$. Then (3) $\sup \|\exp tA\| < +\infty$ ($A \in F, t \geq 0$). Using the fact that every operator A is unitary similar to a triangular operator the author proves an interesting and non-trivial statement according to which (3) implies (1) and (2). The statement (3) is equivalent with the existence of a constant C independent on A such that $\|(A - sI)^{-1}\| \cdot \operatorname{Re} s \leq C, A \in F, \operatorname{Re} s > 0$ where $\operatorname{Re} s$ is the real part of the complex number s .

S. Kurepa.

Kirillov, A. A.: On unitary representations of nilpotent Lie groups. *Soviet Math., Doklady* 1, 108—110 (1960); Übersetzung von *Doklady Akad. Nauk SSSR* 130, 966—968 (1960).

Dixmier (this Zbl. 80, 321) has studied certain unitary irreducible representations of nilpotent Lie groups G , called non-exceptional, and has proved: A. The representation is realized on the space of all functions with summable square in a Euclidean space R^m , such that the image of the associative envelope of the Lie algebra of G is the algebra D_m of all differential operators with polynomial coefficients. — B. For “sufficiently good” functions φ on G the operator $T_\varphi = \int_G \varphi(g) T_g dg$ is completely continuous and has finite trace. — The author extends these results to arbitrary irreducible unitary representations of connected nilpotent Lie groups [cf. also Dixmier, *Bull. Soc. math. France* 87, 65—79 (1959)]. He shows that A implies B, where the “sufficiently good” functions are the elements of a certain normed space and then proves A, using his construction of irreducible unitary representations as induced representations (Kirillov, this Zbl. 87, 24). *P. M. Cohn.*

Tsurumi, Shigeru: On general ergodic theorems. II. *Tôhoku math. J., II. Ser.* 9, 1—12 (1957).

(Part I cf. this Zbl. 57, 339). The main result of the present paper is Theorem 3.1. formulated below, generalizing the Hopf ergodic theorem for Markov processes (this Zbl. 55, 367) and the Hurewicz ergodic theorem without invariant measure [*Ann. of Math.*, II. Ser. 45, 192—206 (1944)]. (X, \mathfrak{F}, μ) : finite measure space. T : linear positive operator mapping $L_1 = L_1(X)$ into itself. A set $A \in \mathfrak{F}$ is called T -invariant if $T(f \cdot e_A) = T f$ on A , e_A denoting the characteristic function of A .

The conservative part C of X is defined as the set of points x such that $\sum_{j=0}^{\infty} T^j f(x) = \infty$ for every positive f in L_1 . Theorem 3.1. — Hypothesis: $|T|_1 \leq 1, T_1 > 0$. Setting $Uf = T f / T 1$, Uf is $= f$ for every f in L_∞ such that $Uf \geq f, U(f \cdot T^j 1)$ is $= Uf \cdot U T^j 1$ for every $f \in L_\infty$ and $j = 0, 1, 2, \dots$. Conclusion: For every f in L_1 and every positive g in L_1 , the sequence $\sum_{j=0}^{n-1} T^j f / \sum_{j=0}^{n-1} T^j g$ converges for almost all x in X ; h denoting the limit function, for every T -invariant subset A of C , $\int_A h(x) g(x) d\mu(x) = \int_A f(x) d\mu(x)$. Hint to the proof. The main tool is a maximal ergodic theorem deduced substantially from a Hopf lemma.

Chr. Pauc.

Deheuvels, René: Points critiques d'une fonctionnelle. *C. r. Acad. Sci., Paris* 236, 1847—1849 (1953).

This is a continuation of the author's previous work (this Zbl. 49, 203—204). The author first defines the notion of critical points of a numerical function and then announces the following theorem: Let p be a critical value of degree n of a nume-

cal function q on X . If the sets $\{q \leq p + e\}$ are compact for $0 < e < e_0$, there exists at least a critical point of q for the value p , of index $\leq n$.

C. T. Yang (M. R. 14, 1109).

Schaefer, H. H.: On nonlinear positive operators. Pacific J. Math. 9, 847—860 (1959); Errata. Ibid. 10, 1479 (1960).

Durch Anwendung des Fixpunktsatzes von Schauder-Tychonoff werden Existenzsätze für nichtlineare Eigenwertprobleme $\lambda x = T(x)$ in halbgeordneten Banachräumen, zum Teil auch in lokal-konvexen halbgeordneten Räumen, bewiesen, die frühere Ergebnisse des Ref. (Diss. Technische Universität Berlin 1952) und des Verf. (dies. Zbl. 64, 357) verallgemeinern, und deren Bedeutung durch Beispiele, die Schmeidlers algebraische Integralgleichungen (dies. Zbl. 52, 107) umfassen, erläutert wird. Die für den Existenzbeweis verwendeten weiteren Eigenschaften des Raumes und der Abbildung T sind in den drei formulierten Sätzen verschiedenartig.

D. Morgenstern.

Solomjak (Solomjak), M. Z.: The application of the semigroup theory to the study of differential equations in Banach spaces. Doklady Akad. Nauk SSSR 122, 766—769 (1958) [Russisch].

On considère l'équation $(*) du/dt + Au = f(t)$ dans les espaces de Banach; on l'étudie en utilisant la théorie des semigroupes d'opérateurs — l'unicité du problème de Cauchy pour $(*)$. Pour cela, en imposant à A les conditions 1° que son spectre ne contienne pas un secteur $\Sigma: \varphi \leq \arg \lambda \leq 2\pi - \varphi$ ($\varphi < \frac{1}{2}\pi$) et 2° que pour tout $\lambda \in \Sigma$, $\|R(\lambda; A)\| \leq c/(|\lambda| + 1)$ alors si $T(\xi)$ est la transformée de Laplace de $R(\lambda; A)$, on trouve que $\|A^n T(\xi)\| \leq c_n/\xi^n$ ($n > 0$) pour $\xi > 0$. Ceci conduit à la généralisation à l'espace de Banach d'un résultat de M. A. Krasnosel'skij, G. Krejn, P. E. Sobolevskij (ce Zbl. 78, 297). L'A. donne plusieurs définitions de solutions généralisés du problème de Cauchy pour $(*)$. On démontre ensuite que la formule

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

est valable, lorsque $f(\tau)$ vérifie certaines conditions, une solution généralisée de $(*)$ n'existe que si on suppose que A vérifie les conditions 1° et 2°. On applique ces résultats lorsque A est borné de R^n , A opérateur elliptique, l'espace de Banach considéré étant $L^p(\Omega)$.

G. Gussi.

Lions, Jacques L.: Équations différentielles à coefficients opérateurs non bornés. Ann. Soc. math. France 86, 321—330 (1959).

This is a brief survey of recent results, mainly those due to the author, on the differential equation $A(t)u(t) + du(t)/dt = f(t)$, $t \geq 0$, $u(0) = 0$, where the unknown $u(t)$ takes values in a Banach space H and $A(t)$ are unbounded linear operators on H . Except in a work cited, the $A(t)$ are defined in terms of a sesquilinear form in a Hilbert space $V \subset H$. Various kinds of solutions (almost-everywhere, weak, ultraweak, distribution solutions) are introduced, and some conditions for their existence and uniqueness are stated, with applications to parabolic partial differential equations.

T. Kato.

Kordylewski, J. and M. Kuczma: On the functional equation $F(x, \varphi(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = 0$. Ann. Polon. math. 8, 55—60 (1960).

Verf. beweisen, daß die im Titel figurierende Funktionalgleichung unendlich viele stetige Lösungen hat, falls die Funktionen $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) stetig und streng wachsend in $[a, b]$ sind, $f_i(a) = a$, $f_i(b) = b$, ($i = 1, 2, \dots, n$), $x = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_{n-1}(x) = f_n(x)$ ($x \in (a, b)$), $i = 2, \dots, n-2$, falls $F(x, y_0, y_1, \dots, y_n)$ stetig in einer Menge Ω des $(n+2)$ -dimensionalen Raumes ist und die nichtleere Menge der Punkte $(x, y_0, y_1, \dots, y_n) \in \Omega$ mit $F(x, y_0, y_1, \dots, y_n) = 0$ die Quader $a < x < b$, $c < y_i < d$ ($i = 0, \dots, n-1$) bzw. $a < x < b$, $c < y_j < d$

($j = 1, \dots, n$) als Projektionen hat, und falls endlich $F(x, y_0, y_1, \dots, y_n) = 0$ in Ω bezüglich y_0 und y_n lösbar ist. — Der Beweis ist einfach und ähnelt dem in einem Spezialfall von den Verff. im Band 7, 21—32 (1959) derselben Zeitschrift gegebenen Beweise.

J. Aczél.

Kurepa, Svetozar: A cosine functional equation in Hilbert space. Canadian J. Math. 12, 45—50 (1960).

Seine früheren Untersuchungen (dies. Zbl. 82, 328) fortsetzend, wo er die Funktionalgleichung $(+)$ $F(x+y) + F(x-y) = 2F(x)F(y)$ in endlich-dimensionalen Vektorräumen untersuchte, betrachtet Verf. dieselbe Funktionalgleichung in Hilbert-Räumen, d. h. die x, y sind reelle Zahlen und die Werte der Funktionen F sind stetige lineare Transformationen im Hilbert-Raum. Die Arbeit enthält zwei Sätze: Satz 1. Falls F die Gleichung $(+)$ für alle reellen x, y erfüllt, falls es ein reelles Zahlintervall gibt, auf dem F schwach meßbar ist, falls aus dem „Fast-überall-Bestehen“ von $F(x)f = 0$ die Gültigkeit von $f = 0$ folgt, und falls endlich H ein separabler Hilbert-Raum ist, dann ist F auf dem reellen Zahlintervall schwach stetig. Satz 2. Falls $(+)$ für alle reellen Zahlen x, y erfüllt ist, falls $F(x)$ für alle reellen x eine normale Transformation ist, falls aus dem Fast-überall-Bestehen von $F(x)f = 0$ die Gültigkeit von $f = 0$ folgt und falls $F(x)$ schwach stetig ist, so gibt es zwei selbstadjungierte Transformationen A und B , wo B außerdem beschränkt ist und A mit B vertauschbar, so daß mit $C = A + Bi$, $F(x) = \frac{1}{2}(e^{ixC} + e^{-ixC}) = \cos xC$ für alle reellen x gilt.

J. Aczél.

Praktische Analysis:

Goldstine, H. H. and L. P. Horwitz: A procedure for the diagonalization of normal matrices. J. Assoc. comput. Machin. 6, 176—195 (1959).

Eine normale Matrix könnte unitär auf Diagonalform transformiert werden, indem man nacheinander den hermiteschen, dann den schieferhermiteschen Anteil diagonalisiert. Beide Teilaufgaben kann man iterativ durch eine komplexe Modifikation des Jacobischen Verfahrens [siehe Henrici, J. Soc. industr. appl. Math. 6, 144—162 (1958)] lösen. — Die Verff. schlagen demgegenüber ein anderes Verfahren vor, welches (unitäre) „Jacobische Elementardrehungen“ $A_{k+1} = U_{pq}^T A_k U_{pq}$ verwendet, wobei sich die Matrix U_{pq} nur in den 4 Elementen $u_{pp} = u_{qq} = \cos \varphi$, $u_{pq} = -u_{qp} = e^{i\alpha} \sin \varphi$ von der Einheitsmatrix unterscheidet. Man kann hier für gegebenes p, q allerdings nicht mehr α, φ so wählen, daß die Transformation gerade die p, q - und q, p -Elemente der Matrix A_{k+1} annulliert; man muß sich vielmehr darauf beschränken, die Quadratsumme der Außendiagonalelemente bei jedem Schritt möglichst klein zu machen. — Leider kann es im Gegensatz zum klassischen Jacobischen Verfahren vorkommen, daß für gewisse p, q keine solche Verkleinerung mehr erzielt werden kann, ohne daß $a_{pq} = a_{qp} = 0$ ist. Dieser Umstand läßt grundsätzlich sogar die Möglichkeit zu, daß in einem gewissen Stadium überhaupt keine Verkleinerung dieser Quadratsumme mehr möglich ist. Zwar geben die Verff. für diesen Fall eine Abhilfe an, doch könnte dieser singuläre Fall auch nur angenähert eintreffen, was sich durch sehr schlechte Konvergenz des Verfahrens äußern müßte. In der Tat können die Verff. zwar die Konvergenz des Verfahrens beweisen, aber die Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit ist derart entmutigend (auch ist der Rechenprozeß ziemlich undurchsichtig), daß man vielleicht doch besser das eingangs erwähnte zweistufige Verfahren anwendet.

H. Rutishauser.

Franklin, J. N.: Numerical stability in digital and analog computation for diffusion problems. J. Math. Physics 37, 305—315 (1959).

Verf. betrachtet Differenzenverfahren für Probleme mit parabolischen Differentialgleichungen, die sich in der Form $(*) du(t)/dt = A u(t)$ ($0 \leq t \leq T$), $u(0) = u_0$ für Elemente u eines Banachschen Raumes schreiben lassen, wobei A einen linearen

nicht beschränkten) Operator bedeutet. Für das Beispiel $(*) A = x^{-2} (\partial/\partial x)(x^2 \partial/\partial x)$ mit den (in den Definitionsbereich von A gezogenen) Randbedingungen $\partial g/\partial x = 0$ für $x = 0$, $g = 0$ für $x = 1$ werden mit dem üblichen Differenzenverfahren zur Schrittweite $\Delta x = m^{-1}$ Operatoren A_m aufgestellt, die A approximieren. Diese Operatoren werden durch Matrizen B_m vollständig beschrieben. Ersetzt man ferner die Ableitung nach t durch den vorderen Differenzenquotienten zur Schrittweite Δt , so erhält man einen Operator $C(\Delta t) = I + \Delta t A_m$, welcher den Lösungsoperator von $(*)$, $(*)$ approximiert. Allgemeiner kann man $C(\Delta t) = p(\Delta t A_m)$ mit einem Polynom $p(z) = 1 + z + \sum_{j=2}^k c_j z^j$ (c_j reell) ansetzen. Die Stabilitätsbedingung von Lax und Richtmyer (dies. Zbl. 72, 89) führt auf die Forderung $|p(\Delta t \lambda)| \leq 1$ für alle Eigenwerte λ von B . Da alle λ in einem Intervall $(\dagger) -\alpha \leq \lambda \leq 0$ (mit $\alpha = O(m^2)$ für $m \rightarrow \infty$) liegen, wird bei festem k dasjenige Verfahren als stabilstes angesehen, bei welchem $|p(z)| \leq 1$ in einem möglichst langen Intervall $-\tau \leq z \leq 0$ ist. Die zu den stabilsten Verfahren gehörigen Polynome $E_k(z)$ werden durch Tschebyscheffsche Polynome ausgedrückt und bis $k = 6$ explizit angegeben. — Ersetzt man (bei Verwendung eines Analogrechners) die Ableitung nach t nicht durch einen Differenzenquotienten, erhält man ein stabiles Verfahren. — Bei den meisten Diffusionsproblemen liegen die Eigenwerte der entsprechenden Matrizen B_m ebenfalls in einem Intervall (\dagger) , so daß sich dann die Ergebnisse übertragen lassen.

J. Schröder.

Schröder, Johann: Anwendung von Fixpunktsätzen bei der numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen in halbgeordneten Räumen. Arch. rat. Mech. Analysis 4, 177—192 (1960).

It is known that fixed-point theorems can be used not only to prove existence theorems of solutions for functional equations but also to give error estimates for approximations to these solutions, as obtained by numerical methods. The author has already exploited the idea in a number of papers [e. g., Arch. rat. Mech. Analysis 2, 367—392; 3, 28—44, 219—228 (1959)]; here he considers equations (not necessarily linear) of the type $(*) A u = B u$ in a real semi-ordered linear space under appropriate conditions over the functionals A and B (A is monotonic in the sense of Collatz; B can be enclosed by two other functionals satisfying appropriate conditions). For equation $(*)$ he proves some general theorems, which suggest ways of selecting approximations enclosing the solution. The author also indicates some typical problems, where his results can be usefully applied. He promises to publish numerical examples in a later paper.

G. Capriz.

Sidlovskaja, N. A.: Eine Anwendung der Methode der Differentiation nach einem Parameter auf die Lösung nicht-linearer Gleichungen in Banachschen Räumen. Leningradsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski Nr. 271, mat. Fak., Ser. mat. Nauk Nr. 33, 3—17 (1958) [Russisch].

Die Methode von D. F. Davidenko (dies. Zbl. 50, 121; 53, 89) zur zahlenmäßigen Lösung nichtlinearer, einen Parameter enthaltenden algebraischen oder auch transzendenten Gleichungssysteme und ebensolcher Differentialgleichungen wird auf die Lösung nichtlinearer, einen Parameter enthaltenden Gleichungen in linearen normierten Räumen ausgedehnt, also auf Gleichungen von der Form $F(\lambda, x) = 0$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ und $x \in X$, wobei X ein derartiger Raum ist. Für genau formulierte Bedingungen wird in § 1 die Methode entwickelt, in § 2 in Verbindung mit der Newtonschen Iteration gebracht, und in § 3 auf Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung angewandt.

K. Bögel.

Turowicz, A. B.: Sur l'approximation des racines de nombres positifs. Ann. Polon. Math. 8, 265—269 (1960).

Es wird die Rekursionsformel (1) $x_{k+1} = \frac{(n-1)x_k^{n+1} + (n+1)A x_k}{(n+1)x_k^n + (n-1)A}$ zur iterativen

Berechnung der n -ten Wurzel einer positiven Zahl A angegeben und bewiesen. Die Folge $\{x_k\}$ konvergiert monoton gegen $\sqrt[n]{A}$. Der Konvergenzgrad ist kubisch. Für Rekursionsformeln mit höherem Konvergenzgrad als 3 kompliziert sich ihr Aufbau, mithin auch die numerische Behandlung. Zur Demonstration wird eine Rekursionsformel mit dem Konvergenzgrad 5 abgeleitet, nämlich

$$(2) \quad z_{k+1} = \frac{(2n-1)(n-1)z_k^{2n+1} + 2(4n^2-1)A z_k^{n+1} + (2n+1)(n+1)A^2 z_k}{(2n+1)(n+1)z_k^{2n} + 2(4n^2-1)A z_k^n + (2n-1)(n-1)A^2}.$$

Verf. gibt an, daß die zweite Approximation von (1) in vielen Fällen hinreichend genauer ist als die erste Approximation von (2). (1) gestattet i. a. nicht die Berechnung der n -ten Wurzel einer beliebigen komplexen Zahl, da $\{x_k\}$ nicht mehr für jeden Fall konvergiert. Ref. bemerkt, daß (1) bereits von Lambert angegeben wurde (siehe J. Kiss, dies. Zbl. 58, 337).

H.-G. Gispert.

Mikolajska, Z.: Remarque sur la note de A. B. Turowicz sur l'approximation des racines de nombres positifs. Ann. Polon. Math. 8, 285—289 (1960).

Es wird eine allgemeine Iterationsvorschrift zur Berechnung der n -ten Wurzel einer positiven Zahl A angegeben. Sie lautet

$$x_k = x_{k-1} \{ \psi(x_{k-1}) - \varphi(x_{k-1}^n - A) \} / [\psi(x_{k-1}) + \varphi(x_{k-1}^n - A)], \quad x_0 > 0,$$

wobei $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ stetige Funktionen sind und den Nebenbedingungen

$\psi(x) + \varphi(x^n - A) > 0$ für $x \geq 0$, $\psi(x) - [(x + \sqrt[n]{A}) / (x - \sqrt[n]{A})] \varphi(x^n - A) > 0$ für $x^n \neq A$, $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, sowie $\varphi(x)$ monoton, genügen müssen. Es wird bewiesen, daß $\{x_k\}$ monoton von oben oder unten gegen $\sqrt[n]{A}$ konvergiert. Weiterhin wird eine Abschätzung über den Konvergenzgrad angegeben. Die von A. B. Turowicz (vgl. vorstehendes Referat) angegebene spezielle Iterationsvorschrift mit dem Konvergenzgrad 3 ist bei geeigneter Wahl von $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ in obiger Formel enthalten.

H.-G. Gispert.

Ljusternik, L. A.: Über die Berechnung der Werte von Funktionen einer Variablen. Mat. Prosvesčenie 3, 63—76 (1958); 4, 3—26 (1959) [Russisch].

Verf. gibt eine Übersicht über die Methoden, welche zur Verfügung stehen in der rechnenden Mathematik, insbesondere, falls man über rasch arbeitende Maschinen verfügt. Zuerst kommt die binäre Darstellung von Logarithmus, zyklometrischen und Kreisfunktionen. Approximierende Polynome und Orthogonalsysteme werden behandelt, und speziell die Berechnung von Fourierkoeffizienten und die Koeffizienten bei der Entwicklung nach Tschebyscheff-Polynomen wird eingehend diskutiert. Als Beispiel werden e^{ax} , 2^x , $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$ und die Besselfunktion I_0 nach Tschebyscheffpolynomen entwickelt, und die Entwicklungen werden auf ihre Güte geprüft. Dann folgt eine Behandlung der Iterationsmethoden und als Beispiel zur Beseitigung der Division wird für die Berechnung der Quadratwurzeln an Stelle der Heronischen Approximation $y_{n+1} = \frac{1}{2}[y_n + x/y_n]$ zuerst mittels $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n(3 - y_n^2/x)$ im Limes $x^{-\frac{1}{2}}$ erhalten und dann durch $y_{n+1} = y_n(2 - xy_n)$ der Wert x^{-1} . Eine Besprechung der asymptotischen Darstellung [Fehlerintegral] und der rationalen Darstellungen mit Hilfe von Kettenbrüchen schließt die vom Verf. gegebene magistrale Behandlung.

E. M. Bruins.

Gorup, Guntram v.: Über die Tabulierung eines den Hankelschen Funktionen verwandten Integrals. Z. angew. Math. Mech. 37, 256—257 (1957).

Pour calculer l'intégrale $\int_0^\infty e^{-nt} e^{-z(\zeta_0 t - 1)} dt$, ($\operatorname{Re} z \geq 0$), (qui apparaît dans un problème d'Aérodynamique) l'A. applique, suivant les valeurs de n et de $|z|$, une relation de récurrence, un développement asymptotique et une intégration

numérique. Des tables ont été ainsi calculées à l'aide d'une calculatrice électronique G 2 et publiées dans Mitt. Max-Planck-Inst. Strömungsforsch. **15** (1957).

A. de Castro.

Müller, Gottfried: Mathematische Näherungsberechnungen mittels Formzahlen (mit besonderer Berücksichtigung der Forstwirtschaft). Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden **9**, 779—789 (1960).

Hsu, L. C.: Some approximation formulas for the integration of violently oscillating functions and of periodic functions. Science Record, n. Ser. **3**, 544—549 (1959).

If $F(x, y_1, \dots, y_k)$ is a continuous function defined for $a \leq x \leq b, -\infty < y_i < +\infty$, and periodic of period T_i in $y_i, i = 1, \dots, k$, and if N_1, \dots, N_k are real positive parameters such that $N_{i+1}/N_i \rightarrow \infty$ as $N_i \rightarrow \infty, i = 1, \dots, k-1$, then the integral $\int_a^b F(x, N_1 x, \dots, N_k x) dx$ has a limit as $N_1 \rightarrow \infty$ given by

$$\frac{1}{T_1 \dots T_k} \int_a^b dx \int_0^{T_1} \dots \int_0^{T_k} F(x, y_1, \dots, y_k) dy_1 dy_2 \dots dy_k$$

[see L. C. Hsu, this Zbl. **83**, 126 and Science Record, n. Ser. **6**, 193—196 (1958)]. Since this limit theorem can be used to evaluate the first integral for $N_1, N_2/N_1, \dots, N_k/N_{k-1}$ all large, the author presents in this paper evaluations of the error in term of the magnitude of the successive partial derivatives of F with respect to x . When F is not continuously differentiable evaluations can still be obtained by making use of a remark of S. E. Mikeladze (this Zbl. **61**, 281). In the second part of the paper the author uses the same approach for the numerical evaluation of multiple integrals of periodic functions. Applications are given.

L. Cesari.

● **Schwarz, Eleonore** (herausgegeben von): Nomogramme und andere Rechenhilfsmittel für den Ingenieur. Text in zwei Sprachen: deutsch und russisch. Berlin: VEB Verlag Technik 1960.

Die vorliegende 1. Lieferung einer Sammlung von Nomogrammen enthält gebrauchsfertige Rechentafeln mathematischen Inhalts und für spezielle Probleme der Elektrotechnik. Die „lose Blattsammlung“ gestattet es dem Benutzer, sich für seine speziellen Aufgaben eine geeignete Zusammenstellung zu schaffen. Die einzelnen Nomogramme sind sowohl ihrer Anlage als auch ihrer zeichnerischen Ausführung nach als ausgezeichnet zu bezeichnen. Es ist daher eine hinreichend genaue Ablesung des Ergebnisses gewährleistet. Dem Benutzer wird damit ein sehr wertvolles Hilfsmittel in die Hand gegeben, das ihm viel Zeit sparen und manche Fehlerquelle ausschalten hilft. Als störend wird lediglich empfunden, daß eine stichwortartige Inhaltsangabe des Blattes in der Kopfleiste fehlt. Durch etwas größeren oder kräftigeren Druck würden die angegebenen Formeln besser ins Auge fallen. Die in dem beiliegenden Ableselineal eingeritzte Ablesegerade ist zu stark ausgefallen. Diese Äußerlichkeiten könnten bei einer Neuauflage leicht behoben werden.

A. Stammberger.

Smirnov, S. V.: Über die Nomographierbarkeit von Gleichungen. Ivanov. gosudarst. ped. Inst., učenyje Zapiski, fiz.-mat. Nauki **4**, 22—60 (1953) [Russisch].

Verf. behandelt das Problem der Darstellbarkeit von Gleichungen $z = \varphi(x, y)$ oder auch $F(x, y, z) = 0$ als Fluchtlinientafeln. Als Kriterium für die allgemeine Anamorphose wird die Umschreibung der Ausgangsgleichung in die Massausche Determinante [auch Soreausche Determinante genannt] gefordert.

$$F(x, y, z) = \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & 1 \\ f_2(y) & g_2(y) & 1 \\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Fußend auf den Untersuchungen Gronwalls (1912) und unter Verwendung von Ergebnissen Bitners (1935 und 1939), Moldaviers (1935), Bachvalovs (1948) und Smirnovs (1949 und 1950) werden die notwendigen und hinreichenden Transforma-

tionsbedingungen (zum Teil mit vereinfachten Beweisen) angegeben. Für die nicht elementaren Nomogrammtypen (mit einem, zwei oder drei kurvenförmigen Trägern) wird je ein Algorithmus zur Bestimmung der Elemente der Massauschen Determinante angegeben.

A. Stammberger.

Poljusok (Poliusuk), Ju. A. (J. A.): Über die Anamorphose von Funktionen. Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. I 15, Nr. 1, 33—36, engl. Zusammenfassung 36 (1960) [Russisch].

In diesem Artikel untersuchen wir ein Problem über die Möglichkeit der Darstellung einer gegebenen Funktion in Form der Massauschen Determinante. Das Ziel besteht darin, möglichst auch diese Determinante zu ermitteln. Die Lösung des Problems geschieht mittels Normalisierung der Massauschen Determinante, was durch projektive Transformation der Nomogrammtafel erreicht wird.

Übersetzung der englischen Zusammenfassung.

Gol'man (Holsmann), F. M.: Graphoanalytical method of seismic waves frequency analyses in the wide band of frequencies. Vestnik Leningradsk. Univ. 12, Nr. 22 (Ser. Fiz. Chim. Nr. 4) 76—88, engl. Zusammenfassung 88 (1957) [Russisch].

The complex spectrum of a signal is presented as a Fourier series, the coefficients of which are the discrete values of a given function. The series is summed up by means of special nomograms. The method allows to obtain 36 points of a complex spectrum equidistantly placed in a frequency band, the upper limit of which depends upon the time interval between the given values of signal.

Zusammenfassung des Autors.

• Say, M. G. (consulting editor), A. C. D. Haley and W. E. Scott (advisory editors): *Analogue and digital computers*. London: George Newnes Ltd. 1960. VIII 308 p. 50 s. net.

Der Zweck des Buches ist es, eine erste Einführung in das Gebiet der Rechenanlagen zu geben. Dabei werden sowohl die technische Seite der elektronischen Rechenmaschinen behandelt wie auch die Anwendungsmöglichkeiten mit ihren wichtigsten Methoden. Bei den Analogrechnern werden die wichtigsten Rechenelemente mit ihrer technischen Realisierung sowie der Aufbau und die Organisation größerer Analogrechner beschrieben. Ausführlich behandelt werden der Aufbau einer Rechenschaltung und die Prinzipien, nach denen dabei vorzugehen ist. Eine Reihe von Beispielen erläutert die praktischen Anwendungsmöglichkeiten. Nach der Behandlung der Zahlendarstellung in einem Digitalrechner wird die Arbeitsweise von Digitalrechnern beschrieben. Ein weiteres Kapitel ist der Schaltungstechnik und den wesentlichsten Bausteinen des Rechners gewidmet. Besonders die verschiedenen Speichermethoden und Ein- und Ausgabeeinheiten werden gründlich diskutiert. Ein Kapitel über die Programmierung beschließt das Buch, das also einen Querschnitt und Überblick dieses Fachgebietes gibt.

R. Herschel.

• Eckert (Ékert), W. (V.) J. und Rebecca Jones (Džons): *Die elektronische Rechenmaschine NORC. Eine populäre Beschreibung.* [Elektronnaja vyčislitel'naja mašina NORC. Populjarnoe opisanie.] Übersetzung aus dem Englischen von B. N. Malinovskij, I. P. Okulova und L. A. Korytnoja. Moskau: Wissenschaftlich-technischer Staatsverlag für Maschinenbauliteratur 1960. 115 S. R. 5,45 [Russisch].

Vgl. die Besprechung der deutschen Ausgabe in diesem Zbl. 73, 112.

• Ernst, Dietrich: *Elektronische Analogrechner. Wirkungsweise und Anwendung.* München: R. Oldenbourg 1960. 315 S. mit 227 Abb. DM 38,—.

Dies ist das erste Buch in deutscher Sprache, das sich ausschließlich mit dem Aufbau und der Anwendung elektronischer Analogrechengerate befaßt. Es gibt als Einführungswerk, das keine Spezialkenntnisse voraussetzt, allen an neuen Methoden zur Lösung technisch-wissenschaftlicher Probleme interessierten Lesern einen guten Einblick in die Wirkungsweise und die Anwendungsmöglichkeiten. Auf Einzelheiten der internen Schaltungstechnik wird dabei nur soweit eingegangen wie es zum Verständnis einer fehlerfreien Bedienung erforderlich ist. — Verf. stellt zunächst analoge und digitale Rechenverfahren und Geräte gegenüber, beschreibt dann Aufbau und Wirkungsweise elektronischer Analogrechner und gibt im Hauptteil eine Einführung in die Programmierung nach der mathematischen Formulierung.

und dem Blockschaltplan. Sechs ausführlich durchgerechnete Beispiele zeigen die beim praktischen Rechnen auftretenden Schwierigkeiten — Konstanten, Wahl des Zeit- und Amplitudenmaßstabes usw. — auf und lassen die Vor- und Nachteile der beiden Methoden erkennen. — Im Schlußkapitel gibt Verf. einige Hinweise für die Auswahl bei der Anschaffung, für die Aufstellung und die Organisation des Arbeitsablaufes. Eine Zusammenstellung der z. Z. erhältlichen Analogrechengegeräte von 16 in- und ausländischen Firmen bietet eine willkommene Ergänzung des sehr sorgfältig ausgewählten Stoffes.

H. Schließmann.

● **Kämmerer, Wilhelm: Ziffernrechnenautomaten.** (Elektronisches Rechnen und Regeln. Bd. 1). Berlin: Akademie-Verlag 1960. VIII, 303 S. mit 156 Abb. DM 29,—.

Das Buch ist als erstes deutschsprachiges Werk, das den gesamten Bereich elektronischer Rechenmaschinen und des programmgesteuerten Rechnens darstellt, ganz besonders zu begrüßen. Die Stoffauswahl erfolgte dem Charakter eines Lehrbuchs entsprechend, jedoch stets unter Berücksichtigung der neuesten Ergebnisse. Das Buch wendet sich in gleicher Weise an Mathematiker, Physiker und Techniker, die sich mit der Programmierung digitaler Rechenautomaten vertraut machen wollen und ebenso auch die logische Struktur eines elektronischen Ziffernrechners sowie die wichtigsten Grundtatsachen der technischen Realisierung kennenlernen wollen. Im einzelnen beginnt das Buch mit einer ausführlichen Darstellung der Booleschen Algebra als dem grundlegenden Hilfsmittel zur Beschreibung von Verknüpfungszirkulen. Nach Herleitung der wichtigsten Rechenregeln werden die beiden Normalformen zur Darstellung Boolescher Funktionen hergeleitet und sodann auf das für die Anwendungen besonders wichtige Problem der Vereinfachung Boolescher Ausdrücke eingegangen. Die Methode des Veitch-Diagramms wird an Beispielen erläutert. Das folgende Kapitel behandelt dann unter Verwendung der Ergebnisse des ersten Kapitels die Struktur des Rechenwerks eines Ziffernrechnenautomaten. Ausgehend vom einfachen Halbaddierwerk zur Verknüpfung zweier Dualziffern werden schließlich volle Addierwerke bei im reinen Dualsystem arbeitenden Serien- und Parallelmaschinen beschrieben. Es folgen die Beschreibung der Verarbeitung negativer Zahlen in Komplementdarstellung sowie der Verwirklichung von Multiplikation und Division. Die Darlegung der Verschlüsselung von Dezimalziffern durch geeignete Folgen von Dualziffern und die Erörterung des Rechnens mit dual verschlüsselten Dezimalziffern beschließt dieses Kapitel. Das dritte Kapitel widmet sich der Beschreibung der Gesamtstruktur und der Arbeitsweise eines programmgesteuerten Rechenautomaten. Nach allgemeinen Darlegungen werden insbesondere der Dreiadreß-Parallel-Automat auf Relaisbasis Oprema, die elektronische Zweiadreß-Parallelmaschine M 3, eine englische Dreiadreß-Serienmaschine sowie als Beispiel für eine einfache Einadreß-Maschine der Zuse-Rechenautomat Z 22 in ihrer Grundstruktur und Arbeitsweise beschrieben. Das vierte Kapitel widmet sich der Beschreibung der in Ziffernrechnern verwendeten Bauelemente. Nach Darlegung der technischen Realisierung der logischen Grundverknüpfungen mit Elektronenröhren und Dioden werden die wichtigsten in modernen Rechenautomaten verwendeten Speicherverfahren beschrieben. Das letzte Kapitel schließlich ist der Programmierung gewidmet. Nach Darlegung der verschiedenen Befehlstypen wird die Vorbereitung von Rechenplänen ausführlich erläutert. Die Aufstellung von Maschinenprogrammen wird dabei unter Zugrundelegung einer gedachten Maschine auseinandergesetzt. Nach ausführlicher Darlegung der Unterprogrammtechnik wird auf das Arbeiten mit symbolischen Adressen und mit interpretierenden Systemen eingegangen. Ein Abschnitt über automatische Programmierung, in dem die Grundlinien der Verwandlung eines in einer Formelsprache geschriebenen Programms in ein Maschinenprogramm angedeutet werden, beschließt das Buch. Hier wie auch an einigen anderen Stellen ist jedoch zu sagen, daß die Dinge wohl zu kurz angedeutet sind, als daß man sie ohne Hinzuziehen der Originalliteratur völlig verstehen könnte.

Th. Geis.

● **Phister jr., Montgomery:** Logical design of digital computers. (Digital Design and Applications.) New York: John Wiley & Sons, Inc. 1958. XVI, 408 p. \$ 10,50.

Das Hauptziel, das sich der Verf. gesteckt hat, ist die Beschreibung der logischen Struktur der einzelnen Bestandteile eines synchron arbeitenden elektronischen Rechenautomaten. Die Darlegung der allgemeinen Struktur, Arbeitsweise und Handhabung eines Rechenautomaten sowie die Darlegung der Schaltkreistechnik treten in den Hintergrund und werden nur so weit ausgeführt, als dies zum Verständnis des Buches notwendig ist. Das Buch bildet ein in sich abgeschlossenes Ganzes und setzt keinerlei Vorkenntnisse über elektronische Rechenmaschinen voraus. Es wendet sich in gleicher Weise an Mathematiker, Physiker und Techniker, die sich mit dem betreffenden Gegenstand vertraut machen und Methoden zum Entwurf digital arbeitender Systeme kennenlernen wollen. Hervorzuheben ist die klare Art der Darstellung und die möglichst weit getriebene exakte mathematische Fundierung. Am Schluß der einzelnen Kapitel ist der Text ergänzt durch sorgfältig ausgewählte Beispiele und Übungen, an denen der Leser mögliche Anwendungen studieren und prüfen kann, inwieweit er den Stoff beherrscht. Zahlreiche Literaturhinweise verweisen auf Originalarbeiten, aus denen der Leser weitere Informationen beziehen kann. Im einzelnen folgt auf kurze einführende Kapitel über die allgemeine Struktur eines Rechenautomaten und über das Dualsystem zunächst eine ausführliche Darstellung der Booleschen Algebra als dem grundlegenden Hilfsmittel zur Beschreibung von Verknüpfungsnetzwerken. Nach einer axiomatischen Begründung der Booleschen Algebra wird insbesondere die Darstellung Boolescher Funktionen nach den beiden Normalformen ausführlich diskutiert. Im folgenden Kapitel wird sodann auf die für die Anwendungen besonders wichtige Vereinfachung Boolescher Ausdrücke eingegangen, und es werden die wichtigsten Methoden, die in neuester Zeit entwickelt wurden (Verfahren von Quine, Methode des Veitch-Diagramms), gründlich dargestellt. Es schließt sich eine Darstellung der logischen Wirkungsweise von Flip-Flops an. Dabei werden insbesondere deren sog. „charakteristische Gleichungen“ hergeleitet sowie ihre Anwendung zur Realisierung von Schaltungen angegeben. Die restlichen Kapitel beschreiben die logische Grundstruktur der wichtigsten Speicherverfahren für größere Mengen digitaler Information, der Ein- und Ausgabevorrichtungen, einfacher Rechenwerke, sowie des Leitwerks einer programmgesteuerten Rechenmaschine.

Th. Geis.

{ **Ljapunov, A. A. und G. A. Šestopal:** Anfangsgründe der Lösung von Aufgaben an elektronischen Rechenmaschinen. Mat. Prosveščenie 1, 57—74 (1957) [Russisch].
 { **Lapunov, A. A. und G. A. Szesopal:** Anfangsgründe der Lösung von Aufgaben an elektronischen Rechenmaschinen. Wiadom. mat. 3, 129—145 (1959) [Polnisch].

On présente le calculateur digital à rapide action (А Б Ц Б М). Les dispositifs électroniques du calculateur permettent d'effectuer dizains des milliers d'opérations par seconde. Le calculateur est complètement automatisé. On considère d'abord un calculateur conditionnel (Y B M) avec des possibilités analogues qu'un véritable А Б Ц Б М. Après ça, comme applications, on donne des exemples de programmation des problèmes mathématiques et logiques.

P. Constantinescu.

Recoque, Alice et Françoise Beequet: CAB 500 petite claculatrice arithmétique scientifique. Chiffres, Revue Assoc. franç. Calcul 2, 65—75 (1959).

Hamblen, John W.: Statistical programs for the IBM 650. I. Commun. Assoc. comput. Machin. 2, Nr. 8, 13—18 (1959).

Ljapunov, A. A. und G. A. Šestopal: Über die algorithmische Beschreibung von Steuerungsprozessen. Mat. Prosveščenie 2, 81—95 (1957) [Russisch].

Dans ce travail on considère la description algorithmique des processus de commande. On donne d'abord les principes sur lesquels sont fondés les systèmes de commande. On introduit, après ça, l'appareil mathématique nécessaire pour la

description de la construction des algorithmes: les schémas logiques de algorithmes. On donne des exemples. *P. Constantinescu.*

Baumann, R.: Automatisierte digitale Netzberechnung. Elektron. Rechenanlagen 2, 75—84; **Druckfehlerberichtigung.** Ibid. 211 (1960).

Verf. beschreibt ein gestuftes System von Programmen für Berechnungen an Drehstromnetzen. Das bei der Ermittlung der Knotenpunktsspannungen und Leistungsstromstärken aus der Verteilung der vorgegebenen Leistungen sich ergebende System von quadratischen Gleichungen wird zunächst unter Annahme eines Bezugspotentials linearisiert. Nach einem vom Verf. früher angegebenen Verfahren wird zur Lösung dieses neuen Systems in einem Programm der Stufe 0 („Erstberechnung“) die Betriebsmatrix aufgebaut, die von den Betriebsgrößen nicht, von den Netzgrößen und den Knotenpunkteigenschaften in einfacher Weise abhängt. Weitere Programme der Stufe 0 berechnen die Änderung der Betriebsmatrix bei Abwandlung der Knotenpunkteigenschaften („Statusänderung“) und der Netzdaten („Netzänderung“) sowie die Lösungen des linearisierten Systems („Betriebsfallrechnung“). Die zeitraubende Erstberechnung braucht daher nicht bei jeder Netzberechnung wiederholt zu werden. Der Aufruf dieser Programme und die Verteilung der Speicherplätze erfolgt in einem Programm der Stufe 1 und wird durch das Erkennen der einzugebenden Datenliste gesteuert. Die Lösung des Systems von quadratischen Gleichungen erfolgt durch Nachiterieren in einem Programm zweiter Stufe. Als weitere Beispiele für Programme höherer Stufen werden Kurzschlußberechnungen angeführt. *J. Becker.*

Zaharescu, Anibal and Eudoxiu Procopovici: The analysis and design of the ring detector used in amplifiers for tensometry. Automatica și Electronica 3, 211—214 (1959) [Rumänisch].

Es wird der in tensometrischen elektronischen Geräten laufend verwendete phasempfindliche Detektor untersucht. Es wird eine Untersuchung der Arbeitsweise des Kreises vorgenommen, um die Beziehungen zu ermitteln, die den Laststrom als Funktion der Spannungen und der Kreisparameter geben.

Zusammenfassung aus dem Inhaltsverzeichnis.

Nagler, H.: Amphisbaenic sorting. J. Assoc. comput. Machin. 6, 459—468 (1959).

Raymond, François H.: Quelques remarques sur les systèmes de traitement d'information avec des bandes magnétiques. Chiffres, Revue Assoc. franc. Calcul 3, 85—99 (1960).

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

● **Machol, R. E.:** Information and decision processes. New York-London-Toronto: McGraw-Hill 1960. XII, 186 p. 46 s.

Korezlioglu, Hayri: Quantité d'information mutuelle par unité de temps entre deux processus vectoriels gaussiens, stationnaires et stationnairement corrélés. C. r. Acad. Sci. Sci., Paris 250, 1436—1438 (1960).

In Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Pinsker [Doklady Akad. Nauk SSSR 99, 213—216 (1954)] wird eine Formel für die in einer stationären n -dimensionalen Gaußschen zufälligen Folge ξ_m pro Zeiteinheit enthaltene Information über eine mit ξ_m stationär verbundene n -dimensionale stationäre Gaußsche Folge η_m angegeben. *K. Matthes.*

Bharucha-Reid, Albert T.: Sur les équations intégrales aléatoires de Fredholm à noyaux séparables. C. r. Acad. Sci., Paris 250, 454—456 (1960).

Es wird die zufällige Integralgleichung (1) $x(t, \omega) - \lambda \int_{D_\omega} K(t, u) x(u, \omega) dm(u) = y(t)$ betrachtet. Die dort vorkommende Abbildung D ordnet jedem Elementarereignisse ω ein zufälliges Ereignis D_ω zu, und $K(t, u)$ wird von endlichem Rang vorausgesetzt, d. h. $K(t, u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \beta_i(u)$, wobei $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ sowie auch $y(t)$ auf einer kompakten Menge $U \subset E_k$ definiert sind. Analog zu dem nichtzufälligen Falle gilt, daß eine in bezug auf (t, ω) meßbare Lösung $x(t, \omega)$ der Gleichung (1) dann und nur dann existiert, wenn das System von zufälligen linearen Gleichungen

$$(2) \quad b_i(\omega) = \gamma_i(\omega) - \lambda \sum_{j=1}^n \widehat{a_{ij}(\omega)} \gamma_j(\omega)$$

$$\text{mit} \quad \alpha_{i,j}(\omega) = \int_{D_\omega} \alpha_j(t) \beta_i(t) dm(t), \quad b_i(\omega) = \int_{D_\omega} \beta_i(t) y(t) dm(t)$$

eine meßbare Lösung $(\gamma_1(\omega), \dots, \gamma_n(\omega))$ hat.

M. Jiřina.

Bharucha-Reid, Albert T.: Sur les équations intégrales aléatoires de Fredholm à noyaux séparables. C. r. Acad. Sci., Paris **250**, 657—658 (1960).

Es wird gezeigt, daß das System (2) in der vorstehend besprochenen Arbeit eine meßbare Lösung hat für alle λ , welche die Bedingung $|\lambda| < \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}(\omega)| \right)^{-1}$ (für alle $i = 1, \dots, n$ und alle ω) erfüllen. Das liefert auch eine hinreichende Bedingung für die Existenz von Lösungen der Gleichung (1).

M. Jiřina.

Gabillard, Robert: Application de la méthode répétitive à l'étude analogique de processus stochastiques. Ann. Assoc. internat. Calcul Analogique **1**, 280—289 (1959).

Es wird folgendes Problem untersucht: Gegeben ist eine Transformation, die jeder Funktion $\varphi(t)$ einer Klasse von Funktionen eindeutig eine Bildfunktion $\Phi(t)$ zuordnet. Diese Zuordnung sei durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen beschreibbar. Das Ergebnis der Transformation von $\varphi_0(t)$ sei $\Phi_0(t)$, und die Transformierte von $\varphi_0 + \Delta\varphi_0$ heiße $\Phi_0 + \Delta\Phi_0$. Ist $\Delta\varphi_0(t)$ eine Zufallsfunktion (speziell ein weißes Rauschen), dann ist auch $\Delta\Phi_0(t)$ eine Zufallsfunktion. Die Eigenschaften von $\Delta\Phi_0(t)$ werden nun untersucht, indem man zunächst mit einer Analogrechenanlage zu gewissen diskreten Zeitpunkten t_i die Werte $\Phi_0(t_i)$ ermittelt. Nach Hinzuschalten einer Rauschspannungsquelle für $\Delta\varphi_0(t)$ löst man das Differentialgleichungssystem N -mal und hat damit eine Stichprobe vom Umfang N aus der Verteilung der Werte von $\Phi_0(t_i) + \Delta\Phi_0(t_i)$ gewonnen. Wegen der Kenntnis von $\Phi_0(t_i)$ ist damit auch eine Stichprobe aus der Verteilung von $\Delta\Phi_0(t_i)$ gegeben. Auf Grund dieser Stichproben werden dann Rückschlüsse auf interessierende statistische Eigenschaften von $\Delta\Phi_0(t)$ gezogen. Angewendet wird das Verfahren zunächst auf die durch

$$\ddot{\Phi}(t) + 2m\dot{\Phi}(t) + \omega_0^2\Phi(t) = \omega_0^2\varphi(t) \quad (\ddot{\Phi}(0), \dot{\Phi}(0) \text{ fest vorgegeben})$$

beschriebene Transformation, um die hier leicht erhältlichen theoretischen Ergebnisse mit den Ergebnissen aus dem Stichprobenverfahren zu vergleichen. Danach wird ein System von zwei nichtlinearen Differentialgleichungen, das bei der Steuerung eines Synchrontrons wesentlich ist und zu den Untersuchungen anregte, nach dem beschriebenen Verfahren analysiert.

K. W. Gaede.

Gorman, C. D.: Brownian motion of rotation. Trans. Amer. math. Soc. **94**, 103—117 (1960).

Die von F. Perrin [Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. **45**, 1—51 (1928)] zuerst, später von K. Yosida (dies. Zbl. **33**, 385) behandelte Brownsche Bewegung von Rotationen im R^3 wird hier im Gegensatz zu den dortigen Methoden (Diffusionsgleichung) durch Abrollen (ohne Gleiten oder Drehgleiten) einer Kugel auf der Ebene erzeugt, indem die Kugel entlang den Näherungspolygonen einer zweidimensionalen Brownschen Bewegung abrollen soll. In dieser selbständig lesbaren Abhandlung gelingt es dem Verf., durch ziemlich umfangreiche und mühevollen Methoden

die gleichmäßige Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit eins bei Verfeinerung der Zeitintervalle der ebenen Brownschen Bewegung nachzuweisen. *D. Morgenstern.*

Maravall Casesnoves, Dario: Neue Sätze über die Brownsche Bewegung und stochastische Schwingungen. *Revista mat. Hisp.-Amer.* **19**, 51—66, 105—121 (1959) [Spanisch].

In the first part of the paper the author considers some properties of Brownian motion in n -space. By specializing results for isotropic processes he obtains several results for Brownian motion, some of which are new. In the second part he studies the random motion of certain physical systems under random impulses. The paper is written in an informal style which makes it difficult to distinguish between facts which are used in proofs and the theorems themselves. *R. Chacon.*

Feller, William: The birth and death processes as diffusion processes. *J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. **38** (offert en hommage à M. Fréchet), 301—345 (1959).

The author shows that Markovian matrices satisfying the differential equations of the birth and death process exist by applying his methods for second order differential operators, thereby exploiting the analogy between these equations and a pair of adjoint diffusion equations (Feller, Generalized second order differential operators and their lateral conditions, to appear, *Illinois J. Math.*). He uses this approach to treat the problem of uniqueness of such matrices and the problem of obtaining criteria which ensure that the row sums add to unity. The paper is self-contained, and as the author mentions, serves well as an introduction to, and illustration of, his work on differential operators and diffusion equations. *R. Chacon.*

Dantzig, D. van et G. Zoutendijk: Itérations markoviennes dans les ensembles abstraits. *J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. **38**, (offert en hommage à M. Fréchet), 183—200 (1959).

The authors study the iterations of a discrete-parameter stationary Markoff process with an abstract state space by generalizing the methods developed by van Dantzig to find absorption probabilities of such processes and using his generalized matrix calculus (this *Zbl.* **66**, 377). *A. Pistoia.*

Chacon, Rafael V.: Limit properties at zero of the Markov semi-group. *Amer. J. Math.* **82**, 106—112 (1960).

The author proves a result for Markov processes with an arbitrary state space, X , which is analogous to a result of Doob for a discrete state space. Suppose $P_s(x, A)$ ($x \in X$, $A \in \mathfrak{B}$, a Borel field over X) is a transition function for a Markov process — for each x a probability measure, for each A a measurable (\mathfrak{B}) function of x , and satisfying the Chapman-Kolmogorov equation. Instead of $\lim_{t \rightarrow 0} P_t(x, A) = 1$ if $x \in A$, the author assumes that for any x and A $P_t(x, A)$ is a continuous function of t ($0 < t$). Then there is a function $U(x, A)$ defined for all x and for A in a suitably large Borel field. $U(\cdot, \cdot)$ is countably additive for each x outside an exceptional set of $P_t(y, \cdot)$ -measure zero for all $t > 0$ and y , $U(x, A) = \delta_A(x)$, the set characteristic function, for sets A in the Borel field generated by $\{\{x: P_t(x, A) \in (a, b)\} \mid t > 0; \text{ real } a, b; A \in \mathfrak{B}\}$. And $\lim_{s \rightarrow 0} \int |P_s(y, A) - U(y, A)| P_t(x, dy) = 0$ for $x \in X$, $t > 0$, and $A \in \mathfrak{B}$. *L. J. Cote.*

Bartoszyński, R.: Some remarks on the convergence of stochastic processes. *Studia math.* **17**, 313—322 (1958).

Let $\xi(t)$, $0 \leq t \leq 1$, be a process with independent increments and no fixed discontinuities. For each n , let $\xi_{n_1}, \dots, \xi_{n_{k_n}}$ be independent random variables, individually negligible for large n . With $t_{n_0} = 0 < t_{n_1} < \dots < t_{n_{k_n}} = 1$ a partition of $[0, 1]$, the author proves that the distribution of the process $\xi_n(t) = \xi_{n_1} + \dots + \xi_{n_k}$ (where k is chosen so that $t_{n_{k-1}} < t \leq t_{n_k}$) converges to distribution of ξ in the metric of Prohorov if and only if the distribution of the random variable $\xi_n(t)$ converges to that of $\xi(t)$, in the metric of Lévy, uniformly in t . *A. Pistoia.*

Takács, Lajos: On a generalization of the renewal theory. Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci. **2**, 91—102, russ. Zusammenfassung 103 (1958).

Das in der „Erneuerungstheorie“ (renewal theory) gewöhnlich zu lösende Problem besteht in der Bestimmung der zufälligen Veränderlichen v_t , welche die Anzahl der Auswechslungen eines Maschinenteils während eines Zeitintervalls $(0, t)$ darstellt vorausgesetzt, daß der Betrieb der Maschine ununterbrochen ist. $K(t)$ sei die Verteilungsfunktion der Lebensdauer des Teils. Der Artikel erweitert die Analyse auf den Fall, in dem die Maschine Stillstands- und Arbeitszeiten ξ_i bzw. η_i von zufälliger Länge hat. Es sei $P\{\xi_i < x\} = G(x)$, $P\{\eta_i < x\} = H(x)$, $\beta(t)$ das Maß der Punkte des Intervalls $(0, t]$, in denen gearbeitet wird. Die asymptotische Verteilung der Anzahl der Auswechslungen $v_{\beta(t)}$ für $t \rightarrow \infty$ wird unter gewissen Voraussetzungen über $G(x)$, $H(x)$, $K(x)$ bestimmt. Die asymptotische Verteilung von v_t für stetige Betriebszeit ist für drei Voraussetzungen betreffs $K(x)$ gegeben. Unter Heranziehung der Ergebnisse aus zwei früheren Artikeln ist die asymptotische Verteilung von $\beta(t)$ in der Tafel I für verschiedene Kombinationen der für $G(x)$ und $H(x)$ vorgeschriebenen Voraussetzungen gegeben. Diese Ergebnisse werden dann in Kombination mit den der Verteilungsfunktion $K(x)$ vorgeschriebenen Voraussetzungen und an Hand des Theorems von R. L. Dobrušin zwecks Erreichung von 59 verschiedenen Ergebnissen für die asymptotische Verteilung der Zahl $v_{\beta(t)}$ der Auswechslungen verwendet.

A. H. Žaludová.

Pakshirajan, R. P.: On the maximum partial sums of sequences of independent random variables. Theor. Verojatn. Primen. **4**, 398—404 (1959); Theor. Probab. Appl. **4**, 367—372 (1961).

Die Voraussetzungen der K. L. Chung'schen Grenzwertsätze (dies. Zbl. **32**, 171) über $P\left(\frac{S_n^*}{s_n} < x\right)$ mit $S_n^2 = \sum_{\nu=1}^n \sigma_\nu^2$, $\sigma_\nu^2 = \text{Str.}(X_\nu)$, $E(X_\nu) = 0$, $S_n^* = \max_{1 \leq \nu \leq n} |S_\nu|$, $S_\nu = \sum_{\mu=1}^\nu X_\mu$ werden durch Benutzung der Esseen'schen Untersuchung [Acta math. **77**, 1—125 (1945); dies. Zbl. **60**, 287] abgeschwächt: Statt einer gewissen Wachstumsbeschränkung der dritten absoluten Momente der X_ν wird eine Lindeberg-artige Bedingung für die Konvergenz der zweiten Momente verlangt:

$$\frac{1}{(\log s_n)^{1/2} s_n^{2-\varepsilon}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{|x| > s_n^{1-\alpha}} x^2 dF_\nu = O(1). \quad D. Morgenstern.$$

Salvemini, Tommaso: Distribution de l'étendue d'échantillons obtenus par des tirages en bloc d'un ensemble de nombres équidistribués. Bull. Inst. internat. Statist. **36**, Nr. 3, 71—78 (1959).

The author derives the distribution of the range of a sample of N , drawn without replacement, from a population of size H , consisting of the numbers $1, \dots, k$ each repeated h times. When N, k are constant and H tends to infinity, he studies the limiting distribution. He shows it corresponds to sampling with replacement from a population of k equally probable consecutive numbers, and compares it with the distribution of the range of a uniform distribution on $(0, k)$. He illustrates, in a numerical example, the striking differences in results between the two sampling schemes and for the same sampling scheme using different populations.

T. V. Narayana.

Gaede, Karl-Walter: Die Verteilung von gewissen reellen Wurzeln der Gleichung n -ten Grades mit reellen Zufallskoeffizienten. Monatsh. Math. **63**, 359—367 (1959).

Die vorliegende Arbeit ergänzt die Dissertation [Math. Nachr. **21**, 81—107 (1960)] des Verf. Gegeben sei ein Polynom n -ten Grades in einer Variablen. m beliebige von den $(n+1)$ Koeffizienten seien reellwertige zufällige Variable mit einer

gemeinsamen Verteilungsdichte, die übrigen seien feste reelle Zahlen. Es wird untersucht, wann in einem Intervall der reellen Achse für alle Realisationen der zufälligen Koeffizienten genau eine Wurzel liegt. Für diesen Fall wird die Randverteilung der betreffenden Wurzel berechnet, und zwar ohne daß man die Verteilung aller Wurzeln zu kennen braucht. Die Methode wird an einem Beispiel erläutert.
W. Uhlmann.

Mickey, Ray: Some bounds on the distribution functions of the largest and smallest roots of normal determinantal equations. *Ann. math. Statistics* **30**, 242—243 (1959).

Es seien S_{ij}^1 und S_{ij}^2 zwei Stichprobenkovarianzmatrizen aus normalverteilten Gesamtheiten mit identischen Kovarianzmatrizen. Verf. gibt eine untere Schranke für die kleinste und eine obere Schranke für die größte Wurzel der Gleichung $|S_{ij}^1 - W S_{ij}^2| = 0$ mit Hilfe der F -Verteilung.
O. Ludwig.

Clark, Charles E.: The utility of statistics of random numbers. *Operations Res.* **8**, 185—195 (1960).

Bei der Durchführung einer Monte-Carlo-Methode mit Hilfe einer Tabelle von Pseudozufallszahlen kann man wesentlich an Zeit und Aufwand sparen, wenn die Zahlen der Tabelle in Gruppen eingeteilt sind und man deren statistische Kenngrößen sowie die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der einzelnen Gruppen auf Grund der vorausgesetzten Gesamtverteilung der Zufallszahlen kennt. Jede dieser Gruppen ist dann eine Stichprobe aus der Gesamtheit der Pseudozufallszahlen. Man kann dann die Monte-Carlo-Methode wie einen Zonentest (stratified sampling) durchführen, so daß man — bei günstiger Wahl der Zonen — schon mit relativ wenigen Stichproben kleinen Umfangs verhältnismäßig enge Vertrauensbereiche für die gesuchten Größen erhält. Die Zoneneinteilung läßt sich fortlaufend verbessern. Verf. wendet dieses Verfahren auf ein einfaches Problem aus der Theorie der Warteschlangen an. Dabei legt er eine Tabelle exponentiell verteilter Pseudozufallszahlen zugrunde. Führt man ein solches Verfahren mit einem Digitalrechner durch, so muß man sicher sein, daß die Gesamtfolge der erzeugten Pseudozufallszahlen die zugrundegelegte Verteilung hat. Die Einteilung in Gruppen, die Ermittlung ihrer statistischen Kenngrößen und der Wahrscheinlichkeiten für ihr Auftreten, sowie den Zonentest besorgt dann der Rechner automatisch. Einige Bemerkungen werden noch über den Ausgangszustand gemacht, in dem sich das zu untersuchende System bei Beginn des Monte-Carlo-Verfahrens befinden soll.
R. Böttger.

Statistik:

Wilks, S. S.: A two-stage scheme for sampling without replacement. *Bull. Inst. internat. Statist.* **37**, Nr. 2, 241—248 (1960).

Es wird folgendes zweistufige Auswahlverfahren untersucht: Die Grundgesamtheit vom Umfang N sei in k Primäreinheiten π_i mit den Umfängen $M_1 \cdot m, \dots, M_k \cdot m$ (m natürliche Zahl) unterteilt. Den π_i ($i = 1, \dots, k$) werden $m \gamma_i$ Untersuchungseinheiten entnommen, wobei γ_i Zufallsveränderliche mit der Hypergeometrie-Verteilung $\binom{M_1}{\gamma_1} \dots \binom{M_k}{\gamma_k} \binom{M}{n}$ ($M = M_1 + \dots + M_k$; $n = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$) sind.

Als Schätzwert \bar{x} für den Erwartungswert μ der Grundgesamtheit wird $\bar{x} = \sum_{i=1}^k \gamma_i \cdot \bar{x}_i$, \bar{x}_i arithmetisches Mittel der Stichprobe aus π_i verwendet und gezeigt, daß \bar{x} unverzerrt ist. Die Streuung von \bar{x} wird berechnet und ein unverzerrter Schätzwert für sie angegeben. Daraus wird unter der Annahme, daß die Kosten für die Entnahme von m Untersuchungseinheiten aus π_i ($i = 1, \dots, k$) alle gleich und bekannt sind und auch die Prüfungskosten für eine Untersuchungseinheit bekannt sind, m so be-

stimmt, daß bei festen Gesamtprüfungskosten die Streuung von \bar{x} möglichst klein wird. (Ist m nicht Teiler der Umfänge N_i aller π_i , so schlägt Verf. vor, für den Auswahlvorgang die N_i entsprechend „abzurunden“.) *K. W. Gaede.*

Daniel, Cuthbert: Parallel fractional replicates. *Technometrics* 2, 263—268 (1960).

Wegen hoher Kosten soll die Wirkung von k Faktoren auf r Eigenschaften eines Produktes gleichzeitig gemessen werden. Unter der Annahme, daß das Einflußschema bekannt ist, man also weiß, welche Faktoren die einzelnen Eigenschaften beeinflussen, werden für $r = 2$ wirksame symmetrische Versuchspläne angegeben und deren Robustheit gegenüber falschem Einflußschema diskutiert. Näher untersucht werden die Fälle 3—0—3, 2—1—2, 1—3—1 und 3—1—3. (Der 1. Term gibt die Anzahl der Faktoren, die nur die erste Eigenschaft (y_1) beeinflussen, an, der 2. Term die Anzahl der Faktoren, die y_1 und y_2 beeinflussen, der 3. Term die Anzahl der Faktoren, die nur y_2 beeinflussen.) Auf Schwierigkeiten bei unsymmetrischen Schemata und solchen für mehr als zwei Eigenschaften wird hingewiesen. *H. Grimm.*

Lieblein, Julius: A general analysis of variance scheme applicable to a computer with a very large memory. *J. Assoc. comput. Machin.* 6, 469—475 (1959).

Madansky, Albert: Bounds on the expectation of a convex function of a multivariate random variable. *Ann. math. Statistics* 30, 743—746 (1959).

Ungleichungen, betreffend die Erwartungswerte mehrdimensionaler Zufallsvariablen, werden hergeleitet mit Hilfe der Theorien der Momentenräume und der konvexen Punktmengen. *O. Ludwig.*

Ziaud-Din, M.: The expression of k -statistic k_{11} in terms of power sums and sample moments. *Ann. math. Statistics* 30, 825—828 (1959).

Verf., der bereits früher die Ausdrücke für die 9. und 10. k -Größe (k -statistic mittels Produkten von Potenzsummen gegeben hatte, bringt hier, Tafeln von Abdel Aty. (s. dies. Zbl. 55, 128) benutzend, den entsprechenden Ausdruck für die elfte k -Größe. *O. Ludwig.*

Vas, É.: On the efficiency of the sequential probability ratio test. *Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* 4, 171—181 (1959).

The author proves three simple lemmas which lead to formulas for calculating the upper and lower bounds of the average sample number under conditions that include the normal case. Then he finds bounds on the A. S. N. of a test of the mean of a normal distribution when the true mean lies halfway between the hypothesis and alternate means. Tables illustrate the dependence of these bounds on α , β and the distance between the hypothesis and alternate means. The reader should note that the author's use of the phrase "current most powerful test" refers to the fixed sample size test current at the time of Wald's book, that Girshick (this Zbl. 85, 355) showed that the efficiency can never exceed 1, and that the author, in calculating table 2, seems to have used fractional values for the sample size of the fixed sample test. *L. J. Cote.*

Skibinskiy, Morris: Some properties of a class of Bayes two-stage tests. *Ann. math. Statistics* 31, 332—351 (1960).

Es wird die Klasse der Bayesschen Lösungen beim bekannten Zwei-Stufen Entscheidungsproblem zwischen zwei Normalverteilungen $N(-a, 1)$ und $N(a, 1)$ betrachtet. Es werden einfache Kosten und Verluste angesetzt. Es werden mehrere Eigenschaften und ein nur vom kleinsten Verlust abhängiges Intervall für die Funktion $V_m(X_m)$ abgeleitet, die den Umfang der zweiten Stichprobe in Abhängigkeit von der ersten Stichprobe X_m (Umfang = m) angibt. Es werden hinreichende Bedingungen für die Verluste angegeben, unter denen eine Bayessche Lösung mit vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeiten gefunden werden kann. Weiterhin werden die Minimalisierung des größten erwarteten Gesamtumfanges bei beliebigem m betrachtet und Approximationen und Tabellen für m , y_m angegeben. *O. Bunke.*

Darwin, J. H.: Note on a three-decision test for comparing two binomial populations. *Biometrika* 46, 106—113 (1959).

Es liegen zwei Prozesse vor, in denen ein „Ereignis“ mit den Wahrscheinlichkeiten p_1 bzw. p_2 auftreten kann. Es werden paarweise beide Prozesse miteinander verglichen. Eine Variable γ nehme die Werte 1, 0, -1 an, wenn a) das Ereignis im ersten Prozeß eintritt, im zweiten nicht, b) das Ereignis in beiden gleichzeitig eintritt oder nicht eintritt und c) das Ereignis im zweiten eintritt, im ersten nicht. $\gamma(m)$ bedeute die Summe der γ mit $\gamma(0) = 1/2(n+1)$, n ungerade. — Es wird ein Sequentialtest in der Weise durchgeführt: Erreicht $\gamma(m)$ bei einem m den Wert $\gamma(m) = 0$, dann wird eine Entscheidung zugunsten des ersten Prozesses getroffen, erreicht $\gamma(m) = n+1$ zugunsten des zweiten. Wird nach M Schritten keine der beiden Grenzen erreicht, so sollen beide Prozesse als gleichwertig angesehen werden. — Unter der Bedingung, daß die Gleichwertigkeit mit $p = 0,95$ angenommen wird, wenn a) und c) gleichwahrscheinlich sind, und vorgegebener Mächtigkeit des Testes werden n und M berechnet. Der Test wird mit einem Test von Armitage dies. Zbl. 82, 350) verglichen. F. Wever.

MacKay, John H.: Asymptotically efficient tests based on the sums of observations. *Ann. math. Statistics* 30, 806—813 (1959).

Sei $\Phi(Y_1, \dots)$ eine Folge von Testen $\Phi_k = \Phi_k(Y_1, \dots, Y_k)$ von $\theta \in \omega_1$ gegen $\theta \in \omega_2$. Die Y_i seien unabhängig und mit der Dichte f_θ bezüglich μ verteilt. Seien $E_\theta(\Phi) = E_\theta L(\theta, \Phi_k)$ mit beschränkten positiven Verlusten L für falsche Entscheidungen, $r_k(\Phi) = \sup_\theta r_k(\theta, \Phi)$ und $r_k = \inf_\theta r_k(\Phi)$. Seien N bzw. N_Φ die kleinsten ganzen Zahlen k mit $r_k \leq \alpha$ bzw. $r_k(\Phi) \leq \alpha$. Dann ist $N \leq N_\Phi$ und Φ heißt asymptotisch effizient für $\alpha \rightarrow 0$, wenn $N \sim N_\Phi$. In Verallgemeinerung eines Satzes von Chernoff (dies. Zbl. 48, 118) wird gezeigt: Seien $X = \log f_{\theta_2}/f_{\theta_1}$ mit $\theta_1 \in \omega_1$, $\varrho_\theta = \inf_t E_\theta e^{tX}$, $\varrho_i = \sup_{\theta \in \omega_i} \varrho_\theta$ und $E_\theta X < 0$ bzw. > 0 für $\theta \in \omega_1$ bzw. ω_2 ; dann ist der nichtrandomisierte Test $\Phi_k^* = 1$ für $X_1 + \dots + X_k > 0$ asymptotisch effizient für $\alpha \rightarrow 0$ und, falls $\varrho_1 \neq 0$, $N \sim N_{\Phi^*} \sim \log \alpha / \log \varrho_1$. Die Arbeit behandelt besonders die Anwendung auf das Prüfen von $p - q \leq -\delta$ gegen $p - q > \delta$ in zwei unabhängigen Binomialverteilungen $\mathfrak{B}(m, p)$, $\mathfrak{B}(n, q)$ durch Tests $\Phi_k^* = 1$ für $\lambda(\bar{X} - 1/2) > (\bar{y} - 1/2)$ mit \bar{X}, \bar{y} = relative Häufigkeiten, $\lambda = m/n$. H. Witting.

Rao, C. Radhakrishna: Expected values of mean squares in the analysis of incomplete block experiments and some comments based on them. *Sankhyā* 21, 327—336 (1959).

The author first recalls some results from an earlier paper (cf. this Zbl. 30, 311), giving expected values of mean squares for incomplete block designs, randomized with respect to allocation of subsets of treatments to blocks, and also with respect to allocation of treatments of a subset to plots within a block. He now obtains further results, appropriate to the case when only the second of these two randomization procedures is applied. The effects of non-additivity in a balanced incomplete block design are discussed, with special reference to the effect of block \times treatment interactions in hindering the detection of real differences between average treatment effects. The results are extended to partially balanced incomplete block designs of quasi-factorial type and to linked block designs. N. L. Johnson.

Deming, W. Edwards and Gerald J. Glasser: On the problem of matching lists by samples. *J. Amer. statist. Assoc.* 54, 403—415 (1959).

Es seien zwei Listen mit M bzw. N Namen gegeben. In jeder Liste soll jeder Name nur einmal auftreten, es sollen D Namen beiden gemeinsam sein. $p = D/M$ sei der Anteil der gemeinsamen Namen in Liste 1. — Es werden Stichproben mit den Umfängen m und n aus den beiden Listen entnommen und die Anzahl d der in der

Stichprobe auftretenden gemeinsamen Namen bestimmt. Es werden biasfreie Schätzfunktionen für p und D angegeben. Besonders behandelt werden die Fälle, in denen nahe bei 1 liegt und in denen etwa $n = N$ ist, d. h. die eine Liste ganz in die Stichprobe einbezogen wird. *F. Wever.*

Watterson, G. A.: Linear estimation in censored samples from multivariate normal populations. *Ann. math. Statistics* 30, 814—824 (1959).

Verf. dehnt die Ergebnisse von Gupta (dies. Zbl. 48, 120) und Sarhan und Greenberg (dies. Zbl. 71, 135, 86, 354) bezüglich linearer Schätzer für Mittelwert und Standardabweichung bei „zensierten“ Stichproben aus normalverteilten Gesamtheiten auf Stichproben aus mehrdimensional-normal verteilten Grundgesamtheiten aus. Es sei die Stichprobe bezüglich einer Variablen (d. h. einer Vektorkomponente) geordnet. Es können Stichprobenwerte fehlen A. von allen Komponenten einiger Vektoren, B. nur von den nicht geordneten Komponenten, C. nur von den geordneten Komponenten. Für alle Möglichkeiten werden (im zweidimensionalen Fall) praktische Beispiele aufgezeigt. Eine weitere Verallgemeinerung besteht darin, daß sich die „zensierten“ Werte nicht nur an den Rändern, sondern auch in der Mitte der Stichprobe befinden können. Bei Binormalverteilung hängt die Varianz des Schätzers noch vom Korrelationskoeffizienten ρ_{12} der Gesamtheit ab, es werde daher nicht Schätzer mit minimaler Varianz für bestimmte ρ_{12} , sondern mit kleiner Varianz für alle Werte ρ_{12} gesucht. Der „alternative“ Schätzer von Gupta (s. o.) wird wegen seiner i. a. hohen Effizienz und leichten Berechenbarkeit empfohlen. Einige Tafeln, die Effizienz der Schätzer betreffend, werden gegeben. *O. Ludwig.*

Bennett, B. M.: On the performance characteristic of certain methods of determining confidence limits. *Sankhyā* 18, 1—12 (1957).

Für die folgenden Probleme die performance characteristics of the presumed confidence intervals are obtained: i) the ratio of two means from a bivariate normal distribution, ii) the abscissa corresponding to a given ordinate of a regression line and iii) the intersection point of two regressions lines. Calculations indicate that the adjective confidence is inappropriate in many instances. Material was announced by Neyman in *Ann. math. Statistics* 19, 116 (1948). *D. R. Whitney.*

Wijsman, Robert A.: Applications of a certain representation of the Wishart matrix. *Ann. math. Statistics* 30, 597—601 (1959).

Sei X eine $p \times n$ -Matrix ($n \geq p$), deren Spalten unabhängig voneinander p -dimensional normalverteilt seien mit Mittelwertvektor 0 und Kovarianz-Matrix Σ . Wenn Σ die Einheitsmatrix ist, kann die Wishart-Matrix $A = X X'$ als Produkt $T T'$ geschrieben werden mit einer Dreiecksmatrix T , die außerhalb der Hauptdiagonalen $N(0, 1)$ -verteilte und in der Hauptdiagonale χ^2 -verteilte (mit verschiedenen Freiheitsgraden) Elemente aufweist. Sei $C C' = \Sigma$, dann kann man allgemeiner $A = C T T' C'$ setzen, wobei C dreieckig gewählt werden kann. Der Nutzen dieser Darstellung zur Lösung einiger Probleme der multivariablen Analysis, z. B. bezüglich der Verteilung des multiplen Stichprobenkorrelationskoeffizienten bei von Null verschiedenem Populationsparameter, wird verdeutlicht. *O. Ludwig.*

Kiefer, J. and J. Wolfowitz: Optimum designs in regression problems. *Ann. math. Statistics* 30, 271—294 (1959).

Verff. betrachten das Problem der günstigsten Wahl der Werte der unabhängigen Variablen x bei allgemeinen Regressionsproblemen. Seien in einem kompakten Raum die k reellwertigen, linear unabhängigen, stetigen Funktionen f_1, \dots, f_k gegeben und es sei zu jedem x eine Zufallsvariable Y_x beobachtbar mit $E(Y_x) = \sum_{i=1}^k a_i f_i(x)$ var $Y_x = \sigma^2$ mit unbekannten Regressionskoeffizienten a_i und unbekanntem σ^2 . Es werden Schätz- bzw. Testprobleme bezüglich 1. eines oder 2. mehrerer a_i und bezüglich 3. der gesamten Funktion behandelt, wobei (im Falle 2. und 3.) verschiedene Optimalitätskriterien betrachtet werden. Die Theorie der Tschebyscheff-Appro-

imationen und spieltheoretische Ergebnisse werden herangezogen. Im Falle eines Polynoms $f_i(x) = x^{i-1}$ im reellen Intervall $[-1, +1]$ wird für die Schätzung des Koeffizienten der höchsten x -Potenz das optimale Verfahren explizit angegeben und gezeigt, daß es gegenüber dem Vorgehen mit äquidistanten Punkten gleichen Gerichts wesentlich effizienter ist (für $k > 3$). Beim entsprechenden Problem im Falle 3. ergeben sich speziell wieder die Ergebnisse von P. G. Guest (dies. Zbl. 87, 53) und P. G. Hoel [Ann. math. Statistics 29, 1134—1146 (1958)]. O. Ludwig.

Guttman, Louis: Metricizing rank-ordered or unordered data for a linear factor analysis. Sankhyā 21, 257—268 (1959).

Es seien $m = 2$ endliche totalgeordnete Mengen A_i gegeben. Über dem cartesianischen Produkt der A_i sei eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert, d. h. eine Abbildung von $A_1 \times A_2$ in die Menge der nichtnegativen Zahlen, so daß $\sum_{a \in A_1 \times A_2} w(a) = 1$.

Eine Fragestellung aus der Faktorenanalyse führt zu dem Problem, die A_i in der Weise anzuordnen, daß die Abbildung in die Menge der linear geordneten reellen Zahlen abzubilden, daß die zufällige Variable y_i , die man in natürlicher Weise durch diese Abbildung von A_i erhält, in bezug auf die andere zufällige Variable eine lineare Regression besitzt. Der Verf. referiert zunächst die Literatur zu diesem Problem. Er wendet sich dann dem Fall $m > 2$ zu, setzt jedoch jetzt nicht mehr voraus, daß den A_i eine Vollordnung aufgeprägt ist. Er behandelt die (triviale) Fragestellung, unter welchen Bedingungen die Regressionslinie von y_i für jedes $i = 1, \dots, m$ in bezug auf die anderen zufälligen Variablen linear ist. L. Schmetterer.

Stuart, Alan: Equally correlated variates and the multinormal integral. J. roy. statist. Soc., Ser. B 20, 373—378 (1958).

Suppose $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ are random variables with $E\{x_0\} = 0$, $E\{x_i\} = \mu_i$; $\sigma^2\{x_0\} = \sigma^2\{x_i\} = \alpha^2$; $\sigma\{x_0 x_i\} = \lambda \alpha^2$, $\sigma\{x_i x_j\} = 0$, ($i \neq j = 1, 2, \dots, n$). Then $y_i = x_i - a x_0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) are random variables whose correlations, one with another, are equal. The implications of this for three problems are discussed: (i) some tests of hypotheses about equally correlated variables, (ii) the calculation of the probability that all the y 's are positive, and (iii) the approximation to normality of finite sampling distributions under randomization. L. J. Cote.

Zelen, Marvin and Norman C. Severo: Graphs for bivariate normal probabilities. Ann. math. Statistics 31, 619—624 (1960).

It is the purpose of this paper to present three charts, which will enable one to easily compute the bivariate normal integral to a maximum error of 10^{-2} . This should be sufficient for most practical applications. Owen and Wiesen [Bell Syst. techn. J. 38, 1—20 (1959)] have also presented charts with a similar objective; however we believe the charts presented here lend themselves more easily to visual interpolation. Aus der Zusammenfassung.

Grenzgebiete und Anwendungen:

Drischel, H.: Kybernetik und Biologie. Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, math.-naturw. R. 9, 733—744 (1960).

Leslie, P. H.: A note on some approximations to the variance in discrete-time stochastic models for biological systems. Biometrika 47, 196—197 (1960).

Verf. knüpft an seine Arbeit aus dem Jahre 1958 an (dies. Zbl. 89, 158). Damals ist er nicht darauf eingegangen, daß die Varianzen und Kovarianzen bei einem Modell mit diskreten Zeitpunkten immer größer sind als bei dem entsprechenden Modell mit stetiger Zeitbetrachtung. Er behandelt zwei Arten von Modellen, nämlich *BRC*-Modelle, bei denen die Geburtenrate b konstant bleibt, und *DRC*-Modelle, bei denen die Sterberate d konstant ist. Wenn man die Abstände der diskreten Zeitpunkte sehr klein wählt, so ist der Unterschied zu einem stetigen Zeitverlauf nicht mehr groß. Als erste Approximation für die Varianz Φ zum Zeitpunkt t gibt Verf. an bei einem *BRC*-Modell: $\Phi_t \sim (b+1) + (b-1)\lambda_t$ mit $\lambda_t = b - d_t$ und bei

einem *DRC*-Modell: $\Phi_i \sim (d-1) + (d+1)\lambda_i$ mit $\lambda_i = b_i - d$; für $b = 1,0$, $b = 0,8$ und $b = 0,5$ und $\lambda_i = 0,5 \dots 1,9$ werden exakt und angenähert die Zahlenwerte für Φ_i angegeben. *G. Reißig.*

Finney, D. J.: A simple example of the external economy of varietal selection. *Bull. Inst. internat. Statistik* 37, Nr. 3, 91—106 (1960).

Bei der Steigerung von Getreideerträgen durch Selektion muß darauf geachtet werden, daß die Forschungsarbeiten nicht zu kostspielig werden. Der Verf. untersucht daher das Problem in der Weise, daß der Geldwert der erzielten Erträge verglichen wird mit den Kosten des Selektionsprogrammes. Er geht aus von N Arten einer Getreidesorte, von welchen n mit dem Ziel der Ertragssteigerung herausgegriffen werden sollen. Die wichtigsten Faktoren, die berücksichtigt werden müssen, sind die durchschnittlichen Kosten für die Züchtung einer neuen Art, die Kosten für die Durchführung von Feldversuchen, die statistische Genauigkeit und die genetische Variabilität. Der Verf. knüpft an seine Arbeit aus dem Jahre 1957 an (erschienen 1959; dies. Zbl. 87, 55) und betrachtet den einfachen Fall von Selektion in einer Stufe. Leider sind Selektionen in zwei oder mehr Stufen, die den praktischen Gegebenheiten besser entsprechen, mathematisch kaum zu behandeln. Betrachtungen über die optimale Anzahl von Stufen werden nicht angestellt. *G. Reißig.*

Moran, P. A. P.: The survival of a mutant gene under selection. *J. Austral. math. Soc.* 1, 121—126 (1959).

Verf. untersucht, wie sich eine einzelne Mutante in einer haploiden Gesamtheit verhält, wenn Selektion existiert und die einzelnen Generationen sich überschneiden. Ausgangspunkt der Untersuchungen sind Gedankengänge, die R. A. Fisher 1930 in „The Genetical Theory of Natural Selection“ (Clarendon Press, Oxford) entwickelt hat. Der Verf. verwendet ein von ihm bereits in einer anderen Arbeit [Proc. Cambridge philos. Soc. 54, 60—71 (1958)] aufgestelltes Modell. Er geht aus von einer Gesamtheit, die aus $2n$ haploiden Individuen besteht. Davon sollen am Anfang k_0 zur Mutante a gehören und der Rest zur Mutante A . Die Lebenszeit folgt einer negativen Exponentialverteilung, deren Parameter nur davon abhängt, ob das Individuum zur Gruppe a oder A gehört. Die Überlebenswahrscheinlichkeiten sind bei einer endlichen Gesamtheit leicht anzugeben. *G. Reißig.*

Lancaster, H. O.: Generation life tables for Australia. *Austral. J. Statist.* 1, 19—33 (1959).

Verf. beschreibt ein Vorgehen zur Gewinnung von Generationensterbetafeln der australischen Bevölkerung. Die erste Generation, deren Absterbeordnung dargestellt wird — nicht ohne allerdings zum Teil auf hypothetischen Kindersterbewahrscheinlichkeiten aufzubauen —, sind die Nulljährigen der Jahre 1849—53. Die Arbeit vermittelt auch einen Überblick über die zeitliche Entwicklung der Sterblichkeit in Australien während den letzten 100 Jahren. *E. Zwinggi.*

Continuous mortality investigation. Immediate single life annuities for term certain and life thereafter: 1948—56 experience. *Trans. Fac. Actuaries* 26, 378—39 (1959).

Es wird geprüft an Hand der numerischen Erfahrungen in Großbritannien ob die Rentnerbestände der beiden folgenden Rentenversicherungsformen a) sofort beginnende Leibrente, zahlbar solange der Versicherte lebt, b) sofort beginnend Leibrente, während einer ersten Dauer unabhängig vom Leben des Versicherten zahlbar und danach nur noch fällig, solange der Versicherte lebt, unterschiedlich Sterblichkeitsverhältnisse aufweisen. Entgegen den Erwartungen ergibt sich für die nach Variante b) Versicherten eher eine kleinere Sterblichkeit. *E. Zwinggi.*

Ledermann, Sully: Les dimensions de la mortalité. *Bull. Inst. internat. Statist.* 37, Nr. 2, 417—427 (1960).

Verf. geht von der Erfahrungstatsache aus, daß die Sterbewahrscheinlichkeiten einer bestimmten Sterbetafel im statistischen Sinne voneinander nicht unabhängig

sind und stellt dar, wie die Einflüsse, die auf die Sterblichkeit einer Bevölkerung wirken, sich mit Hilfe einiger Parameter charakterisieren lassen. Diese Parameter sollen nicht zuletzt auch eine Rekonstruktion der Sterbetafel ermöglichen; kleinere Abweichungen gegenüber dem tatsächlichen Verlauf müssen natürlich zugelassen werden. Bei der Herleitung der Parameter bedient sich Verf. mathematisch-statistischer Verfahren, die insbesondere schon in der Psychotechnik zur Anwendung gekommen sind („factor analysis“). *E. Zwinggi.*

Ammeter, Hans: Le problème de la ruine dans la couverture des excédents de sinistres. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 60, 21—36 (1960).

Für die Überschadenrückversicherung (Stop Loss RV.) entwickelt Verf. nach der kollektiven Risikotheorie die Formeln für die Risikoprämien und Sicherheitszuschläge des Erst- und des Rückversicherers ohne und mit Retrozession eines Superexzedenten. Die ergänzenden Zahlenbeispiele geben wichtige Hinweise für die Wahl des Selbstbehalts. Verf. setzt mit dieser Arbeit seine Untersuchungen über „Die Ermittlung der Risikogewinne im Versicherungswesen auf risikotheoretischer Grundlage“ (dies. Zbl. 81, 366) fort. *G. Friede.*

Osadnik, Lucie: Verwendung mathematischer Methoden für die Volkswirtschaftsplanung. Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, math.-naturw. R. 9, 779—780 (1960).

Fisher, Franklin M.: Generalization of the rank and order conditions for identifiability. *Econometrica* 27, 431—447 (1959).

Bei der Strukturdarstellung von Wirtschaftsprozessen durch Gleichungssysteme erhebt sich jeweils die Frage, ob deren Parameter bekannt oder wenigstens schätzbar sind. Hiervon hängt es ab, inwieweit die Identifizierbarkeit des Systems möglich ist. Verf. untersucht das Problem der Identifizierbarkeit einer in Matrizenform gegebenen Strukturgleichung, ausgehend von der Zulassung nichtlinearer und unhomogener Parameter. Die in dem von T. C. Koopmans herausgegebenen Sammelband „Statistical Inference in Dynamic Economic Models“ (New York 1950, dies. Zbl. 41, 269) enthaltenen Untersuchungen werden teils verallgemeinert, teils spezialisiert. Verf. streift auch das Problem der Benutzung von Ungleichungen in der Analysis der Identifizierbarkeit einer Strukturgleichung als Ganzes, wobei den Parametern gewisse einschränkende Bedingungen auferlegt sind. *H. Hecklin.*

Bender, B. K. and A. J. Goldman: Capacity requirement of a mail sorting device. J. Res. nat. Bur. Standards 62, 171—173 (1959).

Goldman, A. J.: Capacity requirement of a mail sorting device. II. J. Res. nat. Bur. Standards 63 B, 79—82 (1959).

Verf. betrachtet ein idealisiertes mathematisches Modell einer Briefsortiermaschine. Post nach r Bestimmungsorten wird in die Maschine eingegeben. Nachdem k Briefe eingegeben sind, stellt die Maschine fest, nach welchem Bestimmungsort die meisten Briefe gerichtet sind. Diese Briefe werden von der Maschine ausgegeben und sodann weitere k Briefe in die Maschine eingegeben. Darauf beginnt der Prozeß von neuem. Die Anlage „blockiert“, wenn sie nach einem Ausstoß noch so voll ist, daß die Eingabe der nächsten k Briefe ihre „Kapazität“ überschreitet. Wird die Kapazität C der Maschine so groß gewählt, daß eine Blockade niemals eintreten kann, so läßt sich die Zahl $x(t)$ der Briefe, die vor dem t -ten Ausstoß noch in der Maschine sind, durch elementare Abzählungen ermitteln. Läßt man auch gelegentlich Blockaden zu, so führt die Frage nach der Häufigkeit der Blockaden auf statistische Fragestellungen und zwar auf einen durch die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Bestimmungsorte beherrschten Markoffschen Prozeß, der einem Endzustand zustrebt. In den beiden Arbeiten handelt es sich in erster Linie um Beiträge zu dem ersten Verfahren. Zunächst wird eine von A. Bruce Clarke [Ann. Math. Statistics 29, 622 (1958)] angegebene nahe Abschätzung $x(t) \leq r^2 k$ für alle t auf $x(t) < r k$ ($r > 1$)

für alle t verschärft und gezeigt, daß diese Schranke auch angenommen werden kann. Sodann werden die Begriffe „Kapazität“ der Anlage, „wirksame“, „wesentlich wirksame“, „gleichförmig wesentlich wirksame“ Kapazität eingeführt und hierfür drei Sätze bewiesen des Inhalts, daß eine Größe C dann und nur dann eine Kapazität bzw. eine wirksame Kapazität ist, wenn gilt $rk - (r - 1) \leq C$ bzw. $rk - (r - 1) \leq C \leq rk$, daß $C = rk - (r - 1)$ die einzige wesentlich wirksame Kapazität ist und daß sie auch gleichförmig wesentlich wirksam ist. Schließlich werden hinsichtlich der statistischen Fragestellung für zwei Beispiele Abschätzungen für den Erwartungswert $E(x)$ angegeben und eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit $P(t_1)$, daß $x(t) = 0$ für $t > t_1$ unter der Bedingung $x(t_0) = C$ und $M(t_0) = k$. Dabei ist $M(t) = \max_i x_i(t)$, wenn $x_i(t)$ die Zahl der Briefe nach dem i -ten Bestimmungsort ist, die sich unmittelbar vor dem t -ten Ausstoß in der Maschine befinden. J. Heinhold.

• **Krelle, Wilhelm und Hans Paul Künzi: Lineare Programmierung.** Zürich. Verlag industrielle Organisation 1958. 121 S.

An economist and a mathematician have collaborated in writing this German introduction into the mathematical basis of Linear Programming. The first chapter contains a survey of the theory of determinants, vectors and matrices, with a few remarks about quadratic forms. The next three chapters deal with the Simplex Method. The reasons for the subdivisions chosen, and the diffuseness and repetitiveness of the presentation are probably to be found in the teaching experience of the authors. A section on Künzi's method for finding a first feasible solution (this Zbl. 85, 358) is included. About eight pages are devoted to the proof of the theorem about equality of the optima in two dual problems. The argument will not satisfy all mathematicians, but it might appeal to economists, since it implies the economic meaning of the theorem. The existence of finite solutions to the two dual problems is assumed without comment. In Chapter 6 the Double Description Method and two methods due to R. Frisch are very briefly mentioned, and Chapter 7 describes the solution of a zero-sum two-person game by Linear Programming. The Appendix deals with arithmetical detail. S. Vajda.

• **Vajda, S.: An introduction to linear programming and the theory of games.** London: Methuen & Co. Ltd.; New York: John Wiley & Sons Inc. 1960. 76 p. 9 s. 6 d. net.

• **Vajda, Stefan: Einführung in die Linearplanung und die Theorie der Spiele.** Deutsche Übersetzung: **Willi Riedler.** (Beihefte zur Zeitschrift „Elektronische Rechenanlagen. Bd. 1.) München und Wien: R. Oldenbourg 1961. 70 S. mit 8 Abb. Brosch. DM 12,—.

An Hand zahlreicher Beispiele werden Zielsetzung und Lösungsmethoden des Linearprogrammings erläutert und der formale Zusammenhang zur Theorie der endlichen Nullsummen-Zweipersonen-Spiele hergestellt. Beweise des Dualitätssatzes und des Satzes von J. Ville sind im Anhang beigelegt; wegen weiterer Beweise wird im allgemeinen auf Vajda's "Theory of Games and Linear Programming" (London 1956) verwiesen. D. Bierlein.

• **Williams (Vil'jams), J. (Dž.) D.: The complete strategist, being a primer on the theory of games of strategy.** [Soversennyj strateg ili bukvar' po teorii strategičeskich igr.] Übersetzung aus dem Englischen von **Ju. S. Golubev-Novozilov.** Unter Redaktion von **I. A. Poletaev.** Moskau: Verlag „Sowjetisches Radio“ 1960. 269 S. R. 1,02 [Russisch].

• **Ventcel', E. S.: Elemente der Theorie der Spiele.** [Élementy teorii igr.] (Populäre Vorlesungen über Mathematik. Nr. 32.) Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1959. 67 S. R. 0,90 [Russisch].

Das 66 Seiten starke Büchlein ist als Nr. 32 der bekannten Reihe „Populäre mathematische Vorlesungen“ des Moskauer Verlags „Fisimatgis“ erschienen und

stellt eine elementare und klare Darstellung der Grundbegriffe der Theorie der Spiele dar. Es enthält keine Beweise, die Tatsachen werden an Hand von Beispielen erläutert. §§ 1—3 geben die Grundbegriffe für endliche Matrixspiele und die Formulierung des Minimaxsatzes; §§ 4 und 5 schildern elementare, auch geometrische Methoden, zur Lösung von 2×2 und $2 \times n$ -Spielen und auch etwas über $m \times n$ -Spiele; § 6 enthält die Brown-Robinsonsche Iterationsmethode und § 7 enthält einige Beispiele für unendliche stetige Spiele.

B. Penkov.

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

● Pogorelov, A. V.: Vorlesungen über die Grundlagen der Geometrie. [Lekcii po osnovanijam geometrii.] Char'kov: Verlag der Universităt Char'kov 1959. 134 S. R. 6,25 [Russisch].

Ce livre, destiné aux étudiants des instituts pédagogiques développe le programme officiel sur les „fondements de la géométrie“. Il comporte cinq chapitres. Le premier présente une esquisse de l'histoire de la question: après avoir rappelé les caractéristiques des *Eléments* d'Euclide, il expose les essais de démonstration du cinquième postulat, l'oeuvre de Lobatchevski, et les principaux travaux relatifs aux fondements de la géométrie dans la seconde moitié du siècle dernier. Le second chapitre donne une construction axiomatique moderne de la géométrie euclidienne; le système d'axiomes adopté diffère un peu du système d'Hilbert: les axiomes d'ordre sont remplacés par des axiomes équivalents mais qui permettent de préparer l'introduction de la mesure des segments; d'autre part, les axiomes de congruence sont remplacés par des axiomes de déplacement. Le troisième chapitre, intitulé „Etude des axiomes de la géométrie euclidienne“ traite des problèmes de non contradiction, d'indépendance et de complétude du système d'axiomes de la géométrie élémentaire. Mais c'est particulièrement dans les deux derniers chapitres que l'A. a apporté des idées originales. Dans celui qui est consacré à la géométrie de Lobatchevski, au lieu de partir comme dans les exposés traditionnels de la théorie des parallèles pour arriver à l'élément linéaire du plan l'A. estime plus naturel de former l'élément linéaire du plan dans le cadre de la géométrie absolue et d'en déduire ensuite tout le reste, jusqu'aux faits fondamentaux de la géométrie de Lobatchevski, y compris la théorie des parallèles. Dans le chapitre de géométrie projective, le plus tôt possible, on introduit une théorie des vecteurs dans le plan affine, des coordonnées affines et on passe ensuite à l'étude du système d'axiomes de la géométrie projective du plan et de l'espace.

M. Decuyper.

Veldkamp, F. D.: Polar geometry. I—IV. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 62, 512—518, 519—526, 527—533, 534—551 (1959).

In einem n -dimensionalen projektiven Raum P_n über einem beliebigen Schiefkörper K (mit Antiautomorphismus J) sei eine Polarität σ gegeben. Ein linearer Unterraum A von P_n heißt streng isotrop, wenn $A \subset A^\sigma$ gilt. σ definiere entweder ein Nullsystem oder gestatte eine Darstellung durch eine „spurwertige“ Semibilinearform $f(x, y)$ (d. h. für jedes x existiert ein λ , so daß $f(x, x) = \lambda + \lambda^J$ gilt). Ferner sei der Maximalrang $i(S)$ streng isotroper Unterräume von P_n mindestens 3. Verf. nennt dann die teilweise geordnete Menge S der streng isotropen Unterräume von P_n die zu σ gehörige Polargeometrie. Zweck der Arbeiten I—IV ist eine axiomatische Begründung dieser Polargeometrien. Teil I bringt allgemeine Eigenschaften streng isotroper Unterräume. In Teil II wird gezeigt, daß man die Isomorphismen zweier Polargeometrien (Isomorphismen im Sinne der Halbordnungen) sämtlich durch Einschränkungen von Projektivitäten der zugehörigen projektiven Räume erhält. In Teil III folgen die Axiome (I—X). I—III be-

sagen: Gegeben sei eine Halbordnung $S (\leq)$, in der $\cap a_\alpha = \inf (a_\alpha)$ für jede Teilmenge $\{a_\alpha\} \subseteq S$ existiert (vollständiger Halbverband). IV: Ist $a \in S$, so bilden die x mit $x \leq a$ einen endlichdimensionalen projektiven Raum. V: Jedes $a \in S$ ist in einem maximalen Element von S enthalten. Alle maximalen Elemente haben gleichen endlichen Rang $i(S) \geq 3$. VI: Ist $x \cap y = 0$, dann gibt es maximale Elemente a, b in S mit $x \leq a$, $y \leq b$ und $a \cap b = 0$. VII: Zu disjunkten maximalen Elementen a, b gibt es eine Dualität δ von a auf b , bei der $x \cup x^\delta (= \sup (x, x^\delta))$ für alle $x \leq a$ existiert und maximal ist. — Eine nichtleere Teilmenge Θ von S heißt unter folgenden Annahmen flach: (1) Aus $x, y \in \Theta$ und der Existenz von $x \cup y$ folgt $x \cup y \in \Theta$. (2) Mit den Punkten x, y gehört jeder Punkt z zu Θ , für den mit $a \cup x$ und $a \cup y$ stets auch $a \cup z$ existiert. (3) Aus $x \in \Theta$ und $y \leq x$ folgt $y \in \Theta$. — Dann besagt VIII: Es gibt eine endliche Anzahl von Punkten ($\in S$), so daß S die einzige flache Menge ist, die diese enthält. — IX und X werden nur für $i(S) = 3$ benötigt: IX: Sind $a, b \in S$ maximal, so gibt es eine Projektivität von a auf b . X: In jedem $x \in S$ gilt der Desarguessche Satz. Teil IV der Arbeit liefert schließlich den Nachweis, daß man ein System S mit I—X als Polargeometrie bzw. im Falle Char. $K = 2$ als Teil einer Polargeometrie auffassen kann. Der Einbettungsraum hat mindestens die Dimension 5. Eine Begründung von Polargeometrien in Räumen P_n mit $n \leq 4$ bleibt also offen. [Bem. des Ref.: Im Falle $n = 3$ kann man statt der streng isotropen Unterräume maximale ebene und lineare Mengen isotroper Punkte betrachten und entsprechende Geometrien begründen. Vgl. dazu eine Arbeit von W. Benz in dies. Zbl. 81, 147) und eine weitere des Ref. in Math. Ann. 141, 1—21 (1961)].

G. Ewald.

Blaschke, Wilhelm: Sulle congruenze rettilinee nello spazio ellittico. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 48, 209—221 (1959).

Schon in seiner Arbeit „Über isometrische Flächenpaare“ [J.-Ber. Deutsche Math. Verein. 22, 154—183 (1913)] und ausführlicher im dritten Teil seines Buchleins über „Nichteuklidische Geometrie und Mechanik“ (dies. Zbl. 27, 133) hat Verf. den Gegenstand der vorliegenden Note behandelt, die sich methodisch der Hilfsmittel der Quaternionenrechnung und des äußeren Differentialkalküls bedient und sich geometrisch auf die Abbildung der orientierten Geraden des elliptischen Raumes auf die Punktpaare zweier Kugeln stützt, durch welche die elliptischen Bewegungen auf die simultanen Drehungen der beiden Bildkugeln übertragen werden. — Da es sich um die neue Darlegung klassischer Gegenstände handelt, genügt es, zur Beschreibung des sachlichen Inhalts die Überschriften einiger Paragraphen zu nennen: Linienkongruenzen, Polare Kongruenzen, Normale Kongruenzen, Elliptische Flächentheorie, Tschebyscheffsche Kongruenzen (Normalennetze von Flächen, deren Normalentorsen auf den Bildkugeln Tschebyscheffsche Kurvennetze sind), Isotrope Kongruenzen. Zusammenhang von isotropen Kongruenzen und isotropen Kurven. Alle diese Dinge werden mittels der genannten methodischen Hilfsmittel auf knappem Raum mit vollendeter analytischer Eleganz behandelt.

K. Strubecker.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● Jaeger, Arno: Introduction to analytic geometry and linear algebra. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1960. XII, 305 p. \$ 5.50.

Das dem Andenken von H. L. Schmid gewidmete Lehrbuch ist bestrebt, eine moderne Darstellung der Elemente der analytischen Geometrie auf der Grundlage der Strukturbegriffe: Gruppe, Vektorraum, Euklidischer Vektorraum zu geben und dabei für Anfänger (undergraduates) verständlich zu bleiben. Das erfordert ein überlegtes Auswägen von Konkretem und Abstraktem und schrittweise Gewöhnung an Abstraktionen. Aufstieg vom Besonderen zum Allgemeinen und Darlegung vieler

gezielter“ Beispiele erleichtern das Verständnis. Anwendungen erläutern die Reichweite der Theorien. — Der Umfang des Buches umfaßt etwa eine ein- bis zweisemestriges Einführungsvorlesung. Der Inhalt weicht erheblich von dem traditioneller amerikanischer Lehrbücher der Analytischen Geometrie ab, wie die folgende Liste der Kapitelüberschriften zeigt: I: Grundlagen (Elementare Mengenlehre, Schiebungen, Gruppen, Vektorräume, Gedanken der Analytischen Geometrie, Geraden und Ebenen). I: Lineare Geometrie und Algebra (Lineare Gleichungssysteme, Dimension und Basis eines Vektorraumes, Positive Lösungen von linearen Gleichungssystemen, Linear Programming, Matrizenrechnung, Spezielle Matrizen, Lineare Abbildungen). II: Multilineare Geometrie und Algebra (Länge und Winkel, Euklidische und unäre Vektorräume, Rekursive Definition der Determinanten, Grundeigenschaften der Determinanten, Orientierung, Flächeninhalt, Rauminhalt, Vektorprodukt). V: Quadratische Geometrie und Algebra (Kreise und Kugeln, Kegelschnitte, Reduktion quadratischer Polynome, Klassifikation von Kegelschnitten und Quadriken). Anhang: Bemerkungen über die axiomatische Behandlung der Analytischen Geometrie. — Ein Literaturverzeichnis sowie eine Übersicht über die Bezeichnungen sowie in Index erleichtern den Gebrauch des pädagogisch gut aufgebauten Buches, bei dem allerdings, wie bei vielen seiner Art, die Geometrie selbst etwas zu kurz kommt; um so besser geht es der Algebra, deren lineare Teile sorgfältig dargestellt werden. Zahlreiche Aufgaben.

K. Strubecker.

● **Athen, Hermann: Vektorielle analytische Geometrie.** Hannover: Hermann Schroedel Verlag KG.; Paderborn: Verlag Ferdinand Schöningh 1960, 70 S. DM 5,80.

Das Heft beginnt mit einer Einführung in die Grundtatsachen der Vektoralgebra. Dann folgt in konsequent vektorieller Behandlung der herkömmliche Schulstoff der analytischen Geometrie. Der Zusammenhang der Vektorformeln mit ihren koordinatenmäßigen Entsprechungen wird hergestellt, um die Verbreitung der Vektorrechnung im mathematischen Schulunterricht zu erleichtern. In den Abschnitten über Gerade, Ebene, Kreis und Kugel wird das rechnerische Prinzip der analytischen Geometrie ausführlich dargelegt. Die Kegelschnitte erfahren eine gemeinsame, auf die Idee der geometrischen Verwandtschaften gegründete Behandlung. Den Abschluß bildet ein kurzer Abschnitt über die bewegungsgeometrische Erzeugung von Kurven. Besonders hervorzuheben sind die zu den Sätzen gegebenen durchgeführten Beispiele und die zahlreichen Übungsaufgaben.

E. Löffler.

Bottema, O.: Verschiedenes. XLVII: Über den Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene. Euclides, Groningen 36, 77—78 (1960) [Holländisch].

Miller jr., Robert C.: Foci of the conics on a cone. Math. Mag. 30, 193—204 (1957).

Verf. behandelt die Aufgabe, den Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte zu bestimmen, welche aus einem geraden Kreiskegel durch einen Ebenenbüschel ausgeschnitten werden, unter Verwendung des Dandelin'schen Satzes und findet: Der Ort ist im allgemeinen eine Raumkurve C_4 vierter Ordnung und erster Spezies mit Knotenpunkt im Kegelscheitel; C_4 ist eben, wenn die Büschelachse a senkrecht zur Kegelachse liegt; C_4 zerfällt in eine Raumkurve, und eine Mantellinie des Kegels, wenn a den Kegel berührt; ist a parallel zur Kegelachse, so ist C_4 der Schnitt eines parabolischen und eines Kreiszylinders mit zueinander senkrechten Mantellinien, also ganz im Endlichen gelegen. Der ebene Fall, mit dem sich übrigens schon L. A. J. Quetelet in seiner Dissertation (Gent 1819) befaßt hat, ist durch vier Zeichnungen illustriert.

E. Schönhardt.

● **Coxeter (Kokster), H. S. M. (Ch. S. M.): The real projective plane.** [Dejstvitel'naja proektivnaja ploskost']. Übersetzung der 2. Auflage aus dem Englischen von T. V. Solneeva. Unter der Redaktion von A. A. Glagolev. Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1959. 280 S. R. 9,— [Russisch].

Vgl. die Besprechung des Originals in diesem Zbl. 86, 358.

Schuster, Seymour: Pencils of null polarities. Canadian J. Math. 11, 614—620 (1959).

Verf. ergänzt frühere Untersuchungen (dies. Zbl. 70, 161) durch einige Bemerkungen über lineare Büschel von Gewinden, die mit diesen verbundenen Nullsystemen und die Basisnetze der Büschel. H. Horninger.

Pernet, Roger: Sur une extension du groupe conforme. Ann. sci. Univ. Besançon math. Nr. 1, 3—63 (1959).

Die Schrift ist eine ausführliche Ausarbeitung von drei früheren Noten des Verf. die in den C. r. Acad. Sci., Paris [221, 601—603 (1945); 233, 1340—1342, 1419, 1421 (1951; dies. Zbl. 43, 358)] erschienen sind. Die drei einleitenden Kapitel der hauptsächlich synthetisch vorgehenden Arbeit behandeln die konforme Geometrie eines Kreispaares, insbesondere die Theorie der Systeme parataktischer Kreise und der Dupinschen Zykliden. Die Geometrie der parataktischen Kreisscharen S im konformen Raum wird eingehend vom metrischen und gruppentheoretischen Standpunkt aus studiert und auf einer Riemannschen Zahlkugel bzw. Gaußschen Zahlenebene π gedeutet, in der diese Geometrie eine konforme Gruppe G mit invarianten absolutem Kreis k induziert. Dasselbe gilt natürlich für die zu obiger konjugierte parataktische Kreisschar S' . Ausdehnung der Gaußschen Bildebene ins Komplexe, d. h. Abbildung auf das direkte Produkt $\pi \times \pi'$, schafft die Möglichkeit einer Ausdehnung der konformen Gruppe G . Man kann sie mit sog. Quasihomothetien kombinieren, die als Produkte zweier Quasiinversionen erklärt sind, welche jeweils auf die eine der beiden konjugierten parataktischen Kreisscharen S und S' einwirken und als Bilder in $\pi \times \pi'$ Paare von Inversionen besitzen, die die (zusammenfallenden) absoluten Kreise $k = k'$ dieser Ebenen nicht fest lassen, aber zueinander durch eine konforme Automorphie dieser Kreise (eine Cayleysche Bewegung) äquivalent sind. Das Schlusskapitel bringt verschiedene Anwendungen dieser erweiterten (nicht mehr konformen) Gruppe. K. Strubecker.

Feld, J. M.: An application of turns and slides to spherical geometry. Amer. math. Monthly 66, 665—673 (1959).

Turns T_τ und Slides S_σ sind Spezialfälle der vom Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 46, 397) behandelten Transformation der Linienelemente auf einer Kugel, des sog. spherical whirl: ein Linienelement x wird durch T_τ um den Winkel τ gedreht und durch S_σ längs des „eigenen“ Großkreises um den Winkel σ verschoben. Die Überlegung, daß T_τ den Winkel τ zwischen zwei Großkreisen, S_σ die Strecke σ auf einem Großkreis repräsentiert, führt zu einer eleganten Behandlung der sphärischen (Großkreis-)Dreiecke: jedes Dreieck abc wird eindeutig durch den vollen Umlauf eines Linienelements x dargestellt, d. h. durch das alternierende Produkt solcher Transformationen $T_\alpha^* S_\beta T_\gamma S_\alpha T_\beta S_\gamma \cdot x = \varrho x$, $\varrho = \pm 1$. Den beiden Vorzeichen entsprechen dabei die beiden Studyschen Klassen „eigentlicher“ und „uneigentlicher“ Dreiecke; α, β, \dots sind unbeschränkt. Ausführung der Gleichung in Hamilton-Quaternionen liefert nach wenigen Schritten die klassischen Formeln von Delambre. Mit diesem Ansatz bereitet der Übergang zum Polardreieck und zu allgemeinen Polygonen keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Als Beispiel werden „Delambre-Formeln“ für das Kugelviereck aufgestellt. Die Hamilton-Quaternionen, aufgefaßt als homogene Punktkoordinaten eines projektiven R_3 , liefern eine Zuordnung der Linienelement-Geometrie auf der Kugel zur elliptischen Geometrie des R_3 . Von hier aus können, wie abschließend an einem Beispiel gezeigt wird, auch Polygonen behandelt werden, deren Seiten auf beliebigen Kugeln liegen. H. Germer.

Nicolas, Marie Marcel: Géométrie de la chaînette ou hypergéométrie. Z. angew. Math. Phys. 8, 122—141 (1957).

Um die Behandlung von Aufgaben, die sich auf vollkommen biegsame aber mit Masse versehene und der Schwerkraft unterworfenen Seile und Fäden beziehen zu erleichtern, hat der Verf. eine besondere nichteuklidische Geometrie — Ketten-

iniengeometrie oder Hypergeometrie — eingeführt. In dieser wird die Entfernung zwischen zwei Punkten durch den Bogen einer besonderen Kettenlinie, welche durch diese beiden Punkte und die Elastizität des Fadens bestimmt wird, gemessen. Die grundlegenden Begriffe dieser Geometrie, wie es z. B. die Begriffe der Hypergeraden, der Hyperebene, des Hyperkreises, des Senkrechtstehens, der Parallelität und andere sind, werden erklärt. Der Verf. behauptet, daß sich diese Geometrie dann für die Behandlung von Aufgaben über Seile und Fäden besser eigne und sogar die Lösung gewisser Probleme ermögliche, die auf klassische Weise nur angenähert gelöst werden könne.

T. P. Angelitch.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Urban, A.: Die zweite Krümmungsform einer Fläche im R_3 . Časopis Mat. 78, 73—88 (1953) [Tschechisch].

Soit V une surface déterminée, dans un système de coordonnées cartésiennes de l'espace euclidien R_3 , par les équations paramétriques $x^\alpha = x^\alpha(\eta^a)$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$; $a, b = 1, 2$). Soit V_a le symbole de la dérivation covariante et D_a le symbole de Waerden-Bortolotti défini de la manière que $D_a v^b = V_a v^b$ pour un vecteur de la surface V et $D_a v^\beta = B_a^\alpha \partial_\alpha v^\beta$ ($B_a^\alpha = \partial x^\alpha / \partial \eta^a$, $\partial_\alpha v^\beta = \partial v^\beta / \partial \eta^\alpha$) pour un vecteur de l'espace R_3 . Les vecteurs $v_n^\alpha = i^{a_0} \dots i^{a_n} D_{a_n} \dots D_{a_0} x^\alpha$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $v_0, \dots, a_n = 1, 2$; $\alpha = 1, 2, 3$) sont communs pour toutes les courbes qui passent par le point de la surface V dans la direction du vecteur tangent i^a . On appelle v_n^α le n -ième vecteur de courbure adjoint au vecteur i^a . Pour $n = 2$ on a $v_2^\alpha = (-1/R^2) i^\alpha - (\varepsilon/RT) j^\alpha + (1/S) N^\alpha$, où $1/R$ est la courbure géodésique, $1/T$ la torsion géodésique, $1/S$ le scalaire de Codazzi, j^α le vecteur normal de la courbe, N^α le vecteur normal de la surface et $\varepsilon = [i^\alpha j^\alpha N^\alpha]$. On étudie en détail les propriétés du second vecteur de courbure et on trouve en particulier que le lieu des sommets du vecteur en question est une courbe du sixième degré si l'on change le vecteur i^a . On définit aussi les directions pseudo-asymptotiques d'ordre n et on établit les relations avec les autres directions sur la surface.

K. Svoboda.

Özkan, Asim: Über W -(Weingarten)-Flächen, auf der die Kurven der festen Krümmung mit den Krümmungslinien 3-Sechseckwaben bilden. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A 22, 101—122 (1959).

Sieht man von Röhren- und Drehflächen ab, so gehören zu den im Titel genannten Flächen die isothermen W -Flächen und diejenigen mit einer Schar ebener Krümmungslinien. Letztere werden bestimmt; es gibt vier Klassen, deren Gleichungen zum Teil angegeben werden.

G. Bol.

Havlíček, Karel: Kanal- W -Flächen. Časopis Mat. 78, 347—357 (1953) [Tschechisch].

En partant de l'équation différentielle des surfaces canales on détermine toutes les surfaces en question qui appartiennent à la classe de surfaces W . On démontre les théorèmes suivants: Chaque surface canale W est une surface de revolution ou une enveloppe d'un système à un paramètre de sphères de rayon constant; pour qu'une cyclide de Dupin soit une surface W il faut et il suffit qu'elle soit un tore. En outre, on déduit les conditions nécessaires et suffisantes pour que les courbes principales d'une surface canale soient géodésiques.

K. Svoboda.

Stong, Robert E.: Some global properties of hypersurfaces. Proc. Amer. math. Soc. 11, 126—131 (1960).

The three translation theorems of Hsü [Proc. Amer. math. Soc. 10, 324—328 (1959)] are extended to hypersurfaces. A typical result can be stated as follows: Let V^n, V^{*n} be two closed orientable hypersurfaces in an $(n+1)$ -dimensional Euclidean space.

dean space containing no pieces of hypercones with vertex at a fixed point O . Suppose there is a diffeomorphism $f: V^n \rightarrow V^{*n}$; and let X, X^* be the position vectors, with respect to O , of a general pair of corresponding points P, P^* of V^n, V^{*n} under f and M_1, M_1^* the first mean curvatures of V^n, V^{*n} at P, P^* , respectively. If every straight line PP^* passes through O , and if either (a) $M_1^* X^* = M_1 X$ or (b) $M_1^* X^* = -M_1 X$ throughout V^n and V^{*n} , then f is a homothetic transformation with center O and positive or negative constant of proportionality according as (a) or (b) holds.

C. C. Hsiung.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Nožička, František: Die Kurve im affinen Raume und ihr Affinbogen. Časopis Mat. 78, 307—324 (1953) [Tschechisch].

On a résumé, dans ce Mémoire, les résultats principaux de la géométrie différentielle des courbes dans un espace à connexion affine sans torsion. Les considérations de la première partie sont reliées à la notion de la classe d'une courbe, de son arc affiné du système de scalaires qui jouent le rôle des courbures de la courbe etc. Dans la seconde partie, la théorie générale est appliquée à l'étude des courbes dans un espace affiné à deux dimensions.

K. Svoboda.

Nádeník, Zbyněk: Über die projektiven Differentialinvarianten einer ebenen Kurvenschar. Časopis Mat. 78, 229—258 (1953) [Tschechisch].

En appliquant la méthode du repère mobile de E. Cartan l'A. s'occupe de la géométrie projective différentielle d'une couche V de courbes dans un plan projectif et il étudie les invariants différentiels du système en question. Il attache à la couche considérée la correspondance nulle N définie de manière que le point A et la tangente en A de la courbe (A) se correspondent mutuellement. En étudiant la correspondance N et ses correspondances tangentes on fait correspondre à chaque point A de la couche, au moyen de l'environ du second ordre, le faisceau de coniques qui ont le contact d'ordre 3 en A et qui touchent la courbe (A) , ce contact étant précisément d'ordre 1. Au moyen de l'environ du troisième ordre on définit, dans un point A quelconque de la couche V , les (premières, secondes et troisièmes) normales projectives. On décrit ensuite la signification géométrique des normales en question et on étudie les couches pour lesquelles quelques-unes des normales projectives coïncident.

K. Svoboda.

Horák, Vladimír: Theorie der Torsen des Kleinschen fünfdimensionalen projektiven Raumes und ihre Applikation auf Segresche W -Kongruenzen des dreidimensionalen projektiven Raumes. Czechosl. math. J. 9 (84), 590—625, russ. Zusammenfassung 625—628 (1959).

Als Segresche W -Kongruenzen \mathfrak{K} werden jene, zuerst von C. Segre [Atti Accad. Sci. Torino 42, 539—550 (1907)] untersuchten Geradenkongruenzen bezeichnet, deren beide Brennflächen Regelflächen sind. Im Kleinschen Bild erscheint das Paar der Brennflächen einer Segreschen Kongruenz als Schnitt der Kleinschen Quadrik I mit einer Torse des R_5 (Tangentenfläche einer Kurve k des R_5). Liegt k in einem R_4 oder R_3 aus R_5 , so sind die beiden Brennflächen in einem regulären oder singulären linearen Komplex oder in einer linearen Kongruenz enthalten. Die Polarität der Kleinschen Quadrik gibt Anlaß zu der assoziierten W -Kongruenz \mathfrak{K}' von \mathfrak{K} . — Der erste Teil der Arbeit untersucht diese verschiedenen Typen von Segreschen W -Kongruenzen \mathfrak{K} an Hand des Kleinschen R_5 -Bildes und ihre assoziierten Kongruenzen \mathfrak{K}' und gibt für sie vollständige Systeme von projektiven Differentialinvarianten an. Im zweiten Teil der Arbeit werden die gefundenen Ergebnisse zu älteren Untersuchungen von J. Klapka [Spisy Přír. Fak. Masaryk-Univ. Brno 1926, Nr. 69 (1926)] in Beziehung gesetzt.

K. Strubecker.

Speranza, Francesco: *Sulle trasformazioni che posseggono un gruppo di coppie corrispondenze in sè. I—III.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 13, 486—496 (1958); 4, 10—27; 42—56, (1959).

Zwei Mannigfaltigkeiten F , \bar{F} mit r Dimensionen seien durch eine Transformation T miteinander verbunden. Ist dann Ω (und $\bar{\Omega}$) eine Transformation von F (oder \bar{F}) in sich selbst, so sagt man, daß T durch das Transformationspaar $(\Omega, \bar{\Omega})$ in sich verwandelt wird, wenn $\bar{\Omega} T = T \Omega$. Ein System solcher Transformationspaare, die T in sich verwandeln, wird eine Gruppe genannt, wenn: 1. das Produkt $(\Omega_1 \Omega_2, \bar{\Omega}_1 \bar{\Omega}_2)$ der beiden Paare $(\Omega_1, \bar{\Omega}_1)$ und $(\Omega_2, \bar{\Omega}_2)$ dem System angehört; 2. das inverse Paar des Paares $(\Omega_1, \bar{\Omega}_1)$ dem System angehört. [Für den Fall, daß F , \bar{F} zwei Ebenen sind, $\Omega, \bar{\Omega}$ Homographien sind, s. G. Vranceanu, Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 12, 489—496 (1957)]. Aus den obigen Definitionen folgt sofort, daß Ω und $\bar{\Omega}$ zwei isomorphen Gruppen angehören müssen; es stellt sich also die Aufgabe, alle Transformationen T zu finden, die eine Gruppe von Transformationspaaren $(\Omega, \bar{\Omega})$ zulassen, unter der Voraussetzung, daß Ω und $\bar{\Omega}$ zwei gegebene isomorphe Gruppen g , \bar{g} beschreiben, welche als endlich und kontinuierlich angenommen werden. Die Anzahl k der Parameter von g und \bar{g} muß dieselbe sein; und dieselbe ist auch die Dimension h ($h \leq k$, $h \leq r$) der Transitivitätsmannigfaltigkeiten von g und \bar{g} auf F und auf \bar{F} . Die Konstruktion von T wird vom Verf. auf die Bestimmung aller möglichen Isomorphismen zwischen g und \bar{g} zurückgeführt. Es wird dann der Fall betrachtet, daß F und \bar{F} zusammenfallen. Der erste Teil der Abhandlung schließt mit der Aufsuchung der Gleichungen der Isomorphismen zwischen ein- und zweiparametrischen Gruppen, die in der Folge notwendig sind. In der Folge sind immer F und \bar{F} zwei Ebenen. — Im zweiten Teil werden diejenigen Transformationen T zwischen zwei Ebenen bestimmt, die eine Gruppe von Bewegungspaaren zulassen. — Im dritten Teil wird dieselbe Frage für eine Gruppe von Ähnlichkeitspaaren gelöst, im vierten und fünften Teil für eine Gruppe von Homographiepaaren. — Schließlich auch der Fall einer dualistischen Transformation T zwischen F und \bar{F} . E. G. Togliatti.

Sasayama, Hiroyoshi: *On n -dimensional non-holonomic quasi euclidean spaces.* Spatial Math. Sasayama Res. Room 1, 53—66 (1958).

Die Arbeit befaßt sich mit der Verallgemeinerung der früheren Ergebnisse hauptsächlich dies. Zbl. 82, 372) des Verf. über die sogenannten quasieuklidischen Räume auf den nicht holonomen Fall. S. Golab.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

● Pogorelow, A. W.: *Einige Untersuchungen zur Riemannschen Geometrie im Großen.* (Mathematische Forschungsberichte. VIII.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1960. 69 S. DM 14,—.

Vgl. die Besprechung des russ. Originals in diesem Zbl. 80, 149.

Nožička, František: *Über total geodätische Hyperflächen im Riemannschen Räume. I, II.* Časopis Mat. 78, 65—72, 215—228 (1953) [Tschechisch].

1. Soit V_n un espace de Riemann à n dimensions plongé dans l'espace euclidien V_{n+1} à $n+1$ dimensions. L'hypersurface V_{n-1} de V_n , donnée par les équations paramétriques $\xi^\alpha = \xi^\alpha(\eta^a)$ ($\alpha = 1, \dots, n$; $a, b = 1, \dots, n-1$), est totalement géodésique dans V_n si l'on a $h_{ab} = 0$ pour le second tenseur fondamental de V_n . Pour qu'une hypersurface V_{n-1} de V_n puisse être définie comme une hypersurface totalement géodésique dans V_n il faut et il suffit que l'on ait $V_a n^\alpha = 0$, V_a désignant le symbole de la dérivation covariante par rapport à η^a et n^α étant le vecteur normal

de l'hypersurface V_{n-1} . L'hypersurface V_{n-1} étant totalement géodésique dans V_n , la normale n^α dans un point quelconque de V_{n-1} a la direction du vecteur principal du tenseur h_{ab} . — II. La variété V_p à p dimensions, définie dans V_n par les équations paramétriques $\xi^\alpha = \xi^\alpha(\eta^a)$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, p$), s'appelle totalement géodésique dans V_n si chaque courbe géodésique de V_p est aussi géodésique dans V_n . Pour qu'une variété V_p de V_n soit totalement géodésique dans V_n il faut et il suffit que $V_a B_b^\alpha = \begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} B_c^\alpha$, où $B_a^\alpha = \partial \xi^\alpha / \partial \eta^a$. S'il existe une variété V_p totalement géodésique dans V_n qui passe par le point P_0 de V_n et contient le p -vecteur \mathfrak{P}_0 , formé par les directions principales linéairement indépendantes, en nombre de p , du tenseur $h_{\alpha\beta}$ de V_n en P_0 , et qui n'est pas l'hyperplan de V_n , alors V_p se trouve déterminée d'une manière univoque par les propriétés précédentes et elle est située dans l'espace linéaire à $p+1$ dimensions qui passe par le point P_0 et contient le p -vecteur correspondant \mathfrak{P}_0 et le vecteur normal de l'espace V_n au point P_0 . *K. Svoboda.*

Elianu, Ion: Courants autoadjoints dans un espace de Riemann non compact et quelques applications. Bull. math. Soc. Sci. math. phys. R. P. R., n. Sér. 2 (50), 239—248 (1958).

In a Riemannian space a current is said to be autoadjoint, if it coincides with its adjoint. If there exists a homogeneous autoadjoint current, then the space must be orientable. It is proved that a square summable current can be uniquely decomposed into two square summable currents by using the method of orthogonal projection of H. Weyl, and into three (or four) square summable currents in two particular cases (or the general case) by applying a decomposition theorem of Kodaira. These results are also extended to currents continuous in mean at the infinity by using a decomposition theorem of De Rham. *C. C. Hsiung.*

Teleman, C.: Sur les variétés de Grassmann. Bull. math. Soc. Sci. math. phys. R. P. R., n. Sér. 2 (50), 203—224 (1958).

In this paper the author develops the results of E. Cartan on the local properties of Grassmann manifolds Γ over the field of real numbers, or complex numbers or quaternions. At first by using the method indicated in a previous paper by the author (this Zbl. 87, 369) he introduces a metric of Γ , in terms of which the parallel transport in Γ and the equations of geodesics of Γ are obtained. Let V_n be a closed symmetric Riemannian space such that its group G_r of motions is simple closed, g the subgroup of stability of a point in V_n , and Γ^* the nonholonomy space orthogonally complementary to the closed holonomy space identified with the classes xg for $x \in G_r$, the orthogonality being with respect to the Weyl's metric of G_r . It is proved that every integral invariant of V_n can be obtained by orthogonally projecting on Γ^* the integral invariants of G_r with respect to the translations $(*) x \rightarrow \theta x$, $\theta \in G_r$, $x \rightarrow xc$, $c \in g$. If V_n is not symmetric, this result can be extended as follows: Every invariant form of V_n can be obtained by orthogonally projecting on Γ^* the invariant forms of G_r with respect to the group $(*)$. *C. C. Hsiung.*

Helgason, Sigurdur: On Riemannian curvature of homogeneous spaces. Proc. Amer. math. Soc. 9, 831—838 (1959).

A new proof is given of the following theorem of Samelson (this Zbl. 84, 374): A homogeneous space G/K has nonnegative sectional curvature everywhere, where G is a compact connected Lie group and K a closed subgroup. The method of this proof can also be used to prove an analogous theorem of E. Cartan for both compact and non-compact cases. *C. C. Hsiung.*

Su Buchin: On the theory of affine connections in an areal space. Bull. math. Soc. Sci. math. phys. R. P. R., n. Sér. 2 (50), 185—190 (1958).

The affine connection in an n -dimensional areal space with an m -dimensional areal metric $V = \int_{(m)} F(x, p) du^1 \dots du^m$, was investigated by A. Kawaguchi

Tensor, n. Ser. 1, 67—88 (1951; this Zbl. 44, 372)], K. Tandai (this Zbl. 51, 396; 8, 161) and many other writers for the case of several classes of areal spaces, .g., for the metric and submetric classes. In the present paper the author tries to determine the symmetric affine connection $\Gamma_{ij}^{*h}(x, p)$ in an areal space under the conditions: (A) $\delta F(x, p) = 0$, i. e. $F_{,i} - p_h^j \Gamma_{ij}^{*h} = 0$, where $F_{,i} = \partial \log F / \partial x^i$, $p_h^j = p_\alpha^i p_h^\alpha$, $p_j^\alpha = \partial \log F / \partial p_\alpha^j$, $p_\alpha^j = \partial x^j / \partial u^\alpha$ (this condition is called by the author the connecting equations of the space); (B) $\Gamma_{jh}^{*k} |_\alpha p_\alpha^j p_h^k = 0$, where $|_\alpha$ means the derivative by p_α^i . (A) means the invariance of the fundamental function F under the parallel transport of the supporting element (p) , and (B) means that the extremal manifolds are defined by $L_{ij}^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}^i = 0$, where $L_{ij}^{\alpha\beta}$ is the Legendre's form and $P_{\alpha\beta}^i = (\partial^2 x^i / \partial u^\alpha \partial u^\beta) + \Gamma_{hk}^{*i} p_\alpha^h p_\beta^k$.

The conditions (A) and (B) lead us to solve the system of $2n - m$ algebraic equations with $\frac{1}{2} n^2(n + 1)$ unknown Γ_{hk}^{*i} . Hence the solutions depend upon $\frac{1}{2} n(n^2 + n - 4) - m$ arbitrary functions of $n + mn$ arguments x 's and p 's (cf. B. Su, this Zbl. 80, 151; 82, 373). This connection contains all connections considered by other writers as its special cases.
A. Kawaguchi.

Griffin jr., John S.: Affine connections in terms of the tangent bundle. Portugaliae Math. 16, 95—108 (1958).

Let M be a differentiable manifold and let P be the bundle space of the bundle of all frames of M . The notion of a connection for M may be formulated in terms of a mapping of the tangent space to P into itself which projects the space of tangent vectors at each point of P onto a certain sub-space. The author remarks that a connection might be described as a retraction of the tangent space to M ; this paper is devoted to the study of this question.
V. Dumitras.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Rubin, Herman and Oscar Wesler: A note on convexity in Euclidean n -space. Proc. Amer. math. Soc. 9, 522—523 (1958).

Ist S eine konvexe Menge im euklidischen E_n , sind x_i , $i = 1, 2, \dots, m$, Punkte von S , $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = x$, so gehört bekanntlich x zu S . Verff. zeigen, daß dies richtig bleibt für abzählbar unendlich viele Punkte x_i , sogar wenn Banach-Grenzwerte zugelassen werden. Im Hilbert-Raum ist dies nicht richtig, wie ein Gegenbeispiel zeigt. Verallgemeinerung für Schwerpunkte von Untermengen bei beliebiger Wahrscheinlichkeitsbelegung von S .
G. Bol.

Fulton, Curtis M. and Sherman K. Stein: Parallelograms inscribed in convex curves. Amer. math. Monthly 67, 257—258 (1960).

In jedem Eibereich der Fläche A ist ein Parallelogramm der Fläche $\frac{1}{2} A$ enthalten (sogar einbeschrieben) und nur dann kein größeres, wenn F ein Dreieck ist. Sind K und K' ebene konvexe Bereiche mit Flächeninhalt A und A' , so gibt es ein affines Bild von K' das K einbeschrieben und dessen Fläche größer als $\frac{1}{4} A$ ist.
G. Bol.

Kárteszi, F.: Über ein elementargeometrisches Problem. Ann. Univ. Sci. Budapest. Rolandó Eötvös, Sect. Math. 2, 49—60 (1959).

Ein ebener konvexer Bereich heiße „von Quadraten umhüllt“, wenn alle seine Stützrechtecke Quadrate sind. (Wenn diese Quadrate außerdem alle kongruent sind, ist der Bereich von konstanter Breite.) Verf. fragt nach von Quadraten umhüllten Polygonen. Man sieht leicht, daß ein solches Polygon keinen spitzen Winkel haben kann. Daraus folgt, daß es kein von Quadraten umhülltes Dreieck geben kann und daß die

von Quadraten umhüllten Vierecke genau die Quadrate sind. Es gelingt dem Verf., auch die von Quadraten umhüllten Fünfecke und Sechsecke elementargeometrisch zu kennzeichnen.

H. Gericke.

Melzak, Z. A.: A class of star-shaped bodies. Canadian math. Bull. 2, 175—180 (1959).

Ein Körper K heißt sternförmig bez. des Punktes p , wenn er mit jedem Punkt q die ganze Strecke pq enthält. Der Auswahlssatz von Blaschke läßt sich auf derartige sternförmige Körper erweitern. Verf. untersucht insbesondere die Menge $H(K)$ derjenigen Punkte, für die K sternförmig ist. U. a. gilt: $H(K)$ ist konvex, und zwar der Durchschnitt der durch die Tangentialebenen an K gebildeten Halbräume. Zu jedem konvexen C gibt es einen Körper K , der sich von der Kugel beliebig wenig unterscheidet, mit $C = H(K)$.

H. Gericke.

Chern, Shing-Shen: Integral formulas for hypersurfaces in Euclidean space and their applications to uniqueness theorems. J. Math. Mech. 8, 947—955 (1959).

Aufstellung von gemischten Integralformeln für Paare von konvexen Körpern im E_n . Mit Hilfe einer Ungleichung von L. Gårding über hyperbolische Polynome (dies. Zbl. 90, 16) läßt sich der Eindeigkeitssatz von Aleksandrov-Fenchel-Jensen über die Bestimmtheit eines Eikörpers bis auf Translationen durch Angabe einer symmetrischen Funktion der Hauptkrümmungen in Abhängigkeit von der Normalenrichtung neu beweisen. Verallgemeinerungen dieses Satzes. Für Einzelheiten muß auf die Arbeit verwiesen werden.

G. Bol.

Topologie:

Aquaro, Giovanni: Ricovrimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 47, 319—389 (1959).

Verf. verallgemeinert zunächst den Tukeyschen Begriff des uniformisierenden Systems (Convergence and uniformity in topology, Princeton 1940) von Überdeckungen einer Menge E . Zum Studium der uniformen Strukturen eines topologischen Raumes E (kein Trennungsaxiom verlangt!) bedient sich Verf. eines Verbandes \mathfrak{R} („reticolo esteso“, hier A -Verband genannt): Seine Elemente sind Paare (F, G) mit abgeschlossenem F und offenem G und $F \subset G$, wobei gilt: (1) \mathfrak{R} ist nicht leer, und aus $(F, G) \in \mathfrak{R}$ folgt $(\mathcal{C}G, \mathcal{C}F) \in \mathfrak{R}$; (2) zu jedem $(F, G) \in \mathfrak{R}$ existieren F^* und G^* mit $(F, G^*) \in \mathfrak{R}$, $(F^*, G) \in \mathfrak{R}$ und $G^* \subset F^*$; (3) ist $(F_i, G_i) \in \mathfrak{R}$ für $i \in I$ und ist $(G_i)_{i \in I}$ lokal endlich, so ist auch $(\bigcup_{i \in I} F_i, \bigcup_{i \in I} G_i) \in \mathfrak{R}$. Ist \mathfrak{R} ein A -Verband, so heißt $(F_i)_{i \in I}$ eine \mathfrak{R} -Reduktion von $(G_i)_{i \in I}$, wenn $(F_i, G_i) \in \mathfrak{R}$ für alle $i \in I$; eine offene Überdeckung $(G_i)_{i \in I}$ von E heißt \mathfrak{R} -reduzibel, wenn sie eine \mathfrak{R} -Reduktion besitzt. Die Menge $\mathfrak{Q}(\mathfrak{R})$ aller offenen, lokal-endlichen und zugleich \mathfrak{R} -reduziblen Überdeckungen von E ist ein uniformisierendes System im Sinne von Tukey. Die zu \mathfrak{R} gehörige Uniformstruktur $\mathfrak{U}(\mathfrak{R})$ wird erzeugt durch das Fundamentalsystem von Uniformumgebungen \mathcal{A} der Gestalt $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} (U_i \times U_i)$, wo $(U_i)_{i \in I}$ ein Element aus $\mathfrak{Q}(\mathfrak{R})$ ist. Das Haupttheorem lautet: Ist \mathfrak{R} ein A -Verband des topologischen Raumes E , so sind $\mathfrak{Q}(\mathfrak{R})$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{R})$ erklärt, und es gilt: 1. Uniformumgebungen bezüglich $\mathfrak{U}(\mathfrak{R})$ sind genau diejenigen Mengen V , zu welchen ein $(U_i)_{i \in I}$ aus $\mathfrak{Q}(\mathfrak{R})$ existiert mit $V \supset \bigcup_{i \in I} (U_i \times U_i)$. 2. Die zur Uniformstruktur $\mathfrak{U}(\mathfrak{R})$ gehörige Topologie von E ist weniger fein als die ursprünglich gegebene Topologie von E . 3. Es sei $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von E . Damit eine Uniformumgebung V von E bezüglich $\mathfrak{U}(\mathfrak{R})$ existiert, für welche $(V(x))_{x \in E}$ eine Verfeinerung von \mathcal{A} ist, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{Q}(\mathfrak{R})$ ein Element enthält, das feiner ist als \mathcal{A} . 4. $\mathfrak{U}(\mathfrak{R})$ ist die am wenigsten feine Uniformstruktur \mathfrak{S} von E mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\mathcal{Q} = (G_i)_{i \in I}$ aus $\mathfrak{Q}(\mathfrak{R})$ und jeder \mathfrak{R} -Reduktion $(F_i)_{i \in I}$ von \mathcal{Q} gibt es eine Uniformumgebung V von E bezüglich \mathfrak{S} , derart, daß $V(F_i) \subset G_i$ für alle i . 5.

(\mathfrak{R}) ist die am wenigsten feine Uniformstruktur \mathfrak{S} von E mit folgender Eigenschaft: Ist $(F_i, G_i)_{i \in I}$ ein System von Elementen aus \mathfrak{R} derart, daß $(G_i)_{i \in I}$ lokal-endlich ist, so gibt es eine Uniformumgebung V bezüglich \mathfrak{S} mit $V(F_i) \subset G_i$ für alle i .

Damit die zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{R})$ gehörige Topologie mit der ursprünglichen Topologie von E übereinstimmt, ist notwendig und hinreichend, daß \mathfrak{R} regulär ist, d. h. daß zu jedem $x \in E$ und jeder Umgebung U von x in E ein $(F, G) \in \mathfrak{R}$ existiert mit $x \in F$ und $F \subset U$. Es werden noch allgemeinere Sätze bewiesen, bei welchen an Stelle der Eigenschaft (3) eines A -Verbandes eine schwächere tritt in dem Sinne, daß die Mächtigkeit der Indexmenge I von vornherein beschränkt ist. Beim Problem der Uniformisierbarkeit wird der Begriff des Urysohn-Systems verwendet; darunter versteht man ein System $\{U_m^{(h)} : h \in \{0, 1, \dots, 2^m\}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$ von offenen Mengen $U_m^{(h)}$ des topologischen Raumes E mit $U_m^{(h)} = U_{m+1}^{(2h)}$ und $U_m^{(h)} \subset U_m^{(h+1)}$. Sind A und B Teilmengen von E , so schreibt man $A \subseteq B$, wenn es ein Urysohn-System gibt mit $C \subset U_0^{(0)} \subset U_0^{(1)} \subset B$. Das System aller Paare (F, G) , wo F abgeschlossen, G offen und $F \subseteq G$, bildet einen A -Verband \mathfrak{R}_E , den sogenannten universellen A -Verband von E . (\mathfrak{R}_E) heißt die zu E gehörige universelle Uniformstruktur. Der topologische Raum ist dann und nur dann uniformisierbar, wenn \mathfrak{R}_E regulär ist. In diesem Falle ist (\mathfrak{R}_E) die feinste Uniformstruktur, die mit der ursprünglichen Topologie von E erträglich ist. Auch für die Quasi-Metrisierbarkeit wird eine notwendige und hinreichende Bedingung gegeben, aus der die Nagata-Smirnovsche Bedingung für die Metrisierbarkeit folgt. Sehr ausführlich wird der Begriff der Parakompaktheit untersucht, wobei verschiedene Theoreme von C. H. Dowker (dies. Zbl. 42, 410); K. Iseki (dies. bl. 70, 396); S. Kasahara (dies. Zbl. 66, 410); Kelley-Griffin [J. K. Kelley, General topology (dies. Zbl. 66, 166) chap. 5, theorem 28], E. Michael (dies. Zbl. 8, 149); M. J. Mansfield (dies. Zbl. 80, 158); A. H. Stone (dies. Zbl. 32, 314) neu formuliert und verallgemeinert werden. Verf. führt noch den Begriff der \mathcal{U} -Kompaktheit ein, was bedeutet, daß jede abzählbare offene und \mathcal{U} -reduzible Überdeckung von E eine endliche Überdeckung enthält (Dabei heißt eine offene Überdeckung \mathcal{U} -reduzibel, wenn es dazu eine \mathfrak{R}_E -Reduktion gibt). Die \mathcal{U} -Kompaktheit ist etwas allgemeiner als die schwache Kompaktheit von Mardesić und Papić (dies. Zbl. 66, 409), aber gleichwertig der Pseudokompaktheit von Hewitt („Jede stetige reelle Funktion $f|E$ nimmt $\sup f|E$ an“). Die \mathcal{U} -Kompaktheit kann auch durch das Verhalten der Folgen gleichgradig stetiger reeller Funktionen charakterisiert werden.

G. Aumann.

Smirnov, Ju. M. (Yu. M.): Geometry of infinite uniform complexes and δ -dimension of point sets. Translat. by John Isbell. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 5, 95—113 (1960).

Vgl. die Besprechung des russischen Originals in diesem Zbl. 72, 179.

Rodnjanskij (Rodnyanskij), A. M.: Differentiable mappings and the order of connectivity. Translat. by J. M. Danskin. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 15, 15—129 (1960).

Vgl. die Besprechung des russischen Originals in diesem Zbl. 66, 413.

Sitnikov, K. A.: Combinatorial topology of nonclosed sets. I: The first duality law; spectral duality. Translat. by M. M. Day. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 5, 245—295 (1960).

Vgl. die Besprechung des russischen Originals in diesem Zbl. 55, 163.

Sitnikov, K. A.: Combinatorial topology of nonclosed sets. II: Dimension. Translat. by Ralph DeMarr. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. 15, 297—349 (1960).

Vgl. die Besprechung des russischen Originals in diesem Zbl. 65, 161.

Spanier, E. H.: Function spaces and duality. Ann. of Math., II. Ser. 70, 338—378 (1959).

The author gives an entirely new approach to the duality in S -theory; besides greater generality (e. g., the polyhedra considered need not be embedded in a sphere) a rule for quickly determining whether or not two S -maps are paired in the duality is given. The basic feature of this approach is the following: Let P, Q be connected polyhedra, with fixed base points p_0, q_0 , and define $P \otimes Q$ to be the quotient space $P \times Q / P \vee Q$ ($P \vee Q = p_0 \times Q \cup P \times q_0$); because the homology of $(P \times Q, P \vee Q)$ is isomorphic to that of $(P \otimes Q, p_0 \otimes q_0)$ under projection, it follows as in J. C. Moore (this Zbl. 71, 385) that each $\xi \in H^n(P \otimes Q)$ induces for each r a homomorphism $\xi_r: H_r(P) \rightarrow H^{n-r}(Q)$. The author defines P, Q to be n -dual if there is a $u: P \otimes Q \rightarrow S^n$ such that $u^*(\sigma^n)_r [\sigma^n = \text{the generator of } H^n(S^n)]$ is an isomorphism for each r . It is shown that, if $P, Q \subset S^{n+1}$ are $(n+1)$ -dual in the usual S -theory, they are n -duals in the present sense. — A (direct) spectrum $\mathfrak{X} = (X_k, \varrho_k)$, $k = 0, 1, \dots$ is a sequence of spaces X_k with base points, and maps $\varrho_k: S X_k \rightarrow X_{k+1}$ such that (1): there is an M with each X_k $(M+k)$ -connected, and (2): for each q there is an $M(q)$ with $\varrho_{k*}: H_{q+k+1}(S X_k) \approx H_{q+k+1}(X_{k+1})$ whenever $k \geq M(q)$; $H_q(\mathfrak{X}) = \text{Lim Dir}_k H_{q+k}(X_k)$. $S^n \mathfrak{X}$ denotes the spectrum (X_{k+n}, ϱ_{k+n}) , $k = 0, 1, \dots$ and $\mathcal{S}(\mathfrak{X})$ the spectrum with $X_k = S^k X$, $\varrho_k = \text{identity}$. For any connected polyhedron P , $\{P, \mathfrak{X}\} = \text{direct limit of the track groups } [S^k P, X_k]$ using $\varrho_k S$ for connecting maps; the S -group $\{P, Q\}$ thus is simply $\{P, \mathcal{S}(Q)\}$. The functional dual of P is the spectrum $\mathcal{F}(P) = (\mathcal{F}(P, S^k), \lambda_k)$ where $\mathcal{F}(P, S^k)$ is the (based) space of maps $P \rightarrow S^k$ and $\lambda_k(f, t)(x) = (f x, t)$. A map $\hat{f}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ is called a weak equivalence if $\hat{f}_*: H_q(\mathfrak{X}) \approx H_q(\mathfrak{X}')$ for all $q \geq 0$; it is shown that \hat{f} is a weak equivalence if and only if for every polyhedron P , \hat{f} induces isomorphisms $\{S^n P, \mathfrak{X}\} \approx \{S^n P, \mathfrak{X}'\}$ and $\{P, S^n \mathfrak{X}\} \approx \{P, S^n \mathfrak{X}'\}$ for all $n \geq 0$. In section 4, the basic relations are derived: (a) $\mathcal{F}(P)$ is always weakly equivalent to $S(\mathcal{F}(S P))$ and (b) there is an isomorphism $D_n: \{P, S^n \mathcal{F}(Q)\} \approx \{Q, S^n \mathcal{F}(P)\}$ for each $n \geq 0$, with each group isomorphic, in fact, to $\{P \otimes Q, S^n\}$. In section 5 it is shown that (c) a duality map $u: Q' \otimes Q \rightarrow S^n$ exists if and only if there is a weak equivalence $\hat{g}: \mathcal{S}(Q') \rightarrow S^n \mathcal{F}(Q)$ (this gives a procedure for constructing a dual for Q) and (d) the existence of u implies that, for any P , $\{P, Q'\} \equiv \{P, \mathcal{S}(Q')\} \approx \{P, S^n \mathcal{F}(Q)\} \approx \{P \otimes Q, S^n\}$ canonically; (d) is a new result for S -groups. If $u: P' \otimes P \rightarrow S^n$ and $v: Q' \otimes Q \rightarrow S^n$ are duality maps, then combining the above isomorphisms in evident fashion leads to $D_n(u, v): \{P, Q\} \approx \{Q', P'\}$, the duality isomorphism of S -theory. The naturality properties of $D_n(u, v)$ and its alteration by changing the dualities by a homeomorphism of S^n are given. Further, it is shown (e): two dualities $u: P' \otimes P \rightarrow S^n$, $w: Q' \otimes Q \rightarrow S^m$ combine in evident fashion to give a duality map $u \otimes w: (P' \otimes Q') \otimes (P \otimes Q) \rightarrow S^{n+m}$; use of $u \otimes w$ with (d) leads to an isomorphism $\{R, L \otimes P'\} \approx \{R \otimes P, S^n L\}$ for any polyhedra R, L and, by taking Q' as a Moore space, to a notion of S -group with coefficients (which will be studied in a later paper). (f): Two duality maps $u: P' \otimes P \rightarrow S^n$, $v: Q' \otimes Q \rightarrow S^n$ combine to give a duality map $u \oplus v: (P' \vee Q') \otimes (P \vee Q) \rightarrow S^n$; and $f: P \rightarrow Q$, $f': Q' \rightarrow P'$ satisfy $v:(1 \otimes f) \simeq u(f' \otimes 1): Q' \otimes P \rightarrow S^n$ then the space Z_f obtained by attaching the cone on P to Q by f is $(n+1)$ -dual to $Z_{f'}$. The development of the entire theory using carriers (i. e. the relative form) is indicated.

J. Dugundji.

Lyra, C. B. de: On the homotopy type of a factor space. Anais Acad. Brasil. C 30, 37—41 (1958).

It is proved that, provided it is a Hausdorff space, the base space of any local trivial fibering of the $(2n+1)$ -sphere with circles as fibres is homotopically equivalent to the complex projective space of $2n$ real dimensions. This is a slight general-

ation of a result by Eckmann, Samelson, and G. W. Whitehead (this Zbl. 33, 6) which is erroneously attributed by the author to Borel, Eckmann, and Samelson.
T. Ganea.

Giorgiutti, Italo: Tableau spectral associé à une application périodique. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 1650—1652 (1958).

Giorgiutti, Italo: Interprétation spectrale des invariants de Smith. C. r. Acad. Sci., Paris 246, 2558—2560 (1958).

Let $X = \sum X^p$ be a cochain complex in which operates a periodic transformation t . X is a $Z(\pi)$ -complex where π is the cyclic group generated by t . Let $\leftarrow Z \leftarrow A_0 \leftarrow A_1 \leftarrow \cdots \leftarrow A_q \leftarrow \cdots$ be the standard free $Z(\pi)$ -resolution of Z ($A_q \approx Z(\pi)$) and consider the double complex $C = \sum C^{p,q}$, where $C^{p,q} = \text{Hom}(A_q, X^p)$. There are two spectral sequences associated with this double complex, one of which was studied by Cartan and Leray. The author deals with the second spectral sequence, studying it by means of the „spectral array” of R. Deheuvels (this Zbl. 64, 171). It is shown that the various groups which appear in this array are precisely the invariants of P. A. Smith (ρ -groups etc). If now a periodic homeomorphism acts on a space X and we consider special (f) -coverings in the sense of Smith (S. Lefschetz, Algebraic topology, New York 1942; cf. also this Zbl. 36, 122), we may associate to each such covering and to each presheaf \mathcal{F} on which operates the group π , a cochain complex as above, which yields a spectral array. Passage to the limit over all (f) -coverings of X leads to a spectral array associated with the space X and the given periodic homeomorphism. In the case $\mathcal{F} = Z_k$, the study of this array leads to the results of Smith; the author shows that the differentials δ^r of the corresponding spectral sequence are generated by certain homomorphisms of Smith. The theory developed here leads also to the results of Smith, Floyd and Liao, concerning periodic transformations acting on homological spheres. I. Bernstein.

Teleman, Silviu: Sur la formule d'Euler-Poincaré-Hopf. Acad. Républ. popul. Roumaine, Revue Math. pur. appl. 2, hommage à S. Stoilow, 551—554 (1957).

Verallgemeinerung der Formel von Euler-Poincaré-Hopf in der Weise, daß an Stelle der Spuren die charakteristischen Polynome der Endomorphismen betrachtet werden. Ist f ein Endomorphismus einer abelschen Gruppe B vom Range n und x_1, \dots, x_n ein maximales System linear unabhängiger Elemente, so gelten Relationen der Form $a f(x_i) = \sum a_{ik} x_k$ ($i = 1, \dots, n; a \neq 0$). Dann wird unter dem charakteristischen Polynom von f das Polynom $P[f, B, s] = |a_{ik}^* - \delta_{ik} s|$, $a_{ik}^* = a_{ik}/a$, verstanden. Es ist unabhängig von der Wahl des maximalen Systems x_1, \dots, x_n . Ist C eine Untergruppe von B mit $f(C) \subset C$, f^* der in B/C induzierte Homomorphismus, so gilt (*) $P[f, B, s] = P[f^*, B/C, s] \cdot P[f, C, s]$. Ist nun K eine stetige Selbstabbildung eines Polyeders K und wird mit f auch der Endomorphismus bezeichnet, der in der r -ten Homologiegruppe H_r induziert wird, so ergibt sich aus (*) durch Übertragung bekannter Schlüsse die rationale Funktion $(f, K, s) = \prod_{r=0}^n \{P(f, H_r, s)\}^{(-1)^r}$, die nur von der Homotopieklasse von f abhängt.
H. Seifert.

Seki, Takejiro: An elementary proof of Brouwer's fixed point theorem. Tôhoku Math. J., II. Ser. 9, 105—109 (1957).

An attempt to prove Brouwer's fixed point theorem for the elementary Calculus, particularly by using a well-known formula on transformation of integrals. Proofs like these were tried before Brouwer developed his method. They can hardly be called elementary. To justify the used theorems of Calculus, methods equivalent to Brouwer's are indispensable.
Hans Freudenthal.

Griffin jr., John S.: On the rotation number of a normal curve. Compositio math. 3, 270—276 (1958).

Eine geschlossene orientierte stückweise glatte Kurve C in der orientierten Ebene besitzt eine Tangendrehzahl $d(C)$. Falls C einfach geschlossen ist, wird $d = \pm 1$ gleich der Umlaufzahl um das Innengebiet von C (vgl. H. Hopf, dies. Zbl. 11, 177). Falls C nur endlich viele Doppelpunkte besitzt, in denen die beiden Tangenten existieren und verschieden sind, erhöht sich d um die (in geeigneter Weise definierte) algebraische Anzahl der Kreuzungspunkte (H. Whitney, dies. Zbl. 16, 138). Verf. beweist, daß sich jede solche Kurve als Summe endlich vieler einfach geschlossener Kurven C_i darstellen läßt und daß $d(C) = \sum d(C_i)$ wird. (Entsprechendes gilt für die Umlaufzahl um einen Punkt $\notin C$). Die Formeln auf S. 273 oben sind korrekturbedürftig. K. Voss.

James, I. M.: Some embeddings of projective spaces. Proc. Cambridge philos. Soc. 55, 294—298 (1959).

Real projective n -space is embedded in $2n$ -space, and for odd $n \geq 3$ in $(2n - 1)$ -space. Complex projective space is embedded in $(4n - 1)$ -space and for odd $n \geq 3$ in $(4n - 3)$ -space. Quaternion projective n -space is embedded in $(8n - 3)$ -space; for odd n the result might be improved, but for $n = 3$, 19-space is excluded [W. S. Massey, J. Math. Mech. 7, 265—290 (1958)]. For the octavian plane an embedding in 25 dimensions is available (H. Freudenthal, this Zbl. 53, 15), 24 is impossible. — All embeddings are regular. Hans Freudenthal.

Ball, B. J.: Certain collections of arcs in E^3 . Proc. Amer. math. Soc. 10, 699—705 (1959).

The author proves the following theorem. Suppose α_0 and α_1 are horizontal planes and G is a continuous collection of mutually exclusive arcs such that (1) each element of G is irreducible from α_0 to α_1 and no element of G contains two points of any horizontal plane, and (2) the sum of the elements of G is compact and intersect α_0 in a totally disconnected set. In order that there should exist a homeomorphism of E^3 onto itself which takes each element of G onto a vertical interval and does not change the z -coordinate of any point, it is necessary and sufficient that for each positive number ε , there exist a finite set K_1, K_2, \dots, K_n of topological cylinders with bases on α_0 and α_1 such that (1) the solid cylinders determined by K_1, K_2, \dots, K_n are mutually exclusive, (2) each arc of G is enclosed by some K_i and (3) each K_i has horizontal diameter less than ε . W. R. Utz.

Harary, Frank: Some historical and intuitive aspects of graph theory. SIAM Review 2, 123—131 (1960).

Kurzer historischer Überblick über gelöste und ungelöste Probleme der Graphentheorie. H. Künmeth.

Ore, Oystein: Studies on directed graphs. III. Ann. of Math., II. Ser. 68, 526—549 (1958).

Es werden zunächst die Beziehungen gewisser Teilgraphen eines gerichteten Graphen R untereinander mit Hilfe einer Methode alternierender Wege untersucht. Das sind solche, in denen keine Kante zweimal auftritt, und bei deren Durchlaufung die Kanten abwechselnd in der ihnen in R gegebenen „richtigen“ und in der entgegengesetzten „falschen“ Richtung durchlaufen werden. Ist H ein Teilgraph von R und P ein Weg derart, daß seine Kanten abwechselnd aus dem Komplement $\bar{H} = R - H$ und aus H stammen, und daß die aus H stammenden Kanten in falscher, die aus \bar{H} stammenden aber in richtiger Richtung durchlaufen werden, so wird mit Hilfe von P deformiert, indem die \bar{H} -Kanten von P zu H hinzugefügt und die H -Kanten von P aus H fortgelassen werden. Es gilt der Deformationssatz: Je zwei Teilgraphen mit gleichen lokalen Graden lassen sich durch Deformationen mit Hilfe von alternierenden Kreiswegen gerader Länge oder beidseitig unendlichen alternierenden Wegen ineinander überführen. — Ist a_0 ein fester Knotenpunkt von R , so heißen die Knoten a erreichbar, die mit a_0 durch einen alternierenden Weg verbunden sind.

enden werden können. In Verbindung mit den Ergebnissen und Methoden der vorangehenden Arbeiten I und II (dies. Zbl. 74, 182) gestattet diese Begriffsbildung den neuen Beweis des dort gewonnenen Kriteriums für die Existenz von Teilgraphen mit vorgeschriebenen lokalen Graden in R . — Bei fest vorgeschriebenen lokalen Graden für die Teilgraphen werden die Kanten von R in gebundene und freie geteilt; die gebundenen sind diejenigen, die entweder in jedem oder in keinem solchen Teilgraphen vorkommen. Eine Reihe von Sätzen gibt einen Überblick über die Wahlmöglichkeiten zur Auffindung solcher Teilgraphen. — Ausgehend von der Inzidenzmatrix von R werden die Ergebnisse auf Matrizen mit nichtnegativen Elementen verallgemeinert. *Th. Kaluza.*

Ore, Oystein and T. S. Motzkin: Subsets and subgraphs with maximal properties. Proc. Amer. math. Soc. 10, 965—969 (1959).

Ore: Bezeichnungen: G Menge, z. B. auch Kantenmenge eines Graphen; System endlicher, nichtleerer, „verbotener“ Teilmengen F von G ; eine Teilmenge H von G , die kein F enthält, heißt ausschließende Menge (a. M.); eine a. M. heißt maximal, wenn sie nicht echte Teilmenge einer a. M. ist; eine maximale a. M. heißt simpel, wenn nach Hinzufügung eines beliebigen Elements E aus G die Vereinigung $F + E$ nur genau ein F aus Φ enthält; $H + E$ kann dann durch Entfernung genau eines beliebigen Elementes E' aus diesem F wieder in eine a. M. verwandelt werden; dieser Prozeß heißt eine simple Auswechslung; zwei a. M. heißen simpel verwandt, wenn sie durch eine endliche Folge simpler Auswechslungen ineinander übergeführt werden können; eine simple maximale a. M. heißt stark simpel, wenn sie nach Hinzufügung zweier Elemente nie durch die Entfernung nur eines Elementes wieder zu einer a. M. reduziert werden kann. Ist z. B. G ein zusammenhängender Graph, und sind die F die Kreise in G , so sind alle die zusammenhängenden Bäume in G , die G bedecken (d. h. alle Ecken von G enthalten), a. M., und zwar maximale, simple, stark simple und bei endlichem G auch simpel verwandte. — Ergebnisse: — für Graphen G : Falls kein F einen Endpunkt hat, bedeckt jede maximale a. M. G ; falls zusammenhängend ist und kein F eine Brücke enthält, ist auch jede maximale a. M. zusammenhängend und bedeckt G ; — für Mengen G : Ist H eine stark simple maximale a. M., so liefert jede simple Auswechslung eine maximale a. M.; sind alle maximalen a. M. in G stark simpel, so sind sie von gleicher Mächtigkeit; ist G endlich und sind alle a. M. mit maximaler Elementezahl simpel, so sind sie simpel verwandt. — In einem Anhang verzichtet Motzkin auf die Endlichkeit der F und macht eine Reihe von Angaben über Möglichkeit und Bedeutung eines Dualismus zwischen dem System Φ der verbotenen Mengen und dem System Φ' aller $G - H$ (a. M.). Eine besondere Rolle spielen dabei die Voraussetzungen, daß Φ mit jedem auch alle Mengen zwischen F und G enthält, und daß Φ ein Teilsystem aus endlichen Mengen besitzt, von denen keine eine andere enthält, während jedes F mindestens eine von ihnen zur Teilmenge hat. *Th. Kaluza.*

Tutte, W. T.: A non-Hamiltonian graph. Canadian math. Bull. 3, 1—5 (1960).

Von Coxeter wurde ein Graph G angegeben, der keinen Kreis mit weniger als sieben Kanten enthält und in dem jeder gerichtete Kantenzug aus drei Kanten in beiden anderen durch einen Automorphismus von G transformiert werden kann. Es entsteht aus drei Siebenecken mit den (zyklisch angeordneten) Ecken $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$ bzw. $b_1 b_5 b_2 b_6 b_3 b_7 b_4$ bzw. $c_1 c_6 c_4 c_2 c_7 c_5 c_3$ und sieben Punkten d_i ($1 \leq i \leq 7$), wobei mit a_i, b_i, c_i durch eine Kante verbunden ist. Hier wird gezeigt, daß G keinen Hamiltonschen Kreis enthält. *H. Künneth.*

Umgewandte Geometrie:

• Rudaev, A. K.: Aufgabensammlung über darstellende Geometrie. [Sbornik zadach po načertatel'noj geometrii.] 11. Aufl. Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1960. 344 S. R. 9,45 [Russisch].

Das Buch bringt eine großangelegte und äußerst vielseitige Aufgabensammlung mit vorzüglichen Figuren und Anleitungen. Bei den meist der Technik entnommenen Aufgaben — insgesamt mehr als 800 —, die im Zweitafelsystem zu lösen sind, ist daneben stets eine sorgfältige räumliche Skizze des zu behandelnden Grundproblems angegeben.

F. Rehbock.

Drs, Ladislav: Umzeichnen von Perspektiven bei ungleichgeneigten Bildebenen. Elemente Math. 15, 131—133 (1960).

Ansermet, A.: Sur de nouvelles méthodes de calcul en topographie. Bull. techn. Suisse Romande 83, 50—54 (1957).

Zur Topographie im weitesten Sinne des Wortes zählt Verf. hier auch die Methoden der geodätischen Punktbestimmung. Demgemäß ist ein wesentlicher Teil der Arbeit der Ausgleichung von Streckennetzen gewidmet, wobei grundsätzliche Fragen des Verfahrens und der Gewichtsfestsetzung erörtert werden und u. a. ein Vorschlag zur gruppenweisen Ausgleichung unterbreitet wird. Ein weiterer Abschnitt behandelt die Deformationen geodätischer Netze bei der ebenen konformen Abbildung und gibt Nomogramme zur Ermittlung der dadurch bedingten Richtungsreduktionen.

W. Hofmann.

Schermerhorn, W.: Einiges über Aerotriangulation. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 9, 699—706 (1960).

Jochmann, Horst: Die Kreisteilfehler der Horizontalkreise neuer Gradteilung von Präzisionstheodoliten moderner Bauart. I, II. Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 5, 843—860 (1956); 6, 57—81 (1957).

I. Um die systematischen Teilungsfehler als Funktion der Kreisablesung darzustellen, wird wie üblich eine Fourierreihe als plausibelste Funktion eingeführt. Die folgerichtige Bestimmung der Konstanten dieser Fehlerfunktion aus Meßwerten setzt die Kenntnis der Konzentrationspunkte der Reihe voraus, die an Hand einer fehlertheoretischen Untersuchung des Teilungsvorgangs ermittelt werden. Da photographische und photoelektrische Kopierverfahren sich trotz verschiedener Ansätze noch nicht durchsetzen konnten, werden Präzisionskreisteilungen bis heute ausschließlich auf mechanischem Wege hergestellt. Dabei wird der Urkreis, der als Zahnkranz von 50 bis 100 cm Durchmesser ausgebildet ist, gemeinsam mit dem zu teilenden Kreis durch eine endlose Hohl schraube von Intervall zu Intervall gedreht. Während des Stillstands zieht ein Reißerwerk den Teilstrich. Aus der Kinematik des mechanischen Teilungsvorgangs werden Formeln für die von den Bauteilen der Teilmaschine und der Lage des Teilungsträgers herrührenden Fehlereinflüsse abgeleitet und diskutiert (Exzentrizitäten, Wirkung des Achsspiels, Reißerwerk, Hohl schraubenmechanismus, Zahnkranzfehler, ferner optische Fehler und Formänderungen des Teilungsträgers). Die Untersuchung der geometrischen und kinematischen Fehlerquellen ergibt einen Überblick über die Größe und Auswirkung der zu erwartenden Fehler sowie Hinweise für deren Ausschaltung durch konstruktive und meßtechnische Maßnahmen. — Teil II berichtet über die Prüfung von vier in Neugrad geteilten Präzisionsglaskreisen. Die fehlertheoretischen Untersuchungen des ersten Teils ermöglichten es, die Realität der Koeffizienten der Fourierreihe zu überprüfen und das Verfahren von Heuvelink dementsprechend zu verbessern. Um die langperiodischen Teilungsfehler sicher zu erfassen, wurde nur alle 10° ein Durchmesser bestimmt. Auf diese Weise konnten die von der Hohl schraube herrührenden kurzperiodischen Fehler ausgeschaltet werden, da sich bei Teilungen in Neugrad die gleiche Stellung der Hohl schraube im ungünstigsten Fall nach 10° wiederholt. Zur unabhängigen Bestimmung des mittleren unregelmäßigen Teilungsfehlers wurde die Messung in gleicher Weise ein zweites Mal bei etwas veränderter Ausgangsstellung durchgeführt (Einstellung auf benachbarte Zwischenstriche). Die Änderung der periodischen Fehler ist hierbei so gering, daß die auftretenden Differenzen allein auf unregelmäßige Teilungsfehler und Beobachtungsfehler zurückzuführen

sind. Zur Erfassung der kurzperiodischen Fehler wurden die Teilungsintervalle im Bereich zwischen zwei gleichen Stellungen der Hohlsschraube mit Hilfe des optischen Mikrometers des zu untersuchenden Instruments ausgemessen. Die in Formeln und graphischen Darstellungen nachgewiesenen Ergebnisse geben einen ausgezeichneten Einblick in die Genauigkeit der heute verwendeten Kreisteilungen. Es zeigt sich, daß ein gemessener Winkel infolge systematischer Teilungsfehler bis zu 10° verfälscht sein kann. Bei Präzisionsmessungen dürfen die Teilungsfehler daher nicht vernachlässigt werden. Bei den geläufigen Methoden der satzweisen Richtungsmessung und der Winkelmessung in allen Kombinationen werden nur die langperiodischen Teilungsfehler kompensiert. Auf eine Möglichkeit zur Elimination der kurzperiodischen Fehler wird hingewiesen. Hierzu wäre der Kreis zusätzlich um einen kleinen Winkel zu verstellen, der jedoch nur angegeben werden kann, wenn die Zahl der Zähne der zur Teilung benutzten Maschine bekannt ist. Da dies im allgemeinen nicht der Fall sein wird, sollte man für Präzisionsmessungen nur in Altgrad geteilte Instrumente verwenden, solange es keine speziell für Neugradteilung eingerichteten Teilmaschinen gibt, bei denen die Zahl der Zähne des Zahnkranzes ein Vielfaches von 400 anstatt von 360 sein müßte. Im übrigen wird empfohlen, bei Winkelmessungen mehr von dem sog. Reiterationsverfahren Gebrauch zu machen, das in Verbindung mit einer Kreisverstellung eine weitgehende Ausschaltung der Kreisteilungsfehler gewährleistet.

W. Hofmann.

Theoretische Physik.

Mechanik:

Skowroński, Janisław and Stefan Ziemba: The problem of boundedness of motion in certain mechanical systems. *Proc. Vibration Problems* Nr. 1, 67—80, russ. Zusammenfassung 80—81 (1959).

The authors use a result of Demidovič [Moskovsk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski, no. 181 (1956)] to derive conditions under which a general non-autonomous dissipative mechanical system has a unique bounded motion to which all other motions tend asymptotically (with increasing time). These conditions do not apply to systems with one degree of freedom.

H. A. Antosiewicz.

Skowroński, J. and S. Ziemba: The boundedness of the motion of mechanical systems. *Proc. Vibration Problems* Nr. 3, 69—80 (1960).

The authors apply a theorem of Yoshizawa (this Zbl. 56, 314) to show that every motion of a dissipative mechanical system is bounded with increasing time.

H. A. Antosiewicz.

Mitterlehner, G.: Der Einfluß der Kraftwagenfederung auf die Lenkstabilität. *Ingenieur-Arch.* 29, 100—114 (1960); **Berichtigung.** *Ibid.* 30, 152 (1961).

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung eines vom Verf. im Ingenieurarchiv 27 (s. dies. Zbl. 85, 181) veröffentlichten Artikels. Beide Veröffentlichungen sollen dem modernen Verfahren zur Stabilitätsbestimmung das Gebiet des Automobilbaues erschließen. Der Kraftwagen wird hierbei als lineares System von vier Freiheitsgraden — seitliches Schieben, Gieren um die Hochachse, Lenkschwingungen der Vorderräder und seitliches Wanken — behandelt und zunächst der Schräglauf der Luftreifen, der Nachlauf der Vorderräder, die Radlaständerung durch den Luftwiderstand, die Elastizität der Hauptfedern und Luftreifen und die Dämpfung des Wankens durch Stoßdämpfer berücksichtigt. Danach werden auch die durch das Wanken, das Gieren und die Lenkschwingung geweckten Kreismomente der rollenden Räder bei verschiedenen Radaufhängungen in die Rechnung einbezogen und anschließend der Einfluß der Vorspur besprochen. Das lineare Ersatzsystem zeigt das Stabilitätsverhalten eines Kraftwagens und läßt den Einfluß der physikalischen Größen der einzelnen Bauteile auf die Stabilität des Ganzen deutlich erkennen. Bei der prakti-

schen Auswertung der Ergebnisse ist zu bedenken, daß man stets von einem gegebenen Aufbau samt Motor und Innenausstattung ausgehen muß. Sind die entsprechenden Größen des Aufbaues bekannt, kann dazu eine Federung entworfen werden, die einen hohen Rückstellbeiwert des Wankens, eine starke Dämpfung und eine nicht zu tiefe Lage der Wandachse haben soll. Außerdem soll die Drehmasse eines Vorderrades um seinen Achsschenkel und damit der Raddurchmesser so klein sein, wie es die Reifenbeanspruchung bei hohen Geschwindigkeiten zuläßt. Ergibt die Berechnung Instabilität, so wird man zunächst die Größen der Lenkung und evtl. noch die Größen der Federung verändern. Die Kenngrößen des Aufbaues dürfen dagegen nicht variiert werden.

F. Holzweißig.

Rószá (Roža), P.: Über die Anwendung von Hypermatrizen in der Mechanik korpuskularer Systeme. Uspechi mat. Nauk 14, Nr. 4 (88), 207—211 (1959) [Russisch].

L'A., utilizzando i risultati dovuti all'Egerváry (vedasi questo Zbl. 56, 251), concernenti i determinanti, gli aggiunti e la scomposizione spettrale relativi alle così dette ipermatrici (A_{ij}) i cui matrici blocchi A_{ij} sono due a due commutabili, dimostra il seguente teorema che ne costituisce l'estensione alle due dimensioni di un classico risultato del Routh spettante allo studio delle oscillazioni di una corda corpuscolare costituita dai punti materiali identici, nell'ipotesi che una estremità di essa corda rimane fissata mentre l'altra si sottopone ad una sollecitazione periodica forzata. Il teorema stabilito si formula come segue: Se la frequenza ω dell'oscillazione forzata cui è sottoposta ogni particola di una membrana rettangolare corpuscolare reticolata è tale che $\omega \geq 2T^{-1}/2$, ove $T^{-1} = Sh/M$, essendovi h la distanza tra una qualsiasi coppia di corde parallele vicine prive di massa, M punti materiali identici situati nei punti del reticolato ed S l'intensità della forza di tensione che ne fissa i punti estremi di ogni corda, allora la soluzione periodica dell'equazione differenziale del moto $\ddot{w} + T^{-2}Gw = T^{-2}f \sin \omega t$, in cui G è una certa ipermatrice e f è un vettore con quarto elementi diversi da zero (uguali tutti ad f ed aventi gli indici $r-1, s; r+1, s; r, s-1; r, s+1$), determina le oscillazioni tali che le deviazioni delle particole vicine, collegate in maniera elastica l'una all'altra, ne hanno in ogni momento segni contrari.

D. Mangeron.

Vjatkin, G. P.: Bestimmung des Bewegungsgesetzes eines mechanischen Aggregats aus dem T, ω^2 -Diagramm. Trudy Inst. Mašin., Sem. Teor. Mašin Mechanizmov 19, Nr. 76, 46—55 (1959) [Russisch].

In una serie di studi citati nel presente articolo e dovuti allo Skuridin [vedasi, ad. es., Trudy Inst. Mašin., Sem. Teor. Mašin Mechanizmov, 12, Nr. 45, 5—23 (1951)], elaborati nell'intento di applicarli nelle ricerche dinamiche concernenti aggregati macchinarie, si dimostra che ci si arriva in modo più semplice dalla determinazione del moto dei meccanismi (e delle macchine) se le forze che vi intervengono si considerano dati come funzioni dell'angolo φ che ne determina la posizione di esso meccanismo (n. 5, pag. 22 del lavoro citato). L'A. espone i metodi grafici di determinazione della legge del moto dell'organo iniziale di un aggregato macchinario, e ne fa l'applicazione ai motori ed alle macchine utensili, supponendovi i momenti ridotti: delle forze motrici $M_m = f_1(\varphi)$, delle forze resistenti $M_r = f_2(\varphi)$ e d'inerzia $J_n = f_3(\varphi)$ funzioni note dell'angolo φ di girazione dell'organo di riduzione (nel caso delle macchine utensili mossi dagli elettromotori, il momento delle forze motrici non è più funzione di φ ma di ω). La soluzione del problema è basata sull'utilizzazione del sistema di coordinate ove in ordinata ne figura l'energia cinetica T e in ascissa il quadrato della velocità angolare dell'organo di riduzione, ω^2 . Nel caso dei motori, la soluzione grafica è basata sul successivo impiego dei sistemi di coordinate O_1, M, φ ; O_2, T, φ ; e O_3, T, ω^2 ove si rappresentano rispettivamente i grafici delle funzioni date $M_m = f_1(\varphi)$, $M_r = f_2(\varphi)$, $M_{rid} = M_m - M_r$; $T = f_5(\varphi)$; donde risulta il

diagramma T, ω^2 , costituito dai punti A trovatisi sui raggi J_n . Nel caso delle macchine utensili, vi si aggiunge ancora il sistema O_4, M_m, ω^2 ove si rappresenta la caratteristica dell'elettromotore.

D. Mangeron.

Novoselov, V. S.: The example of unlinear unholonomous connection that has nothing to the type of N. G. Chetaev. Vestnik Leningradsk. Univ. 12, Nr. 19 (Ser. Mat. Mech. Astron. Nr. 4) 106—111, engl. Zusammenfassung 110 (1957) [Russisch].

It is shown an example of a friction reductor with inert regulator in which unlinear unholonomous connection can't be treated with the type of N. G. Chetaev. There are considered all kinds of methods of finding conditions for variations of unlinear unholonomous systems. It is offered the variation of Gauss's principle for mechanical systems with unlinear unholonomous connections for which conditions of variations have not the form of Chetaev.

Zusammenfassung des Autors.

Littlewood, J. E.: Corrections to the paper "On the problem of n bodies". Commun. Sém. Math. Univ. Lund, Tome suppl., dédiée à M. Riesz, 143—151 (1952). Fysiogr. Sällsk. Lund. Förhdl. 29, 97—98 (1959).

Betrifft die in diesem Zbl. 48, 421 besprochene Arbeit.

Meffroy, Jean: Sur un cas d'élimination du terme séculaire pur introduit dans la perturbation du troisième ordre des grands axes par le coefficient d'argument nul de la fonction perturbatrice. C. r. Acad. Sci., Paris 247, 863—865 (1958).

Mit Benutzung von Resultaten seiner These [Bull. astron. 19, 1—224 (1955)] weist Verf. den dominierenden Einfluß der Exzentrizität auf die Entstehung des Säkulargliedes in der Störung nach. Sind nämlich im Dreikörperproblem die Exzentrizitäten Null, während die Neigungen nicht vernachlässigt werden dürfen, so kann man das rein säkulare Glied eliminieren, welches von dem Koeffizienten des Argumentes Null in der Entwicklung der Störungsfunktion der Störung 3. Ordnung der großen Achsen herrührt.

J. Fleckenstein.

Kuzovkov, N. T.: Über die Bewegung einer gyrostabilisierten Plattform bei großen Abweichungswinkeln. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1958, Nr. 1, 44—51 (1958) [Russisch].

Verf. untersucht ein Kreiselssystem, das aus zwei auf einer kardanisch gelagerten Plattform befindlichen Kreiseln mit zwei Freiheitsgraden besteht. Sieht man von der Drehung der Kreisel um ihre Figurenachsen ab, so hat das System insgesamt vier Freiheitsgrade. Mit Hilfe der Euler-Gleichung für die Drehbewegungen starrer Körper und der bekannten kinematischen Gleichungen werden die Bewegungsgleichungen aufgestellt. Für feststehende äußere Kardanachse wird sodann bei beliebig angenommener Schräglage des Kardansystems eine Linearisierung für kleine Auslenkungen aus dieser Schräglage vorgenommen, und es wird gezeigt, daß hierbei der Drehwinkel β_0 der Plattform um die innere Kardanachse wesentlichen Einfluß haben kann. Bei Stabilitätsuntersuchungen müßte also der Einfluß dieses Winkels beachtet werden — eine Tatsache, die für kardanisch gelagerte Kreisel seit langem bekannt ist. Konkrete Fälle werden nicht ausgerechnet.

K. Magnus.

Kuznetsov (Kusnetsoff), L. I.: The estimation of the solutions of the motion equations in gyroscopic systems. Vestnik Leningradsk. Univ. 14, Nr. 7 (Ser. Mat. Mech. Astron. 2), 105—111, engl. Zusammenfassung 111 (1959) [Russisch].

Verf. betrachtet ein allgemeines gyrokopisches System von n Freiheitsgraden mit nichtkonstanten Koeffizienten, das sich in einem zeitlich veränderlichen Bezugssystem befindet (bewegliche Unterlage). Verf. skizziert in allgemeiner Form, wie man diese Lösungen durch die Lösungen vereinfachter Gleichungen annähern kann.

W. Haacke.

Litvin-Sedov, M. Z.: Zur Dynamik des Kreisels mit zwei Freiheitsgraden. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinostr. 1959, Nr. 5, 72—78 (1959) [Russisch].

Es wird eine Analyse der Bewegungsmöglichkeiten für einen Kreisel mit zwei Freiheitsgraden (Wendezeiger) durchgeführt, wobei sowohl gerätetechnische Un-

vollkommenheiten (Schwerpunktsfehler, Achsversetzungen, dynamische Unbalancen) als auch die in der üblichen quasistatischen Theorie vernachlässigten Führungsbe-
 wegungen des Geräteträgers berücksichtigt werden. Diskutiert werden die bei be-
 stimmten Führungsbewegungen auftretenden Anzeigefehler eines Wendezeigers, wobei
 gezeigt wird, daß die quasistatische Theorie insbesondere bei schnellen Drehbewe-
 gungen des Geräteträgers zu falschen Ergebnissen führt. Will man die drei Kompo-
 nenten der Führungsdrehung messen, so ist außer drei Wendezeigern noch ein Rechen-
 gerät notwendig, das aus den Anzeigen der Wendezeiger die ω -Werte errechnet.
 Bei der Anwendung von Wendezeigern auf stabilisierten Plattformen haben die
 betrachteten Fehler keinen Einfluß.

K. Magnus.

Marchašov, L. M.: Über die Stabilität der Bewegung eines Kreisels mit kardani-
 scher Aufhängung. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinostr.
 1959, Nr. 5, 79—83 (1959) [Russisch].

Wenn die Bewegungen eines symmetrischen Kreisels in kardanischer Lagerung
 stabil sind, dann lassen sich die Grenzen der Bereiche, die der Nutationswinkel θ
 überstreichen kann, nach einer von Četaev angegebenen Methode berechnen. Dazu
 ist ein System von Ungleichungen zu untersuchen. Verf. gibt ein Verfahren an,
 das diese Abschätzung mit beliebiger Genauigkeit durchzuführen gestattet. Er
 geht dabei von der Kreiselfunktion $f(u)$ mit $u = \cos \theta$ aus und muß, je nach der
 Lage der Wurzeln der algebraischen Gleichung dritten Grades $f(u) = 0$ und je nach
 der Größe einer dimensionslosen Kennzahl, die von den Trägheitsmomenten des
 Systems abhängt, verschiedene Fälle unterscheiden. Für $1 - u \ll 1$ werden Näherungs-
 ausdrücke abgeleitet.

K. Magnus.

Novoselov, V. S.: On the motion of gyroscopic systems. PMM J. appl. Math.
 Mech. 23, 242—246 (1959), Übersetzung aus Priklad. Mat. Mech. 23, 176—178 (1959).

Verf. untersucht Kreiselbewegungen, die durch das System

$$(1) \quad \sum_j a_{ij} \ddot{q}_j + \sum_j (b_{ij} + H g_{ij}) \dot{q}_j + \sum_j c_{ij} q_j = 0$$

beschrieben werden, wobei H eine hinreichend große positive Konstante ist. Die
 a_{ij} , b_{ij} und c_{ij} sind beschränkte Funktionen der Zeit, die von H unabhängig sind. Die
 beiden voneinander unabhängigen Systeme

$$\sum_j (b_{ij} + H g_{ij}) \dot{q}_{j1} + \sum_j c_{ij} q_{j1} = 0, \quad \sum_j a_{ij} \ddot{q}_{j2} + \sum_j (b_{ij} + H g_{ij}) \dot{q}_{j2} = 0$$

ergeben als Lösungen angenähert die Koordinaten und Geschwindigkeiten von (1),
 wobei der Fehler in der Ordnung H^{-1} liegt. Zum Ausblick zeigt Verf., wie das Problem
 bei zeitabhängiger rechter Seite zu erweitern ist.

W. Haacke.

Safonova, E. V.: Das Hauptmoment der Kräfte, die auf einen Kugelkreisel
 seitens des Stators wirken. Teor. i Rasčet Élement. Pribor. točn. Mech. 22, 39—54
 (1957) [Russisch].

The investigation of a spheric gyroscope is very important in technical practice
 because of its great gyroscopic moment and simple construction since it can be con-
 sidered as an asynchronous motor. In this paper one treats the problem of the deter-
 mination of principal moment of forces acting on a gyroscope from the stator side.
 Two coordinate systems are used, one unmovable — coupled with stator and another
 movable — coupled for sphere. The graphics of a magnetic induction in the split
 between stator and rotor are presented as the functions of spheric angular coordinates.
 The amplitudes of induction are developed into series of spheric functions with con-
 stant coefficients. Two cases are discussed: 1. the rotation of a sphere around a
 coordinate axis with small variable angular velocity, i. e. nonstationary regimen,
 2. the rotation of a sphere around a vertical axis with constant angular velocity, i. e.
 stationary regimen. In the first case H. Hertz equations (Ges. Werke, 1, 1895) are
 used and the properties of magnetic field and flux are described, and on this way the
 principal moment of the forces is determined. It is shown that in the first approxi-

mation the projections of this moment on the moving axes can be expressed to be proportional to the corresponding projections of the angular velocities. The coefficients of the proportionality depend on constructive parameters of the system (radius of a sphere, magnetic permeability, number of stator poles, etc). The second case presents a normal regimen of the action of asynchronous motor under the action of rotating moment which is equilibrated by means of moment of friction.

D. Rašković.

Anilović, V. Ja.: Grundlagen der Dynamik der Aufbereitungssiebe mit Dämpfung. Trudy Inst. Mašin., Sem. Teor. Mašin Mechanizmov 19, Nr. 74, 5—13 (1959) [Russisch].

The author considers the dynamical problems of damped coal separators. This apparatus consists of two baskets with sieves each of which is coupled by four parallel rods. The baskets are the basic elements driven by cranks attached on the shaft under the angles of 180° . Supposing that the lengths of the cranks are small in comparison with other elements the small forced vibrations are treated. The problem is reduced to the problem with one degree of freedom. The forces in the elements are determined and the stability problem is investigated supposing the mechanism as two Assur's groups. To illustrate the proposed theory one numerical example is discussed with two damping separators AG-6 of the old and new construction.

D. Rašković.

Četaev, N. G.: Einige Fragen über die Bewegung einer Schwingmühle. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 3, 49—56 (1957) [Russisch].

Im Artikel wird das Problem des Mahlens mit Hilfe einer Schwingmühle behandelt. Die Bewegung der Mühle wird in drei Etappen zerlegt: 1. Die Kugelfüllung bewegt sich gleichzeitig mit dem Mantel der Mühle wie ein einziger starrer Körper. 2. Die Füllung wird geschleudert und fällt unabhängig von der Bewegung des Mantels. 3. Die Kugelfüllung stößt auf den Mantel der Mühle. Es werden die Voraussetzungen, die bei den einzelnen Etappen gemacht werden, erwogen und die Bedingungen der Bewegung bestimmt. Die Arbeit enthält für die praktische Anwendung eine lineare Approximation der abgeleiteten Ergebnisse. Im weiteren Teil werden Richtlinien für die Verminderung der Wirkung des vertikalen Stoßes auf das Lager der Mühle gebracht. Aus dem Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen geht hervor, daß die theoretische Lösung die optimalen Arbeitsbedingungen der Vibrationsmühle, den angeführten Kriterien entsprechend, darstellt.

I. Plander.

Bessonov, A. P.: Untersuchung der Bewegung eines Vibrationsmechanismus mit schwacher Feder als System von zwei Freiheitsgraden. Trudy Inst. Mašin., Sem. Teor. Mašin Mechanizmov 18, Nr. 69, 34—51 (1958) [Russisch].

Es wird ein System von zwei Freiheitsgraden untersucht, wobei eine Masse M linear (Veränderliche x) um eine Ruhelage schwingt, was durch eine Feder mit der Rückstellkraft kx bewirkt wird. An M befinden sich zwei zur Bewegungsrichtung von M symmetrische mathematische Pendel, die um diese Mittellage um Winkel φ seitlich schwingen. Die Schwerkraft wird nicht berücksichtigt. Es handelt sich um ein ebenes Problem. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$(1) \quad \ddot{x} - a\ddot{\varphi} \sin \varphi - a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + b\dot{x} = 0, \quad \ddot{\varphi} - c\ddot{x} \sin \varphi = 0.$$

Dabei ergeben sich a, b und c aus den Systemkonstanten. $b = 0$ bedeutet $k = 0$. Für $b = 0$ läßt sich das System mit der neuen abhängigen Veränderlichen $\dot{\varphi}^2$ und der unabhängigen Veränderlichen q durch Quadraturen lösen. Der allgemeine Fall ($k \neq 0$) wird diskutiert, indem die Lösung $x = -a \cos q$ des Falls $b = 0$ als Ansatz in das allgemeine System (1) eingesetzt wird.

W. Haucke.

Petelin, D. P.: Approximate determination of the auto-oscillations in the automatic control system for a synchronous motor. Automat. Remote Control. 20, 13—19 (1959). Übersetzung aus Avtomat. Telemech. 20, 16—22 (1959).

Es wird das Problem der Eigenschwingungen eines Synchronmotor-Regelkreises behandelt. Dieser Kreis ist durch Nichtlinearitäten gekennzeichnet: Sinusförmige Änderung des Winkeldrehmoments, schwankende Belastung zwischen Null und dem 1,5fachen Nominalwert und nichtlineares Verhalten einer Quadriereinheit zur erwünschten Sicherung der Konstanz der Ausgangsreaktionskraft. Ausgehend von den Gleichungen der Rotorbewegung und dem Übergangsverhalten des Synchronmotors ergibt sich eine Beziehung, die wesentlich durch die Funktionen $\theta^2 \sin \theta$, $(\sin \theta)^2 p \theta$, $(\sin \theta)^2 p^2 \theta$, $(\sin \theta)^2 p^3 \theta$ bestimmt ist, wobei θ der Winkel des drehenden axialen Feldes von Stator und Rotor ist. Unter Verwendung der Methode der harmonischen Linearisierung von N. M. Krylov und N. N. Bogoljubov für die nichtlinearen Funktionen wird die gefundene Beziehung in eine Gleichung für periodische Komponenten und in eine solche für konstante Komponenten aufgespalten. Nun lassen sich die gesuchten Parameter der Eigenschwingungen graphisch-analytisch mit Hilfe des Stabilitätskriteriums nach Michailov finden. Bei großem Verstärkungsfaktor vereinfachen sich die Beziehungen, wobei es auch bequemer ist, die Stabilität nach der Methode von L. S. Gol'dfarb zu untersuchen. *A. Hückler.*

● Morice, P. B.: Linear structural analysis. An introduction to the influence coefficient method applied to statically indeterminate structures. London: Thames and Hudson, Ltd. 1959. XII, 170 p. 35 s. net.

Das für Bauingenieure — Studenten und beruflich tätige Statiker — geschriebene Buch gibt eine vorzügliche Einführung in die Behandlung statisch unbestimmter Systeme, insbesondere in die Methode der Einflußzahlen, unter Verwendung des modernen Hilfsmittels der Matrizenrechnung und mit Rücksicht auf den Einsatz elektronischer Digitalrechner. Nach einem einführenden Abschnitt über Bezeichnungen und die grundlegenden Sätze über Formänderungsenergie folgt eine ausführliche Beschreibung der Berechnung der Einflußzahlen für die wichtigsten interessierenden Lastfälle einschließlich Temperaturbelastung und Vorspannungen. Eine sorgfältige Diskussion topologischer Fragen der Systeme zur Ermittlung des Grades der statischen Unbestimmtheit schließt sich an. Nach zwei Abschnitten über die Grundregeln der Matrizenrechnung und die numerische Behandlung linearer Gleichungssysteme nebst Matrix-Inversion (symmetrische und allgemeine Dreieckszerlegung) lassen sich die nun folgenden statischen Fragen auf überzeugend einfache und durchsichtige Weise mit Hilfe des Matrizenkalküls vorführen: Wahl und Transformation von Hauptsystemen und deren Einfluß auf die Gestalt der Einflußmatrix (flexibility matrix). Ein Abschnitt über Programmieretechnik für den Digitalrechner beschließt das gut lesbar und sorgfältig abgefaßte Buch, das durch zahlreiche ausführlich durchgerechnete Zahlenbeispiele belebt wird, und das man auch deutschen Bauingenieuren auf das wärmste empfehlen möchte. *R. Zurmühl.*

Kolĭn, N. I.: Analytische Grundlagen der differentiellen Methode zur Untersuchung von Verzahnungen. Trudy Inst. Mašin., Sem. Teor. Mašin Mechanizmov 16, Nr. 64, 26—53 (1957) [Russisch].

Es wird die differentielle Methode zur Bestimmung der Daten für die geometrischen Parameter der Oberfläche eines Elementes auf Grund der Parameter der konjugierten Oberfläche des andern Elementes, mit welchem das höhere kinematische Paar gebildet wird, entwickelt, wobei die Untersuchung auf die Umgebung des Kontaktpunktes beschränkt wird. Die Methode wird auf nichtorthogonale räumliche Verzahnungen mit beliebigem Übertragungsverhältnis und Abstand zwischen den Achsen ausgedehnt. Die Beziehung zwischen den Elementen 2. Ordnung der konjugierten Flächen wird auf Grund der differentiellen Charakteristiken der Verzahnung $i_{21} = d\varphi_2/d\varphi_1 = \pi_1(\varphi_1)$ und $d^2\varphi_2/d\varphi_1^2 = di_{21}/d\varphi_1 = \pi_2(\varphi_1)$ erzielt, wo φ_1 und φ_2 die Drehwinkel und i_{21} das Übertragungsverhältnis darstellen. Als Beispiel wird eine einfache ebene Verzahnung unter Anwendung der Bobilierkonstruktion behandelt.

Für räumliche Verzahnungen wird eine verallgemeinerte Methode dargestellt. Es folgen Rechenbeispiele. *Chr. Pelecudi.*

Cerkudinov, S. A. und N. V. Speranskij: Synthese von Gelenkviereckgetrieben nach der Methode der Interpolationsapproximation mit einem Knoten hoher Vielfachheit. I. Trudy Inst. Mašin., Sem. Teor. Mašin Mechanizmov 17, Nr. 67, 46—77 (1957) [Russisch].

Der Artikel gibt die Lösung der Aufgabe über die genäherte Wiedergabe der vorgegebenen Lagefunktion eines Gelenkvierecks, also der Funktion, die die Abhängigkeit zwischen den Verschiebungen des treibenden und des angetriebenen Gliedes ausdrückt. Für die Lösung der Aufgabe wird die Methode der mehrfachen Interpolation mit einem fünffachen Knoten benutzt. Die Lösung ist in analytischer Form unter Verwendung des Apparats der kinematischen Geometrie angegeben. Eine Besonderheit der Lösung besteht in der verhältnismäßigen Einfachheit der Konstruktion der geometrischen Örter, die alle möglichen Varianten der Lösung zeigen. Es wird auch die Lösung dieser Aufgabe nach der Methode der mehrfachen Interpolation mit vierfachen Knoten und vorgegebenem Übertragungswinkel angegeben. Die Möglichkeit der Annäherung durch einen Knoten sechster Vielfachheit wird gezeigt. *N. I. Levitskij (R. Ž. Mech. 1959, 92).*

Grodzenskaja, L. S.: Zum Entwurf von Gelenkmechanismen nach einer vorgegebenen Ruhedauer des geführten Gelenks. Trudy Inst. Mašin., Sem. Teor. Mašin Mechanizmov 18, Nr. 71, 69—90 (1958) [Russisch].

Es werden Entwurfsmethoden für den Tschebyscheffschen Führungsmechanismus und eine diesem angegliederte Gruppe mit zwei Elementen beschrieben, um eine vorgeschriebene Rast des Abtriebes zu erzielen. Zurückkommend auf die Rechenformeln für diese Getriebe werden eine Reihe von interessanten Diagrammen wiedergegeben, aus denen die Existenzbereiche der freien Parameter des Getriebes bei Einhaltung bestimmter Bedingungen, z. B. Grenzbedingungen für die Beweglichkeit des Getriebes, die Bedingung der Approximation der ganzen Koppelkurve des Führungsetriebes mit einem vollständigen Kreis usw. ermittelt werden können. Ferner werden die Bereiche der für die Konstruktion zulässigen Abmessungen dargestellt, bei denen keine gegenseitige Behinderung der Elemente oder Begrenzung des Übertragungswinkels stattfindet. *Chr. Pelecudi.*

Samburov, V. A.: Eine neue Methode der Synthese von Pantographen und anderen transformierenden Mechanismen. Trudy Inst. Mašin., Sem. Teor. Mašin Mechanizmov 17, Nr. 67, 5—21 (1957) [Russisch].

Verf. formuliert die allgemeinen Sätze und entwickelt die Theorie der analytischen Synthese der ebenen transformierenden Mechanismen mit niederen Paaren ohne passive Kopplungen solcher Ketten, die sich bei starrer Fixierung eines Gliedes in einen Mechanismus mit zwei Freiheitsgraden verwandeln. Es wird die Synthese der Pantographen untersucht und die allgemeine Lösung der Aufgabe der Synthese allgemeiner Typen ebener Siebgelenk-Pantographen angegeben.

V. N. Geminov (R. Ž. Mech. 1958, 10825).

● **Szabó, István:** Höhere Technische Mechanik. Nach Vorlesungen. Dritte verb. und erweit. Auflage. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1960. XII, 504 S. mit 421 Abb. DM 31,50.

Dieses hervorragende Lehrbuch liegt nun bereits in der dritten Auflage (2. Auflage s. dies. Zbl. 82, 169) vor, die wiederum erweitert und verbessert wurde. Besonders wertvoll sind die zahlreichen Beispiele, die der Leser noch nach verschiedenen Richtungen erweitern und ergänzen kann. Für einen Ingenieur, den die rechnerische Untersuchung seiner Probleme interessiert, ist dieses Werk eine wahre Fundgrube. Zusammen mit den beiden anderen „Szabo's“ liegt jetzt ein Standardlehrbuch vor, das dem Lernenden eine wirkliche Beherrschung des umfangreichen Stoffes vermittelt. *A. Weigand.*

Augstkalns (Augstkaln), K.: Analyse der Bewegung eines Werkstücks längs des Spiraltrogs eines Schwingbunkers. *Izvestija Akad. Nauk Latvijk. SSR* 9 (158), 41—49, engl. Zusammenfassung 49—50 (1960) [Russisch].

Various possible courses of the movement of parts without breaking contact with the spiral-shaped chute of a vibrobunker are considered. Analytic relationship with the object of determining the limits of separate stages of movement has been established, differential equations of the movement have been obtained and the method of their solution indicated and illustrated by practical examples. The method permits the estimation of the part travel during one vibration cycle of the bunker. In application to an example it is shown how to the movement of the part which will occur after a certain period may be determined graphically and analytically and it is demonstrated that the parameters of this movement will be stable. Engl. Zusammenfassung.

● **Bishop, R. E. D. and D. C. Johnson:** The mechanics of vibration. Cambridge: At the University Press 1960. XII, 592 p. 120 s. net.

Dieses umfangreiche Werk, das von dem berühmten Verlag hervorragend ausgestattet wurde, unterscheidet sich in einem wesentlichen Punkt von den üblichen Darstellungen. Verff. beginnen mit den erzwungenen Schwingungen und führen hier den Begriff „receptance“ ein, den man etwa mit Übertragungsfaktor oder kinetische Einflußzahl übersetzen kann. Bei ungedämpften Schwingungen wachsen diese kinetischen Einflußzahlen über alle Grenzen, falls die Erregungsfrequenz mit einer der Eigenfrequenzen übereinstimmt. Die Einflußzahlen zusammengesetzter Systeme lassen sich aus den für die Teilsysteme geltenden zusammensetzen; dies bedeutet in vielen Fällen eine Verringerung der Rechenarbeit. Nach Erläuterung der Grundlagen (z. B. Lagrangesche Gleichungen) wenden die Verff. die Methode der Einflußzahlen auf zahlreiche Probleme der Schwingungslehre an, wobei u. a. ausführlich auf die Haupt- oder Normalkoordinaten eingegangen wird. Auch die Näherungsmethoden von Rayleigh, Dunkerley und Southwell werden besprochen und an Beispielen erläutert. Bei kontinuierlichen Systemen, von denen die Saite und die Stäbe besprochen werden, gehen die Einflußzahlen in Einflußfunktionen über. Die Ergebnisse werden in Tabellen zusammengefaßt, die sich z. T. mit früher veröffentlichten decken. Eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung wird erst im 8., 9. und 10. Kapitel in die Rechnung eingeführt, wobei u. a. auf den Fall der schwachen Dämpfung eingegangen wird. Gedämpfte Schwingungen von Stäben werden mit Hilfe eines komplexen *E*- oder *G*-Moduls erfaßt. Im Schlußkapitel werden Einschaltvorgänge behandelt; hier findet man z. B. die Erregung von Balkenschwingungen durch eine bewegte Kraft und eine näherungsweise Untersuchung der Erscheinungen beim Durchfahren der Resonanz. Die Grundlagen der Lehre von den mechanischen Schwingungen sind in diesem Werk sehr sorgfältig und verständlich dargestellt. Die numerischen Verfahren treten etwas in den Hintergrund; z. B. wird die Lösung von Schwingungsproblemen mit Hilfe von Matrizen nicht behandelt. Diese Verfahren sollen in einem zweiten Band besprochen werden. Das Werk wird allerdings dann so umfangreich werden, daß nicht jeder Interessent auch die Zeit haben wird, beide Bände durchzuarbeiten.

A. Weigand.

● **Tong, Kin N.:** Theory of mechanical vibration. New York and London: John Wiley & Sons, Inc. 1960. XII, 348 p. \$ 9,75.

Der Schwerpunkt dieser Darstellung der Lehre von den mechanischen Schwingungen liegt bei den Systemen von endlich vielen Freiheitsgraden, wobei sich der Verf. auf lineare Probleme beschränkt. Im ersten Kapitel, das den Schwingern von einem Freiheitsgrad gewidmet ist, werden u. a. Verfahren erläutert, die für die Regeltheorie von Bedeutung sind, z. B. die Methode des Frequenzganges. Ferner finden sich Angaben über verschiedene Dämpfungsgesetze und über die Wahl der besten Dämpfung bei Meßgeräten. Die Untersuchung der Einschaltvorgänge wird so weit geführt, daß dem Leser der Übergang zur Methode der Laplace-Transformation keine Schwierigkeiten mehr machen wird. Bei der Behandlung der Schwingungen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden werden auch die Matrizenmethoden zur

Ermittlung der Eigenwerte herangezogen, und es werden die Begriffe Hauptachsen-Transformation und Hauptkoordinaten erläutert. Schwingungsketten werden nach Holzer-Tolle behandelt, als wichtige Näherungsmethode wird das Verfahren von Rayleigh besprochen. Als Beispiele dienen u. a. Schwingungsdämpfer und die Berechnung biege- und torsionskritischer Drehzahlen. Im letzten Kapitel, das ziemlich knapp gehalten ist, werden die Schwingungen von Stäben behandelt; Membran und Platte werden nur erwähnt. Zur Untersuchung der Probleme werden die Methoden der Eigenschwingungen, der Charakteristiken und das Rayleigh-Ritzsche Verfahren benutzt. Auch das Differenzenverfahren wird erwähnt. Bei der Ableitung der Grundgleichungen werden stets die einfachsten Annahmen gemacht; Dämpfungseinflüsse und die Schubdeformation bei Biegeschwingungen werden nicht berücksichtigt. Das Buch schließt mit einem Anhang, der einige Definitionen und Sätze aus der Matrizenalgebra enthält. Der Verf. gibt in seinem Werk eine zuverlässige Einführung in die Schwingungstheorie. Die Beispiele, die z. T. durchgerechnet, z. T. als Aufgaben gestellt werden, sind ebenfalls meist theoretischer Natur; eigentlich technische Probleme treten in den Hintergrund.

A. Weigand.

Hübner, E.: Eigenschwingungszahlen zusammengesetzter Schwingungs-Systeme. Ingenieur-Arch. 29, 134—149 (1940).

Der Verf. entwickelt ein Verfahren, wonach die Berechnung von Eigenschwingungszahlen komplexer, aus kontinuierlichen Teilgebilden zusammengesetzter Systeme ermöglicht wird. Ein vorgelegtes Schwingungssystem wird zunächst in mehrere möglichst einfache, der Berechnung leicht zugängliche Teilgebilde aufgespalten. Für die Koppelpunkte der Teilgebilde werden dann dynamische Einflußzahlen berechnet, die entsprechend denen der Statik definiert werden: $d_{jk} = q_j/Q_k$. Dabei ist q_j die Amplitude der erzwungenen Schwingung und Q_k die der Erregerkraft. Die Eigenschwingungszahlen des Gesamtsystems lassen sich dann nach einem ausführlich erläuterten Berechnungsgang ermitteln, wobei die Verknüpfungseigenschaften der Teilgebilde berücksichtigt werden. Da das vom Verf. entwickelte Verfahren den Rechenautomaten zugänglich gemacht werden soll, wird die Rechenarbeit mit Hilfe des Matrizenkalküls auf eine Matrizenmultiplikation zurückgeführt. Der Verf. beginnt dann mit der Bestimmung der Frequenzgleichung zusammengesetzter Systeme. Stellt man sich vor, daß an einem ungedämpften linearen Gebilde gleichfrequente harmonische Erregerkräfte angreifen, dann läßt sich für die Schwingungsamplituden an den Kraftangriffspunkten ein Gleichungssystem der Art $q_i = d_{i1} Q_1 + d_{i2} Q_2 + \dots + d_{in} Q_n$ aufschreiben, das in Matrizenschreibweise

$$\begin{cases} q = \mathfrak{D} \cdot \Omega, \\ \Omega = \mathfrak{C} \cdot q, \end{cases}$$

mit \mathfrak{D} als Deformationsmatrix und $\mathfrak{D}^{-1} \equiv \mathfrak{C}$ als Steifigkeitsmatrix, lautet. Werden nun mehrere solcher Gebilde gekoppelt, so erhält man die Matrizengleichung, $\Omega = \mathfrak{C} \cdot q$, die uns die Frequenzgleichung $\det \mathfrak{C} = 0$ liefert. Die für die weitere Auswertung wichtige Matrix \mathfrak{C} ermittelt nun der Verf. über eine Verknüpfungsmatrix Φ aus den Steifigkeitsmatrizen \mathfrak{C}_i der einzelnen Teilgebilde, wobei die Energien, die zwischen den Erregerkraftquellen und dem Koppelgebilde ausgetauscht werden. Berücksichtigung finden. Als Ergebnis erhält der Verf. $\mathfrak{C} = \Phi' \mathfrak{C} \Phi$, wobei sich \mathfrak{C} diagonal aus den Steifigkeitsmatrizen der Teilgebilde zusammensetzt und Φ' die Kehrmatrix zu Φ ist. \mathfrak{C} ist eine quadratische Matrix der Ordnung n (Anzahl der Kopplungsstellen); sie ist unabhängig von der Zahl der Freiheitsgrade der beteiligten Teilgebilde. Bei der Bestimmung der dynamischen Einflußzahlen geht dann der Verf. von der Integralgleichung der Biegeschwingungen von Stäben bei zeitlich harmonisch veränderlichen, verteilten Belastungskräften und Momenten gleicher Fre-

quenz aus:

$$y(x) = \int_1 G_P(x, u) [p(u) + \lambda \varrho(u) y(u)] du + \int_1 G_M(x, u) M(u) du$$

(G die Greensche Funktion).

Geht man zu n harmonischen und gleich frequenten Einzelkräften bzw. zu m Einzelmomenten als Erregung über, so erhält man die dynamischen Einflußzahlen, bezogen auf die Stelle x_j zu:

$$\bar{d}_{jk} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r_y(x_k) \cdot r_y(x_j)}{\mu_r (\lambda_r - \lambda)} \quad \text{für die Kraft } P_K, \text{ bzw.}$$

$$d_{jk} = l_0 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r_y(x_k) \cdot r_y(x_j)}{\mu_r (\lambda_r - \lambda)} \quad \text{für die homogenisierte Kraft } M_K/l_0.$$

Hier ist $r_y(x_k)$ die Schwingungsamplitude im Punkte x_k in der r -ten Eigenschwungsform und μ_r die r -te generalisierte Masse. Für \bar{d}_{jk} und d_{jk} gelten die Reziprozitätsrelationen. Nach den Angaben des Verf. konvergieren die Reihen gut, so daß man ein schwingungsfähiges System, bestehend aus einzelnen Federn und Massen als Ersatzgebilde, durch f Freiheitsgrade approximieren kann, wobei nur zu beachten ist, daß f größer als die Anzahl n der Bezugspunkte x_k sein muß. In der Arbeit werden dann Sonderfälle mit leicht zu bestimmenden dynamischen Einflußzahlen an Hand homogener und stabförmiger, biegebeanspruchter Gebilde vorgeführt. Den Abschluß bilden zwei Anwendungsbeispiele für mehrfache Kopplung: Ein Doppelrumpfflugzeug mit Leitwerk und ein Turbomaschinenfundament.

H. Göcke.

Szulkin, P. and B. Kaerprzyński: Comparative analysis of approximate methods in vibration theory. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. techn. 8, 361—370 (1960).

Die Berechnung freier ungedämpfter Schwingungen kann bei symmetrischer Federkennlinie auf das Anfangswertproblem $y'' + y(1 + \vartheta y^2) = 0$, $\tau = 0$: $y = 1$, $y' = 0$ zurückgeführt werden, das sich durch elliptische Funktionen lösen läßt. Verff. vergleichen diese strenge Lösung mit Näherungslösungen, die sich durch eine Störungsrechnung oder nach dem Verfahren von Ritz-Galerkin ermitteln lassen. Es zeigt sich, daß das Verfahren von Galerkin bei geringerem Rechenaufwand wesentlich bessere Ergebnisse liefert als die Störungsrechnung. A. Weigand.

Grémillard, Jean: Sur l'expression de certaines solutions périodiques de troisième sorte du problème des trois corps. C. r. Acad. Sci., Paris 251, 2121—2123 (1960).

Graham, E. W.: A class of optimum trajectory problems in gravitational fields J. Aero-Space Sci. 27, 296—303 (1960).

The problems involving the transfer of a rocket vehicle from one point to another in a gravitational field with minimum fuel expenditure have been treated by many other authors (Lawden, Fried, Okhotsimskij) by means of the methods of variational calculus. In this paper a known condition for optimum transfer in uniform gravitational fields not taking into consideration the atmospheric resistance, viz., that the impulses are applied only at the terminals, is extended to a class of problems in centrally directed fields. First one treats the problem of a particle traveling in a two-dimensional force-free space, with initial position and initial velocity at the time $t = 0$, but at the time $t = T$ it is again in the initial position with other velocity under the condition that the velocity change has one minimum. The transfer time and the terminal velocity vector are specified. The known result that the fuel required is a minimum in a uniform gravitational field if impulses are applied only at the terminals is extended to a class of problems in centrally directed fields. A dimensionless parameter (P) involving the strength of the gravitational field and the prescribed transfer time is used to measure the importance of the nonuniformity of the gravitational field. Its critical value measures the velocity increments which

can be produced by the perturbation force field. The cases $P = 0$ and $P < 1$ are treated and discussed. The results are extended to three-dimensional problems, and the extensions to non-central and time-independed fields can be made.

D. Rašković.

Riddell, W. C.: Initial azimuths and times for ballistic lunar impact trajectories. *ARS J.* 30, 491—493 (1960).

This paper derives launching conditions for which a ballistic missile will hit the moon, as well as conditions for the smallest angle of intersection between the orbital planes of the missile and of the moon and conditions for the optimum azimuth for launching. The argument is hard to follow, because none of the symbols is defined.

J. P. Vinti.

Sams, Eldon W.: Performance of nuclear rocket for large-payload, earth-satellite booster. *J. Aero-Space Sci.* 27, 481—492, 516 (1960).

Es wird die leistungsmäßige Verwendbarkeit von Stützmasse-Reaktor-Raketenantrieben für Startstufen von Erdsatellitenträgern untersucht. Die Reaktorraketen verwenden als Stützmasse flüssigen Wasserstoff, der gleichzeitig auch zur Kühlung der Düsen- und Reaktorwände und -kerne herangezogen wird. Untersucht werden zwei unterschiedliche Reaktorsysteme, und zwar bei denen einmal der Kernbrennstoff in Graphit dispensiert ist und das andere Mal Tungsten-Brennstoff-Elemente in Berylliumoxyd eingelagert sind. Die bei der Reaktion entstehende Wärmeenergie wird im Wärmeaustauschverfahren auf den Wasserstoff übertragen, der seinerseits durch Expansion in einer Laval-Düse den Vortriebsimpuls liefert. Für die Berechnung der zu erwartenden Fluggeräatank- und -triebwerksgewichte ist vorausgesetzt worden, daß das Gesamtgerät einstufig ist und eine Erdsatellitenbahn in 300 mi.-Erdabstand erreicht wird. Die Gewichte für das Triebwerk werden berechnet nach den maximal zulässigen Temperatur- und Druckbelastungen. Die Reaktorwand-Temperaturen werden verändert zwischen etwa 1900—2800 °K, der Druck des Wasserstoffs am Brennkammereintritt wurde variiert zwischen 63—105 kg/cm². In Diagrammen werden für beide Reaktortypen über dem Wasserstoffeintrittsdruck der Triebwerksschub, das Triebwerksgewicht, der spez. Impuls, Fluggerätegesamtgewicht, Massenverhältnis und Nutzlast für verschiedene Reaktorwand-Temperaturen als Parameter aufgetragen. Diese Auftragungen erfolgten getrennt für verschiedene Triebwerksgößen. In einem Anhang der Abhandlung sind die bei der Berechnung verwendeten Gleichungen aufgeführt und erläutert. Die Berechnungen selbst, einschließlich der erforderlichen thermodynamischen Schub- und Impulsberechnungen, wurden auf einer elektronischen Digitalrechenmaschine ausgeführt.

W. Buschulte.

● **Garnier, René:** Cours de cinématique. Tome I: Cinématique du point et du solide. Composition des mouvements. (Cours de la Faculté des Sciences de Paris.) Quatrième éd., revue et augmentée. Paris: Gauthier-Villars, Éditeur-Imprimeur-Libraire 1960. IX, 246 p.

Vgl. die Besprechung der 3. Aufl. in diesem Zbl. 55, 151).

Jauch, G.: Meridiankonstruktion rotierender Werkzeuge zur Herstellung von Schraubenflächen. Österreich. Ingenieur-Arch. 14, 1—23 (1960).

Die technisch wichtige Aufgabe, einen zur Herstellung einer gewünschten Schraubfläche Φ mit der Achse a geeigneten rotierenden Fräser zu konstruieren, läuft geometrisch auf die Ermittlung jener Drehfläche Ψ mit passend angenommener Achse b hinaus, die Φ längs einer Linie („Eingriffslinie“) berührt; Ψ stellt dabei die von den Schneidkanten des arbeitenden Fräasers überstrichene Fläche dar. Die verschiedenen bekannten Behandlungsvorschriften der genannten Aufgabe lassen sich in zwei Gruppen zusammenfassen: 1. Normalenverfahren; diese benützen den Umstand, daß in jedem Eingriffspunkt Q die Flächennormalen von Φ und Ψ zusammenfallen, suchen also jene Punkte Q von Φ , deren Flächennormalen die Fräserachse b treffen. 2. Parallelkreisverfahren; diese führen Hilfsebenen $\varepsilon \perp b$ ein und bestimmen

jeweils den in ε liegenden Parallelkreis von Ψ , der die Schnittlinie $\varepsilon\Phi$ berührt. — Eine von O. Baier [Z. angew. Math. Mech. 14, 248—250 (1934)] entwickelte Methode der ersten Gruppe stützt sich auf die von b bei der Schraubung um a erzeugte Regelschraubfläche Θ , deren Schnittpunkt T mit der Flächennormale n eines beliebigen Punktes P von Φ aufgesucht wird; bei Verschraubung der durch T gehenden Erzeugenden von Θ nach b gelangt dann P in einen Eingriffspunkt Q . Die Bestimmung von T erfolgt in kotierter Projektion mittels einer Höhenskala auf n und des aus kongruenten Kreisevolventen bestehenden Schichtenplans von Θ . Eine zeichnerisch bequeme, vom Verf. ausgearbeitete Variante beruht nun darauf, daß Θ auch durch einen Wälzvorgang erzeugt werden kann, bei welchem eine zu b parallele und mit b starr verbundene Ebene auf einem Drehzylinder mit der Achse a und dem Radius $p \tan \gamma$ (p = Schraubparameter, γ = $\angle ab$) rollt, was den Treffpunkt T unter Verwendung von Klarpapier durch ein einfaches „geometrisches Experiment“ zu finden gestattet. Ein auf einem ähnlichen Gedanken beruhender Vorgang wird auch für das Parallelkreisverfahren vorgeschlagen, wenn der achsennormale Querschnitt von Φ bekannt ist. Die Anwendung kinematischer Überlegungen liefert dabei auch Tangenten- und Krümmungskonstruktionen für die Schnittlinie $\varepsilon\Phi$.

W. Wunderlich.

Meyer zur Capellen, W.: Die Extrema der Übersetzungen in ebenen und sphärischen Kurbeltrieben. Ingenieur-Arch. 27, 352—364 (1960).

Für den allgemeinen Fall eines periodischen Getriebes, das aus An- und Abtrieb, Steg und einem Zwischenmechanismus besteht, wird das Übersetzungsverhältnis definiert. Dieses Verhältnis ist eine dimensionslose Größe, proportional der Winkelgeschwindigkeit des gedrehten Abtriebsgliedes bzw. der linearen Geschwindigkeit des Schubgliedes. Bei ebenen Getrieben führt die durch Nullsetzung der Ableitung ($i'(\alpha) = 0$) erzielte Bedingung für das Extremum des Übersetzungsverhältnisses zu der geometrischen Deutung, daß die Polbahntangente der aus der ebenen Bewegung des Antriebes gegenüber dem Antrieb entstehenden Rastpolkurve senkrecht zum Steg stehen muß. Es folgt die Anwendung auf die Viergelenkkette mit graphischer Konstruktion des Ausdruckes für die Ableitung des Übersetzungsverhältnisses sowie die Erweiterung der Ergebnisse auf die Kopplung zweier Viergelenkketten. Darauf wird zu sphärischen Getrieben übergegangen, die an Hand von verschiedenen Beispielen erörtert werden. Hier verwandelt sich die oben erwähnte Bedingung in die Notwendigkeit, daß die Tangentialebene zum (relativen) Polkegel zur Stegebene senkrecht steht. Die graphischen Bedingungen lassen sich ohne Schwierigkeiten übertragen, was an verschiedenen ebenen und räumlichen Getrieben gezeigt wird. Auch auf mehrgliedrige ebene und sphärische Getriebe können die gefundenen Extremum-Bedingungen sinngemäß übertragen werden.

Chr. Peleculdi.

Elastizität. Plastizität:

Angelitch, T. P. The Beltrami-Michell compatibility equations in general tensor form obtained from Saint-Venant's compatibility equations. Srpska Akad. Nauka, Zbornik Radova 55, mat. Inst. 6, 1—4, engl. Zusammenfassung 4 (1957) [Serbokroatisch].

Starting from the compatibility equations of the linear theory of elasticity in general coordinates and using Hooke's law a system of equations is derived, containing the second order covariant derivatives of the contravariant stress components and of the stress tensor scalar invariant. Taking into account known relations of the tensor calculus and expressing the Laplacian of the scalar invariant through Navier's equations by derivatives of the volume forces, six different equations for covariant stress components are obtained, representing the general form of Beltrami-

Micell equations. The corresponding equations for mixed stress components are in general not symmetric; but nevertheless they yield only six different equations too, because there exist three simple relations between the left hand expressions of the new system of equations.

A. Kuhelj.

Fejnberg, S. M.: Das Prinzip der extremalen Spannung. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Meeh. Mašinostr. 1959, Nr. 4, 101—111 (1959) [Russisch].

The paper is concerned with a formulation of an extremal principle in the theory of limit analysis. This principle furnishes a lower bound for the limit load intensity of an elastic-plastic structure. It has been first formulated in the author's previous paper of the same title (this Zbl. 29, 281). The principle of limiting stress state relates to the same question as the lower bound theorem for collapse load formulated by D. C. Drucker, W. Prager, H. J. Greenberg (this Zbl. 47, 432). Main results of the paper will be stated below in a somewhat more compact notation. Let σ_{ij} denote the stress tensor, λT_i -surface traction on the surface S of the body G , λF_i -body forces, where λ stands for a constant multiplier. Such a stress field, continuous in G , which satisfies equilibrium conditions $\sigma_{ij,j} + \lambda F_i = 0$ and stress boundary conditions $\lambda T_i = \sigma_{ij} n_j$ is defined to be the statically permissible stress fields L . The set of all permissible stress fields L is denoted by (L) . Let furthermore $f(\sigma_{ij}) = K(x_i)$ be a condition of the limit state (for example a yield condition) at a point x_i of G . $K(x_i)$ is a point variable material constant. f is defined to be a homogeneous function of order m in stress components and to form a convex hypersurface in the stress space. Any L which satisfies $f(\sigma_{ij}) \leq K(x_i)$ is defined to be an admissible stress field l . Set of all l is denoted by (l) . The principle of the limiting stress state expresses the possibility of stress redistribution in an elastic-plastic material and is stated as follows: if a set (l) is not empty then it can be found at least one $l \in (l)$ which will realize in the limit state of G for given stress boundary conditions. It is proved in the paper that for $\lambda = 0$ any residual stress field can be represented in term of Maxwell's stress functions φ, ψ, θ in the following form: $s^2 \varphi^*, s^2 \psi^*, s^2 \theta^*$ -providing that $\varphi^*, \psi^*, \theta^*$ are sufficiently regular in G , $s(x_i) > 0$ in G , $S(x_i) = 0$ on S and $\partial S / \partial n \neq 0$ on S . If L_λ denotes any permissible stress field for $\lambda \neq 0$ then it follows from the proof given that $L_\lambda + L(S^2 \varphi^*, S^2 \psi^*, S^2 \theta^*) \in (L)$, therefore the number of permissible stress fields is arbitrarily large. Problem of evaluation of the limit load intensity of G is to find such a multiplier $\lambda = \lambda_0$ for which plastic deformation is permissible and conditions of admissibility of the obtained stress field are satisfied. If for $\lambda = 1$ $\sigma_{ij}^{(1)}$ is a stress tensor for permissible stress state $L_{(1)}$, then for $\lambda \neq 1$, due to linearity of stress equilibrium equations, it follows that $\lambda \sigma_{ij}$ corresponds to L_λ . Since the limit state condition f is homogeneous in stress components, then $f(\sigma_{ij}) = \lambda^m f[\sigma_{ij}^{(1)}]$, $\lambda^m f[L_{(1)}] \leq k$. Furthermore since f and its arguments are continuous in G — the statically admissible multiplier for the limit load can be written as follows: $\lambda_0^m = \sup [\min k/f(L_{(1)})]$. The case when σ_{ij} are not continuous is also discussed in the paper. Using the condition of minimal deviation of a function from zero [I. Ya. Shtaerman, Izvestija. Otd. Tech. Nauk, Soviet Acad. of Sciences I, (1939)] equations of flow law are obtained in the plastic region. The basic relation used for that purpose is the condition the first variation of f/k to be zero, e. g. $\delta(f/k) = 0$ for an arbitrary L in plastic region. This condition leads to the relation $\partial \sigma_{ij} / \partial f \cdot \partial f / \partial \sigma_{ij} = 0$, — equations of equilibrium and stress boundary condition being satisfied by using the proper Lagrange multipliers. Particular forms of flow law for von Mises material are given. It is apparent that the condition used in the paper for evaluation strain rate components is closely related to the concept of the plastic potential. A method of obtaining an upper bound for the limit load is proposed in the paper. This method for certain stress state consists of introducing $F^*(L) \geq F(L)$ where $F(L) = \lambda - \min k/f(L)$. Then $\lambda_0 \leq \xi_0$ if $\xi_0 = \sup F^*(L)$. This, however is again only a statical condition and no flow and energy dissipation relations have been

used to assure a continuing process of permanent deformation. Therefore the upper bound condition obtained in the paper refers only to statical solutions for "circumscribed" limit state equation. *A. Sawczuk.*

Ferrarese, Giorgio: Sulla velocità angolare nei moti rigidi e la rotazione locale nelle deformazioni finite. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. 18, 169—177 (1959).

Questo lavoro si collega coi ben noti studi di A. Signorini sulle trasformazioni termoelastiche finite e di essi adotta sia le notazioni, sia i metodi di calcolo vettoriale ed omografico. Viene in particolare considerata l'omografia $\alpha = dP/dP_*$, dove P e P_* sono due qualunque punti corrispondenti in uno spostamento regolare, la deformazione pura e la „rotazione locale“ di cui tale omografia si compone. Utilizzando una opportuna espressione che l'A. stabilisce per la velocità angolare di un generico moto rigido, vengono dedotte, con una certa semplicità, le equazioni ai differenziali totali per la rotazione locale e le condizioni di congruenza (estensione delle condizioni di Saint-Venant alle deformazioni finite). *M. Pastori.*

Marciniak, Zdzisław: Graphical representation of states of stress and strain. *Arch. Mech. stosow.* 9, 261—274, russ. Zusammenfassung 274 (1957).

The graphical representation of three-dimensional states of stress and strain with non-rotating axes in a triangular coordinate system obtained by projection of the axes of principal stresses and principal strains on a plane perpendicular to the space diagonal is examined in some detail, including the representation of yield-conditions and rupture criteria. The discussion is illustrated by simple examples of two-dimensional elastic-plastic straining. The procedure is well-known and has been widely used for the last fifty years in the theories of volume-constant plastic deformation and of strength. However, the author's treatment of certain details may be of interest to the novice in continuum mechanics. *A. M. Freudenthal.*

Thomsen, E. G.: A new method for the construction of Hencky-Prandtl nets. *J. appl. Mech.* 24, 81—84 (1957).

Starting with the well-known Hencky-Prandtl theorems the author develops a geometrical technic for obtaining the slip-line net more speedily. He then constructs the hodograph using the geometrical relations (Geiringer, this Zbl. 42, 426; Prager, this Zbl. 51, 414) between stress graph and hodograph. A comparison of a thus obtained complete solution for a centered fan with the solution obtained by numerical methods is carried out. *H. Geiringer.*

● **Levin, G.:** Einfluß der Lage des Lastangriffspunktes auf die Kippstabilität eines gabelgelagerten einfachen Balkens mit doppelt- oder einfachsymmetrischem Querschnitt, der durch eine Einzelkraft in Balkenmitte belastet ist. (DFL-Bericht Nr. 102). Braunschweig: Deutsche Forschungsanstalt für Luftfahrt e. V., Institut für Flugzeugbau 1959. V. 50 S. DM 17,80.

Biegeträger, deren Querschnitt um die Lastangriffsrichtung ein kleineres Trägheitsmoment als um die dazu senkrechte Richtung aufweist, können bei einer bestimmten Größe der im Abstand v_p oberhalb oder unterhalb des Schubmittelpunktes angreifenden senkrechten Belastung kippen. Dieses Problem spielt im Leichtbau und im Kranbau eine Rolle und ist deshalb auch in der DIN 4114 für einzelne Belastungsfälle erfaßt worden. In der vorliegenden Arbeit wird die Abhängigkeit der Kipplast P_{ki} bzw. des Kippmomentes M_{ki} von der Lage v_p des Lastangriffspunktes dargestellt. Verf. beschränkt sich dabei auf gabelgelagerte Träger mit offenem, mindestens einfachsymmetrischem Querschnitt, die ideal-elastisch sind und durch eine Einzellast in Trägermitte beansprucht werden. Ausgehend von den zwei simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen des Problems, die von C. F. Kollbrunner, M. Meister übernommen werden, erfolgt die Lösung mittels Potenzreihenansätzen, wobei die Koeffizienten aus den Randbedingungen der Gabelagerung erhalten werden. Es ergeben sich Rekursionsformeln, die für eine Auswertung mit

automatischen Rechenhilfsmitteln geeignet sind. Auf diese Weise werden hinsichtlich des Auftretens der Parameter J_t (Drillwiderstand), C_M (Wölbwiderstand) und y_t (Abstand des Torsionspunktes vom Schubmittelpunkt) fünf verschiedene Fälle untersucht und die Ergebnisse in Diagrammen dargestellt. Ein Vergleich mit den Vorschriften der DIN 4114 zeigt, daß dort für unterhalb des Schubmittelpunktes angreifende Lasten die Tragfähigkeit der Träger beträchtlich überschätzt wird.

H.-J. Franek.

Abramov, G. D.: Zur Theorie der Stabilität und der Schwingungen von Rahmen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinostr.* 1959, Nr. 4, 167—172 (1959) [Russisch].

On discute la manière de poser les problèmes de la stabilité et des vibrations des systèmes réticulaires inarticulés. On fait remarquer des inconvénients, on donne des exemples numériques, on indique la possibilité d'obtenir des solutions approchées. On fait rappel de nombreux travaux en comparant les méthodes de solutions. Il est à regretter que la note soit rédigée d'une manière incohérente, sans suite logique et sans conclusions.

Z. Wasintyński.

Amenzade, Ju. A.: Die Verbiegung eines durch eine kreiszylindrische Höhlung geschwächten Balkens. *Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk* 10, Nr. 3, 47—63 (1957) [Russisch].

Gefunden wurde der Spannungszustand in einem prismatischen Stab, dessen Querschnitt ein krummliniges Quadrat ist und der durch eine koaxiale zylindrische Öffnung geschwächt ist. Der Stab ist mit einer Einzelkraft belastet, welche entlang einer der kleineren Achsen des Querschnittes gerichtet ist. Das Problem kann auf die Bestimmung einer Funktion einer komplexen Veränderlichen, die im Querschnitt analytisch ist und entsprechende Randbedingungen am inneren und äußerem Rande befriedigt, zurückgeführt werden. In der Arbeit werden die Koeffizienten der Reihenentwicklung gefunden. Ein Rechenbeispiel zeigt, daß die auf diesem Wege berechnete Schubspannung in drei charakteristischen Punkten nur wenig von dem Wert abweicht, den die Rechnung nach der in der Festigkeitslehre bekannten angenäherten Formel für die Spannung im Querschnitt eines einer Biegung ausgesetzten Stabes liefert.

W. Urbanowski.

Rossier, Paul: Solution améliorée de l'équation différentielle de la ligne élastique d'une poutre soumise à la flexion. *Bull. techn. Suisse Romande* 83, 25—26 (1957).

L'A. écrit, par une élévation au carré, l'équation différentielle que doit vérifier la ligne élastique $y = y(x)$ d'une poutre soumise à la flexion, sous la forme $K^2 y''^2 = M^2(1 + y'^2)^3$. Se situant dans le cas particulier d'une poutre en port-à-faux, de rigidité K constante, l'A. considère que le moment fléchissant est de la forme $M = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3$ (m_i constantes). Pour ne pas négliger, comme on fait d'habitude, y'^2 par rapport à l'unité, l'A. pose $y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6$ (a_i constantes). Mais une telle forme ne peut pas vérifier exactement l'équation différentielle, fait que l'A. semble ne pas observer. Les conclusions de l'A. sont correctes et bien connues, mais elles sont obtenues par un raisonnement incorrect.

P. P. Teodorescu.

Chatiašvili, G. M.: Das elastische Gleichgewicht eines zusammengesetzten zylindrischen Balkens mit längs der Erzeugenden des Zylinders veränderlicher Seitenlast. *Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskoy SSR* 18, 393—400 (1957) [Russisch].

The same problem was treated by Almansi [*Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur.* V, Ser. 10, 333—338, 400—408 (1901)] and Dzanelidze (*Diss.*, Leningrad 1949) for a homogeneous cylindrical beam. In this paper the author treats the same problem of a compound cylindrical beam formed by a set of parallel thin layerbars without contact. They are surrounded by elastic mediae bounded with cylindrical surfaces the generatrices of which are parallel to the layerbars. He is not taking into consideration the volume forces. It is assumed that the beam is composed of mate-

rials with different Young's moduli and Poisson's ratios. The cross section of the compound beam is plane, normal to the generatrices of the cylinders and consists of the regions S_j bounded by closed contours L_j , $j = 1, 2, \dots, m$, and of the region S_0 appertaining to the media, the contour of which consists of the contours L_1, L_2, \dots, L_{m+1} ; the latter contour contains within it a set of all precedent contours. The general Muschelišvili problem regarding the same basic hypotheses is reduced to the special problem as follows: knowing the same coordinates of the forces acting on the surfaces and the corresponding displacements it is necessary to determine the stress components and the displacements satisfying in the corresponding regions the equilibrium equations, the conditions of the compatibility, and boundary conditions on the border surface and on the surfaces of each region. The basic elastostatic equations are deduced and the stress components and displacements are determined in function of the bending and torsional function. *D. Rašković.*

Choudhury, P.: Stresses due to a certain type of nucleus of strain in an infinite slab of transversely isotropic material. *Rivista Mat. Univ. Parma* 8, 337—343 (1957).

This paper is concerned with the distribution of stresses in an infinite slab of transversely isotropic material due to a nucleus of strain in the form of a centre of rotation inside it. One of the plane faces of the slab is free while the other is rigidly fixed. Numerical results for the displacements are given. Problems of semi-infinite solid with transverse isotropy have been solved by H. A. Elliot (this Zbl. 31, 84). When the elastic solid has only axisymmetric distribution of shearing stresses Elliot's result was obtained by using a simpler method (B. Sen, this Zbl. 57, 405).

W. A. Bassali.

Dabrowski, Ryszard: On the computation of curved bridges with open cross-section. *Rozprawy inż.* 5, 229—239, russ. und engl. Zusammenfassung 239 (1957) [Polnisch].

Les travées métalliques des accès aux ponts sont souvent courbes. Si leur courbure n'est pas accentuée, il suffit de faire leur calcul comme si elles étaient droites en ajoutant un terme correctif, comme l'a fait, par exemple F. Hartmann dans son „Cours des ponts métalliques“ publié à Vienne en 1952. Si au contraire la courbure est accentuée il est nécessaire de suivre dans les calculs une méthode exacte. Le rapport contient l'analyse détaillée d'une poutre courbe d'une seule travée, aussi qu'une étude d'une poutre courbe de plusieurs travées. Pour simplifier l'analyse l'A. admet que les réactions des pannes reliant les poutres sont distribuées d'une manière continue le long de ces poutres. On compare les résultats obtenus aux travaux de H. Gottfeld, A. A. Umanski et F. Hartmann.

Z. Wasutyński.

Davies, G. and B. G. Neal: The dynamical behaviour of a strut in a truss framework. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A.* 253, 542—562 (1959).

The dynamic jump phenomenon that occurs in trusses due to the beam — column effect of compression members is analysed for a simple, three-bar redundant truss containing a single bar under compression and loaded at its joint. It is shown that for the maximum value of the load the equilibrium may be lost and a dynamic jump to a new position of equilibrium may occur. The strut is assumed to be rigid-plastic with the plastic hinge at its centre, the tension members are assumed to remain in the elastic range. An energy method is presented for the determination of the magnitude of the jump provided the relationship between axial load and axial deformation is known. The duration of the dynamic jump is shown to be of the order of 0,1 sec. Damped oscillations that appear thereafter will be far less than the magnitude of the jump.

Z. Mróz.

Huang, Yu-shan: Column analogy for multi-connected rigid frames. *Sci. Sinica* 8, 568—579 (1959).

Das von Cross entwickelte Analogieverfahren, nach dem ein einfach zusammenhängender Rahmen von nicht mehr als dreifacher statischer Unbestimmtheit nach

den wohlbekannten Spannungsgleichungen einer exzentrisch belasteten Säule gleicher Kontur behandelt werden kann, wird hier auf mehrfach zusammenhängende Rahmenwerke mit beliebig vielen statisch Unbestimmten ausgedehnt. Die dabei anfallenden linearen Gleichungen eignen sich wiederum zur iterativen Auflösung, was an einem Beispiel zahlenmäßig vorgeführt wird, aber natürlich auch zur Bearbeitung mittels elektronischer Rechanlagen.

R. Zurmühl.

Kovalenko, K. R.: The effects of internal and external friction on the dynamic stability of bars. *PMM J. appl. Math. Mech.* **23**, 345—358 (1959), Übersetzung von Priklad. Mat. Mech. **23**, 239—248 (1959).

Verf. berichtet über den Einfluß der inneren und äußeren Reibung auf die dynamische Stabilität von Stäben. Zu diesem Zweck wird die Differentialgleichung $\ddot{y} + \lambda p(t) y = 0$ mit $p(t)$ als reeller periodischer Funktion der Periode π untersucht. λ soll darin ein Parameter sein, der dem Quadrate der Kreisfrequenz der parametrischen Erregung umgekehrt proportional sei. Es ist bekannt, daß Lösungen $\Phi(t; \lambda)$ der obigen Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0; \lambda) = 1$; $\varphi'(0; \lambda) = 0$; $\psi(0; \lambda) = 0$; $\psi'(0; \lambda) = 1$ existieren; die sog. charakteristische Funktion $A(\lambda)$ der Differentialgleichung ist dabei $A(\lambda) = \frac{1}{2} [\varphi(\pi; \lambda) + \psi'(\pi; \lambda)]$ (s. auch M. J. O. Strutt: „Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik“, dies. Zbl. **5**, 160). Bereits Ljapunow hat in einem Theorem darauf hingewiesen, [C. r. Acad. Sci., Paris **127**, 910—915, 1085—1088 (1899)], daß der Parameter λ willkürlich große Werte annehmen kann — was auf willkürlich kleine Werte der Frequenz ω parametrischer Erregung hinausläuft —, die zu unbegrenzten Lösungen obiger Differentialgleichung führen. In Konsequenz daraus führt die Verfolgung verschiedener Probleme der Mechanik ohne Berücksichtigung von Dämpfungskräften auf paradoxe Ergebnisse. Z. B. liefert die Untersuchung der dynamischen Stabilität von Stäben mit linearen Differentialgleichungen den Schluß, daß es bei kleinen Amplituden longitudinal wirkender pulsierender Kräfte eine kleine pulsierende Frequenz derart gibt, daß dynamische Instabilität entsteht. Solche Annäherung an das mechanische Problem mit dem Versuch, Gebiete der Instabilität zu bestimmen, gibt immer nur eine erste Annäherung der Instabilitätsbereiche. Es erscheint so unmöglich, die obere oder untere Schranke von Werten der labilen Frequenzen von pulsierenden Längskräften zu finden. Aus diesem Grunde untersucht nun Verf. das Anwachsen der charakteristischen Funktion und definiert Werte dieser Funktion und der weiteren charakteristischen Indices der obigen Differentialgleichung für genügend große Parameter λ , bei welchen gerade noch eine lineare Formulierung des mechanischen Problems ein Berechnungsschema gestattet, ohne auf ein obengenanntes Paradoxon zu führen. Als Beispiel dafür, wie der Widerspruch zu umgehen ist, wird die dynamische Stabilität eines Stabes mit gelenkiger Lagerung und pulsierenden Längskräften untersucht, wobei vorher noch das asymptotische Verhalten der charakteristischen Funktion und des reellen Teiles des charakteristischen Exponenten wiedergegeben werden. [Bezüglich des untersuchten Beispieles, zuerst von Beljaev, Ingenieurbauten u. Baumechanik, Leningrad 1924, vgl. man auch E. Mettler, „Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Axiallast“, Mitteil. Forsch.-Anst. Gutehoffnungs-Konzernhütte 8. Heft 1, 1—15 (1940)]. Verf. wendet dann alle bis dahin gewonnenen Erkenntnisse auf die Differentialgleichung $y''(t) + 2\mu v y'(t) + \mu^2 q(t) y(t) = 0$ an. Es bedeuten hierin $v > 0$ einen konstanten Dämpfungskoeffizienten, $\mu > 0$ einen reellen anderen Koeffizienten (aus einem nicht näher bekanntgegebenen mechanischen System folgend) und $q(t) \geq 0$ eine reelle Funktion in t der Periode π , kontinuierlich im Bereiche $0 \dots \pi$ verlaufend. Das Ergebnis lautet: Ist $v^2 > \max q(t)$ für $0 \leq t \leq \pi$, dann folgt nach einem Satz von Einaudi über quasi-harmonische Lösungen eines dissipativen Systems (Lit.-Verz. s. Arb. von Kovalenko), daß die Lösungen stabil sind für jeden Wert von μ . Ist aber $\min q(t) > 0$ für $0 \leq t \leq \pi$, so sind die Lösungen asymptotisch stabil.

Wird schließlich $\nu^2 < \max q(t)$ für $0 \leq t \leq \pi$, so werden die Lösungen für gewisse Werte des Parameters λ instabil. Schließlich wird nochmals als konkrete Anwendung auf Aufgaben der dynamischen Stabilität elastischer Systeme der axial-pulsierend belastete Stab mit innerer und äußerer Dämpfung betrachtet. Nur bei Berücksichtigung einer inneren Dämpfung, die proportional mit der Deformationsgeschwindigkeit angenommen wird, entsteht aus dem Paradoxon unendlich vieler Stabilitäts- bzw. Instabilitätsgebiete, die sich um $\omega = 0$ konzentrieren (Erregerkraft $P = P_0 \cos \omega t$), das wirkliche Verhalten des Stabes, wonach nur eine endliche Anzahl von Instabilitäts-(Stabilitäts)-Bereichen existieren kann. Ein ausführliches Literaturverzeichnis beschließt diese sehr lesenswerte Veröffentlichung von Kovalenko.

H. Göcke.

Rabinovič, A. L.: Die Torsion eines Elementes eines Kreisringes (Verallgemeinerung des Saint-Venant'schen Problems). Moskovsk. fiz.-techn. Inst., Issledovanija Mech. priklad. Mat., Trudy 1, 17—41 (1958) [Russisch].

Verf. gibt eine allgemeine Lösung der einfachen Torsion eines krummen dickwandigen Stabes (mit einer kreisförmigen Mittellinie) von konstantem Querschnitt. Er erwähnt die allgemeinen Formeln für die Bestimmung der Torsionsfestigkeit bzw. der Deformationsenergie, die den bekannten Formeln aus der klassischen Theorie der Torsion prismatischer Träger ähneln. Ähnlich wird auch der Fall eines krummen Stabes mit rechteckigem Querschnitt behandelt. Er bestimmt und tabelliert die Koeffizienten in den Formeln für die Starrheit und höchstzulässige Beanspruchung und erwähnt Näherungsbeziehungen für die Berechnung dieser Größen.

J. Valenta.

Weinel, E. und W. Wallisch: Das Elastizitätsgesetz des verwundenen Stabes. Z. angew. Math. Mech. 37, 292—293 (1957).

Es wird festgestellt, daß durch (spannungslose) Vorverwindung prismatischer Stäbe eine Kopplung zwischen Längsdehnung und Drillung hervorgerufen wird. Diese Kopplung — rein statischer Natur — ist von erheblichem Einfluß auf die Größe der Eigenfrequenz der Längs- und Torsionsschwingungen im Falle $J_p \gg J_d$ (J_p polares Trägheitsmoment, J_d Moment der Drillsteifigkeit); sie verschwindet dagegen für $J_p = J_d$.

R. Dąbrowski.

Wilde, Piotr: Structural analysis of an open cross-section curvilinear bridge. Rozprawy inż. 5, 15—31, russ. und engl. Zusammenfassung 31—32 (1957) [Polnisch].

Il s'agit de l'analyse statique des travées courbes des ponts. On donne un aperçu des méthodes employées par H. Gottfeld et A. A. Umanski pour le calcul des travées réticulaires courbes, puis on déduit des relations exactes concernant les forces intérieures dans des travées courbes fermées de deux poutres à âmes planes et on déduit des formules pour le calcul des lignes d'influence. La dernière partie de l'étude est consacrée à la déduction des formules rapprochées, plus faciles à employer dans les calculs courants. L'étude est terminée par un exemple numérique.

Z. Wasiutyński.

Barenblatt, G.: Equilibrium cracks formed during brittle fracture rectilinear cracks in plane plates. PMM J. appl. Math. Mech. 23, 1009—1029 (1959), Übersetzung aus Priklad. Mat. Mech. 23, 706—721 (1959).

Bei seiner Lösung geht der Verf. von den folgenden Voraussetzungen aus: a) die Abmessungen der Rißenden sind im Vergleich mit der Rißlänge gering; b) die Verteilung von Verschiebungen einzelner Oberflächenpunkte in der nahen Endenumgebung hängt nicht von der wirkenden Belastung ab und ist bei gegebenem Werkstoff und Bedingungen immer gleich; c) die Spannungen in der Umgebung von Rißenden sind endlich. Auf Grund der erwähnten Voraussetzungen werden vom Verf. die Bedingungen der Bildung und Ausbreitung von Gleichgewichtsrissen in ebenen Platten untersucht. Es stellt sich heraus, daß die Rißabmessungen aus dem bekannten Belastungsverlauf und dem Kohäsionsmodul K ermittelt werden können. Die Ko-

häsionskräfte üben einen wesentlichen Einfluß auf die Rißabmessungen und Verschiebungen der Punkte der entgegenstehenden Rißoberflächen bloß in der nahen Umgebung von Reißenden aus. Auf Grund des von Muschelišvili aufgestellten Verfahrens werden vom Verf. die Bedingungen abgeleitet, unter denen die Voraussetzung c) erfüllt ist. Diese Bedingungen drücken eigentlich einen kontinuierlichen Übergang der Rißkontur in der Nähe der Reißenden aus. Nach der Voraussetzung b) führt dann der Verf. in die Lösung die sog. Universalcharakteristik des Werkstoffes — den Kohäsionsmodul K ein. Im folgenden Abschnitt untersucht der Verf. eine unendliche ebene Platte, die in der Länge $2l$ durch eine zur bestimmten Geraden symmetrische Zugbelastung $p(x)$ beansprucht wird. Auf Grund des Obenerwähnten wird die Abhängigkeit zwischen den Kohäsionskräften, der Belastung und der Rißlänge in der folgenden Form abgeleitet:

$$\int_0^l \frac{p(x) dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{K}{\sqrt{2}l}.$$

Als Beispiel erwähnt Verf. die Bedingungen für die Ausbreitung von Rissen bei einer konstanten Zugbelastung oder bei einer Belastung durch Einzelkräfte. Außerdem wird ein Fall der Einpressung eines Keils von konstanter Dicke in eine unendliche Platte behandelt. Durch eine geeignete Umformung der Randbedingungen (die Reibungskräfte auf der Keiloberfläche werden vernachlässigt) bestimmt der Verf. auf Grund des Muschelišvilischen Verfahrens und unter der Voraussetzung c) den Ausdruck für die Bestimmung des Kohäsionsmoduls $K = \frac{1}{2} E \cdot h / (1 - \nu^2) \sqrt{L}$, wo L der Länge des entstandenen Risses und ν dem Kehrwert der Poissonschen Konstante gleichkommen. Für die Bestimmung des Einflusses von Randbedingungen muß man den Keil so lange einpressen, bis die Länge L vom Keil — zur Rißlänge konstant bleibt. Zum Schluß untersucht der Verf. den Einfluß der Körperabmessungen auf die Ausbreitung von Rissen und zeigt, daß man sich auch in diesem Fall mit der Bestimmung der Kohäsionskräfte nicht zu befassen braucht. Als Beispiel wird ein unendliches Band von der Breite $2 \cdot L$ mit einem $2 \cdot l$ langen und an seinem Rande durch Einzelkraft P belasteten Riß erwähnt. Der gegenüberliegende Rand ist durch eine gleichgroße, aber entgegengesetzt wirkende Kraft belastet. Die höchstzulässige Kraft vor der Zerstörung des Bandes ist mit der folgenden Beziehung gegeben: $P_{\max} = \sqrt{2/\pi} \cdot K \sqrt{L}$. Wirkt die Kraft P in einem bestimmten Abstand von der Rißoberfläche, wobei der Riß einen bestimmten kritischen Wert nicht überschreitet, ist der Fall ein wenig komplizierter, aber die Zerstörung erfolgt durch eine fortschreitende Ausbreitung des entstandenen Risses. Falls die Kräfte P in einem den kritischen überschreitenden Abstand voneinander wirken, erfolgt die Zerstörung des Bandes, ohne daß es zu einer Rißbildung kommt. *J. Valenta.*

Chrustalev, A. F. und B. I. Kogan: Über den Spannungszustand eines hohlen Kreiszylinders. *Izvestija vyss., učebn. Zaved., Mat.* 4 (11), 178—183 (1959) [Russisch].

Verf. löst den Fall eines unendlich langen dickwandigen Zylinders von konstanter Dicke, wobei auf dem inneren Halbmesser der Zylinderhälfte eine Randbedingung in der Form $\alpha \sigma_r + \beta u = \gamma$, $-\infty < z < 0$ vorgeschrieben ist; $\alpha < 0$, $\beta > 0$ und γ sind Konstanten, σ_r kommt der radialen Spannung und u der radialen Deformation gleich. Auf der äußeren Oberfläche bzw. auf der zweiten Hälfte der inneren Zylinderoberfläche gelten homogene Randbedingungen. Das Problem führt zur Bestimmung der biharmonischen Funktion $q(r, z)$, die die erwähnten Bedingungen erfüllt. Diese Funktion wird vom Verf. in der Form

$$\varphi(\varrho, x) = \int_{-i\infty}^{0-; +i\infty} \varphi_0(\varrho, \lambda, m) dm$$

angegeben, wo $\varrho = r/r_1$, $\lambda = z/r_1$. Die sogenannte biharmonische Hilfsfunktion q_0 stellt der Verf. in folgender Form dar: $q_0(r, z) = \epsilon^{mz} f(r)$, wobei eine der

Integrationskonstanten eine Funktion des Parameters m ist. Zum Schluß erwähnt der Verf. einige konkrete Beispiele der Randbedingungen, wie z. B. $\alpha = 0$, $\gamma/\beta = u_0$ (das Einpressen einer starren Nabe längs der Zylinderhälfte) bzw. $\beta = 1$, $\gamma = \delta > 0$ (das Einpressen einer elastischen Nabe mit einem Übermaß 2δ). Vom Verf. werden die Deformationen in der Umgebung von $\lambda = 0$ sowie die radiale Spannung ermittelt.

J. Valenta.

Conway, H. D.: On an axially symmetrically loaded circular shell of variable thickness. *Z. angew. Math. Mech.* **38**, 69—70 (1958).

Das Problem der achsensymmetrischen Biegung einer Kreiszyklinderschale mit quadratisch veränderlicher Wandstärke führt auf eine lineare Differentialgleichung 4. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten. Ihre Integration läßt sich auf jene einer Differentialgleichung 2. Ordnung zurückzuführen. Bei besonderer Lage des Scheitels der Wandlinienparabel kann die Differentialgleichung mit Hilfe elementarer Funktionen integriert werden (s. K. Federhofer, dies. Zbl. **40**, 399). Verf. hat denselben Fall untersucht und die einfache geschlossene Lösung direkt aus der Differentialgleichung 4. Ordnung (wie auch W. Vocke, s. dies. Zbl. **86**, 185) gewonnen.

V. Bogunović.

Derski, Włodzimierz: The state of stress and displacement in a thick circular plate due to a nonstationary temperature field. *Rozprawy inż.* **7**, 191—231, russ. und engl. Zusammenfassung 232—233 (1959) [Polnisch].

Man untersuchte eine dicke Kreisplatte, auf deren Oberfläche ein instationäres kreissymmetrisches Temperaturfeld wirkt. Die Funktion der Temperaturverteilung im Inneren der Platte fand man durch Anwendung der Laplaceschen Transformation, während der Spannungs- und Verschiebungszustand mit Hilfe des thermisch-elastischen Verschiebungspotentials sowie der Loveschen Spannungsfunktion gefunden wurde. Die Randbedingungen wurden in exakter Weise auf den äußeren Ebenen der Platte und auf integrale Weise auf der Walzenoberfläche befriedigt.

Z. Kączkowski.

Grigoljuk, É. I.: Über die Stabilität dreischichtiger Schalen und Platten jenseits der Elastizitätsgrenze. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* **1958**, Nr. 6, 68—72 (1958) [Russisch].

Den Gegenstand der Untersuchung bildet eine „Sandwich“-Schale (engl.: sandwich shell) von beliebiger Form. Die Schale besteht aus drei Schichten: zwei gleichen Außenschichten, die Normalspannungen übertragen, und aus einer Innenschicht, die ausschließlich Schubspannungen überträgt. Es wurde angenommen, daß die Verschiebungen in der Innenschicht lineare Funktionen der Veränderlichen z , senkrecht zur Mitteloberfläche der Schale sind. Für die Außenschichten, die Biegesteifigkeit besitzen, gilt die Kirchhoff-Lovesche Voraussetzung. Die Beziehungen für Kräfte- und Momentenzuwachs in den tragenden (äußeren) Schichten erhielt man in Anlehnung an die Henckysche Deformationstheorie sowie an die Prandtl-Reissche Theorie des plastischen Fließens. Während man die Schalenstabilität untersuchte, wurde ein System von vier Differentialgleichungen für vier gesuchte Größen erhalten: Durchbiegung, Spannungsfunktion und zwei durch Schubverzerrungen der mittleren Schicht hervorgerufene Winkel. Als Beispiel wurde die Stabilität einer zylindrischen, axial auf Druck beanspruchten Schale untersucht.

Z. Kączkowski.

Ivlev, D. D.: Das Ausbeulen eines dickwandigen Rohres, das durch eine flache axialsymmetrische Ausbohrung geschwächt ist. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* **1957**, Nr. 5, 113—118 (1957) [Russisch].

This is a contribution about the behaviour of an elastic plastic tube under internal pressure. The thickness of the tube is supposed to be constant except of one segment, where it exhibits small continuous variations. The axisymmetric stresses in defective cross-sections of the tube deviate slightly, according to the

author's opinion, from the well known distribution, based on the following assumptions: the stress intensity is constant in plastic range (no strain-hardening), the material is incompressible, the deformation is plane. Then the author assumes small and equal variations of the radial, circumferential and axial normal stresses. He presents a stress variation field for cosinusoidal contours of the notch's longitudinal sections. This solutions is formulated by means of Bessel, Neumann and MacDonald functions and satisfies equilibrium equations as well as boundary conditions. In addition he gives a kinematical analysis of the rigid plastic tube, if the notched segment is plastic throughout the entire thickness of its wall. *J. Murzewski.*

Ivlev, D. D.: Über den Verlust der Tragfähigkeit kreisnaher rotierender Scheiben. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 1, 141—144 (1957) [Russisch].

The author treats the problem of the diminution of the carrying possibility of the rotating disks the forms of which differ very little from the circles, namely, when the equation of the disk is $r = a + d \cos 2 \theta$, $d = \text{const}$. The solution is supposed in the form for the circular disk, introducing the known Saint-Venant's condition of plasticity. The problem of the circular disk with eccentricity ($r = a + d \cos \theta$) is treated also. It is shown that the error goes to 3%. *D. Rašković.*

Kurdin, N. S.: Große Durchbiegungen einer rechtwinkligen Membran, die durch eine elastische Rippe verstärkt ist. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1958, Nr. 117—119 (1958) [Russisch].

Nach der energetischen Methode wird die nichtlineare Aufgabe über die rechtwinklige Membran, die durch eine elastische Rippe verstärkt ist und unter der Einwirkung einer gleichmäßig verteilten Transversallast steht, gelöst. Die deformierte Fläche wird als Sattelfläche angesetzt. Die Verstärkungsrippe soll sowohl auf Biegung als auch auf Streckung reagieren. Auf der Kontur der Membran sind die Verschiebungskomponenten gleich Null. Aus den Energiereaktionen wird der Spannungs- und der Deformationszustand der verstärkten rechtwinkligen Membran bestimmt. Der Einfluß der Steifheit der Rippe und der Dimensionen der Membran auf ihren Deformationszustand wird durch ein Zahlenbeispiel veranschaulicht. — Im besonderen ergibt sich aus den Resultaten des Verf. eine verbesserte Lösung der bekannten Aufgabe über die Membran ohne Verstärkung (S. P. Timošenko, Platten und Schalen. Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur, Moskau-Leningrad, 1948; A. Föppl, L. Föppl, Kraft und Deformation. 1. Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur, Moskau-Leningrad, 1933).

R. R. Surkin (R. Ž. Mech. 1959, Nr. 5438).

Lašmanova, I. A. und V. V. Novožilov: Die Wölbkrafttorsion von Rohren. Leningradsk. Gosudarst. Univ., Učenyje Zapiski Nr. 217, mat.-mech. Fak., Ser. mat. Nauk Nr. 31 254—271 (1957) [Russisch].

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem der Wölbkrafttorsion von dünnwandigen Stäben mit geschlossenen Profilen untersucht. Die Stabenden sind in die starren Querscheiben so eingespannt, daß dort eine Querschnittsverwölbung verhindert wird. An diesen beiden Enden wird der Stab durch gegengleiche Drehmomente belastet. Ausgehend von der Halbmembrantheorie der Zylinderschalen von W. S. Wlassow, mit einigen Modifikationen von V. V. Novožilov, wird die Lösung des Problems abgeleitet. Aus dieser Lösung folgt, daß die Steifigkeit dieselbe wie bei der reinen Torsion ist. *V. Bogunović.*

Nevin DeSilva, C. and P. M. Naghdi: Asymptotic solutions of a class of elastic shells of revolution with variable thickness. Quart. appl. Math. 15, 169—182 (1957).

Die Differentialgleichungen der biegesteifen Rotationsschalen veränderlicher Dicke bei symmetrischer Verformung lassen sich zu einer komplexen Differentialgleichung zweiter Ordnung vereinigen, wenn die Schalendicke ihrerseits einer gewissen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt. Verff. zeigen, wie sich die komplexe

Differentialgleichung dann auf eine Form bringen läßt, welche für die Anwendung der Methode der asymptotischen Integration von Langer geeignet ist, und geben asymptotische Lösungen an. *H. Neuber.*

Nowiński, Jerzy: Application of some known approximate methods to problems of orthotropic plates at large deflections. *Rozprawy inż.* 5, 333—352, russ. und engl. Zusammenfassung 352—354 (1957) [Polnisch].

The author adopts the approximate methods used in solving the boundary problems for isotropic plates at large deflections to obtain such solutions for orthotropic plates of various shapes. First, Rastovcev's equations are written down for the case of rectilinear and cylindrical orthotropy. Some simple cases of flexure of a circular plate are solved by the inverse method. Next, Prescott's method of pseudo-energy is used in the case of circular and elliptical simply supported plates having the cylindrical and rectilinear orthotropy, respectively, and uniformly loaded. Similarly, a rectangular orthotropic plate having its edges fixed in the horizontal plane is considered. Finally, the energy method is applied to a square membrane and plate under uniform load. *Z. Mróz.*

Onat, E. T.: Analysis of shells of revolution composed of workhardening material. *J. Mech. Phys. Solids* 7, 45—59 (1958).

A general analysis of behaviour of axisymmetric shells made of a rigid, strain-hardening material is presented, two types of the material being considered: a) an isotropically work-hardening material and b) a material whose initial yield surface undergoes a rigid body translation in the course of plastic flow. The yield surface for generalized stresses (bending moments and membrane forces) is constructed in both cases. As an example a simply supported cylindrical shell of an isotropically work-hardening material under uniform pressure is analysed, the problem of uniqueness being also discussed. *Z. Mróz.*

Peštmaldžjan, D. V.: Zur Berechnung symmetrisch belasteter, aus Schichten bestehender anisotroper Rotationsschalen. *Akad. Nauk Armjan. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk* 10, Nr. 2, 39—54 (1957) [Russisch].

Die Differentialgleichungen für zwei Hilfsgrößen nach S. A. Ambarcumjan bei anisotropen Schalen verschwindender Gesamtkrümmung [Akad. Nauk Armjan. SSR, *Izvestija. fiz.-mat. estest. techn. Nauki* 6, Nr. 3, 15—35 (1953); dies. Zbl. 53, 440)] können durch Einführung einer komplexen Veränderlichen in eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung überführt werden, falls die Steifigkeiten in verschiedenen Richtungen gewissen Bedingungen genügen, die im isotropen Falle automatisch erfüllt sind. Diese Gleichung kann bei Kegelschalen leicht in eine Besselsche Differentialgleichung umgeformt werden, wobei bei kleinen Öffnungswinkeln und genügenden Entfernungen von der Kegelspitze asymptotische Näherungen angewendet werden können, aus welchen geschlossene Ausdrücke für die ursprünglichen Hilfsgrößen folgen. Bei Zylinderschalen erhält man als Lösungen der Ausgangsdifferentialgleichung elementare Funktionen, aus denen sich auch für die Verschiebungen und für die Schnittkräfte geschlossene Ausdrücke ergeben. Bei dieser Schalenart werden einige Sonderfälle etwas näher verfolgt, um schließlich an einem Zahlenbeispiel die Länge der Randstörungszone einer langen Schale unter dem Einfluß der Querkkräfte zu bestimmen. *A. Kuhelj.*

Rao, C. V. Joga: Long rectangular plates subjected to linearly varying loads. *Proc. 2nd Congr. theor. appl. Mech., New. Delhi 1956, Oct. 15—16, 8—15 (1957).*

Verf. untersucht das Biegeungsproblem des beiderseits frei gelagerten oder eingespannten dünnen Plattenstreifens mit unverschieblichen Längsrändern ($x = 0$, $x = l$). Voraussetzungsgemäß ist die Belastung nur von x abhängig. Es wird gezeigt, daß die Zugkräfte für den Fall linear veränderlicher und gleichmäßig verteilter Belastung näherungsweise gleich sind. *V. Bogunović.*

Reissner Eric: On influence coefficients and nonlinearity for thin shells of revolution. *J. appl. Mech.* **26**, 69—72 (1959).

This paper deals with the problem of rotationally symmetric deformations of thin elastic shells of revolution which are acted upon by edge forces and moments. The basic equations are derived under the assumption that the displacement and angle of rotation in the meridional plane are finite. For not too shallow shells, an approximate solution is given in the form of power expansions in terms of certain displacement parameters. Finally, the relations (nonlinear) between edge loadings and edge displacements are obtained.

M. Bieniek.

Reissner, Eric: On the determination of stresses and displacements for unsymmetrical deformations of shallow spherical shells. *J. Math. Physics* **38**, 16—35 (1959).

Die Arbeit bringt einige Ergänzungen zu früheren Veröffentlichungen des Verf. über die elastische flache Kugelschale mit konstanter Schalenstärke [*J. Math. Physics* **25**, 80—85, 279—300 (1946); **27**, 240 (1948) und dies. Zbl. **83**, 400]. Es werden zwei Differentialgleichungen für die Spannungsfunktion F und die Durchbiegung in Normalrichtung w angegeben, sowie die Beziehungen zwischen den Schnittkräften, den übrigen Verschiebungskomponenten und der Spannungsfunktion aufgestellt. Mit Hilfe der schon früher angegebenen allgemeinen Lösung für F und w werden dann die Schnitt- und Verschiebungsgrößen durch Reihen ausgedrückt. Schließlich werden verschiedene Sonderfälle behandelt (seitlich wirkende Kraft, Kugelkalotte mit starrem Flächenstück im Scheitel unter Seitenkraft und Biegemoment, Partikularlösungen für gewisse Belastungen, Untersuchung gewisser Randbedingungen).

W. Zerna.

Rooyen, G. T. van and W. A. Backofen: Distribution of interface stress in plane strain and axial symmetric compression. *J. Mech. Phys. Solids* **7**, 163—168 (1959).

This paper presents the results of the experiments carried out by the authors. The aim was experimental determination of the stress distribution over the surface of flat and rough plates, during compression of a plastic material between them. For the investigations pure lead was used. The surface of the plates was sand-blasted. The measurement of the pressure was done by means of measurement pins in appropriate recesses of the plates. The distribution of the normal stress for plane and axially symmetric strain was determined as well as the unit load tangent to the surface of the plate. The results of the measurement confirm, in principle the results of the theoretical work by Hill. Greater discrepancies have only been found in the neighbourhood of the outer edges of the compressed material where the width of the rim is, with approximately constant pressure, smaller than follows from theoretical considerations.

Z. Marciniak.

Rozenberg (Rosenberg), D. B. and L. A. Bezpalko (Bespalko): Concentration of stresses in a spherical bottom near a circular opening. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn RSR* **1959**, 149—151, russ. und engl. Zusammenfassung 151—152 (1959) [Ukrainisch].

Es wird die Frage der Verteilung der Spannungen in einem sphärischen Boden mit einem zylindrischen Rohransatz geklärt, der so an den Boden mittels eines torusförmigen Ringes angeschlossen ist, daß sich die Tangente an den Meridianschnitt stetig unter der Wirkung des inneren Drucks verändert. Die Spannungsverteilung in einem sphärischen Boden mit kreisförmiger Öffnung im Zentrum und etwas andersartiger Überdeckung der Öffnung ist von Ju. A. Ševljakov (dies. Zbl. **65**, 402) untersucht. — Die Länge des zylindrischen Teiles und die Maße der sphärischen Schale werden bedeutend größer als die Maße des torusförmigen Ringes angesetzt. Zur Lösung der Aufgabe benutzt der Verf. die Formeln von V. V. Novozilov (Theorie der dünnen Schalen. Leningrad, 1951; **45**, 445). — Die praktisch wichtigsten meridionalen Biegespannungen σ_1 und die dehnenden

Ringspannungen σ_2 sind für eine Schale mit bestimmten Parametern berechnet. Dabei erreichen die Ringspannungen σ_2 ihren Maximalwert im torusförmigen Teil der Schale und übertreffen die Membranspannungen in der Sphäre um das 5.6-fache. Die Biegespannungen σ_1 ergeben sich bedeutend kleiner als die Ringspannungen und erreichen Maximalwerte an den Kupplungsstellen der Schalenteile.

M. S. Kačan (R. Ž. Mech. 1960, Nr. 2316).

Seide, Paul: A Donnell type theory for asymmetrical bending and buckling of thin conical shells. *J. appl. Mech.* **24**, 547—552 (1957).

Equations, somewhat more accurate than those recently presented by N. J. Hoff, are derived for bending and buckling of thin circular conical shells under arbitrary loading. These equations reduce to Donnell's equations for thin cylindrical shells when the cone semivertex angle becomes very small and the minimum radius of curvature of the median surface approaches a constant value. At the other end of the scale the equations reduce to the well-known equations for flat circular plates when the cone semivertex angle approaches a right angle. In addition, for the entire range of cone semivertex angles the equations reduce to the known equations for axisymmetrical bending when variations of the displacements around the circumference vanish. The problem of bending is reduced to the solution of a single fourth-order partial differential equation with variable coefficients. (From author's summary).

V. Bogunović.

Vekua, I. N.: Über die Bedingungen der Momentenfreiheit konvexer Schalen. *Soobščeniia Akad. Nauk Gruzinskoi SSR* **21**, 649—652 (1958) [Russisch].

Dans une antérieure étude (cf. ce Zbl. 88, 170), l'A. formule les conditions qui doivent être remplies par une surcharge continue d'une voûte mince, convexe, pour que les moments intérieurs soient nuls. Dans le rapport actuel on analyse ces conditions dans le cas des voûtes contenant des percées. Dans ce cas les conditions indiquées ont une forme d'un système d'une suite infinie de relations intégrales. L'A. tâche d'étudier avec quelle exactitude est remplie la condition de la nullité des moments intérieurs, si seulement quelques unes de ces équations sont remplies.

Z. Wasutyński.

Vlasov, B. F.: Über die Gleichungen der Theorie der Plattenverbiegung. *Izvestiia Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* **1957**, Nr. 12, 57—60 (1958) [Russisch].

The problem of the investigation of the stresses of a thin elastic plate taking into consideration the influence of the shearing stresses was treated by many authors (Reissner, Bolle, Mindlin, Green). On the contrary of the hypotheses of these authors in this paper one introduces the following assumptions: 1. the straight line element of the plate before the deformation rotates in the process of the deformation such that the shear on the thickness of the plate changes with parabolic law; 2. the stress station of the plate can be approximated by the system of bending and torsional moments and shear forces distributed on the plate contour. The first assumption gives the possibility to bound the displacements of the plate, i. e. the points of the plates which are lying before the deformation on the vertical straight-line element, after the deformation lie on some curve prescribed by the parabolic law of the change of tangential shearing stresses. The second assumption permits to use the middle plane of the plate as loaded plane with transverse load $q = q(x, y)$, bending and torsional moments and shear forces distributed on the boundary. In this case the potential energy of the plate can be determined by means of the works of the bending and torsional moments and shear forces on the corresponding generalized displacements. These assumptions permit for the determination of tangential shear stresses to omit the known S. Venant's semi-inverse method what is favourable to satisfy better the compatibility conditions as in the previous papers of the other authors. The variational equation of Lagrange is deduced and it is shown that the boundary conditions coincide with known Poisson's conditions. The obtained diffe-

rential equation gives the possibility to deduce also the known S. Germain-Lagrange equation. As one example the problem of a square plate with the ratio $h/a = \frac{1}{3}$ and with hinged edges, loaded by $q = q_0 \sin \xi \sin \eta$, $\xi = \pi x/a$, $\eta = \pi y/a$, is treated and the obtained results are compared with the results obtained by means of other methods.

D. Rašković.

Vodička, Václav: Bending of circular plate with a concentric hole at the center. Rozprawy inż. 5, 5—12, russ. und engl. Zusammenfassung 12 (1957) [Polnisch].

Explicite solution of the equation $r^2 \varphi''(r) + r \varphi'(r) - \varphi(r) = \alpha r + \beta r^3$, α, β const, for some boundary data at $r = a$ and $r = b > a > 0$. *St. Drobot.*

Warbanoff, Christo P.: Integration von Systemen simultaner Differentialgleichungen und ihre Anwendung in der Wlassovschen Theorie der prismen- und schwach pyramidenförmigen Schalen (Faltwerke). Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden 7, (1957/58), 1181—1187 (1958).

Verf. untersucht ein System zweier linearer, nichthomogener, gewöhnlicher Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die rechten Seiten der Gleichungen wurden als stückweise stetige Funktionen angenommen. Jede der gesuchten Funktionen stellt Verf. in Form einer Summe von zwei Gliedern dar. Eine der Komponentenfunktionen, die der Voraussetzung nach im betrachteten Bereich stetig ist, bringt er durch eine schnell konvergierende trigonometrische Reihe zum Ausdruck. Die andere Funktion, bei der die Unstetigkeiten Berücksichtigung finden, wurde durch ein algebraisches Polynom, das zwischen je zwei benachbarten Sprungpunkten verschieden ist, ausgedrückt. Die Koeffizienten der trigonometrischen Reihen findet man aus dem System unendlich vieler linearer Gleichungen, von denen jede vier Unbekannte enthält. Ein ähnliches Verfahren führt im Fall eines Gleichungssystems von veränderlichen Koeffizienten zu einem vollen unendlichen System algebraischer linearer Gleichungen. Man zeigt die Anwendungen dieser Integrierungsart eines Differentialgleichungssystems am Beispiel von Faltwerken.

Z. Kączkowski.

Nowacki, Witold: A plane distortion problem. Arch. Mech. stosow. 9, 417—437, russ. Zusammenfassung 437—438 (1957).

The general problem of assemblage stresses of a region under initial strain is solved by obtaining Green's function for generalized displacement equations and generalized Airy's equation which are biharmonic and are non-homogeneous, containing terms involving functions of initial strain components. The formula for displacement is given by

$$u(x, y) = \iint_{\Gamma} e_{ij}^0 u_{ij}^*(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta$$

where u_{ij}^* is Green function corresponding to a nucleus of elastic strain e_{ij}^0 at an infinitely small region near (ξ, η) . Similar formula for stresses. In this paper author determines the Green functions for stresses and displacements for an infinite plate, a semi-infinite plate and a plate strip.

D. N. Mitra.

Todorov, M. M.: Über die Lösung des ebenen Problems der Elastizitätstheorie für das Rechteck durch trigonometrische Doppelreihen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Masinostr. 1959, Nr. 4, 185—191 (1959) [Russisch].

Verf. löst das Elastizitätsproblem für ein rechtwinkliges Gebiet unter Berücksichtigung der Massenkräfte und bei allgemeiner Belastung der Gebietsränder durch Normal- und Schubspannung. Lasse man die Funktionen $f_{ij}(x, y)$, $g_{ij}(x, y)$, $h_{ij}(x, y)$ im untersuchten Gebiet drei vollständige Systeme stetiger Funktionen bilden. Sind die Spannungen so bestimmt, daß die linken Seiten der Grundgleichungen für alle i, j Orthogonalitätsbedingungen erfüllen, dann genügen die erwähnten Spannungen den Gleichgewichts- und Kompatibilitätsgrundgleichungen. Die Normal- und Schubspannungen werden vom Verf. in der Form von Fourier-Doppelreihen gewählt, deren Koeffizienten aus der obenerwähnten Orthogonalitätsbedingung bestimmt werden.

Verf. erwähnt eine angenäherte Lösung und ein numerisches Beispiel für eine dünnwandige rechteckige Platte, die auf einer der kürzeren Seiten durch einen gleichmäßigen Druck und auf beiden Enden der gegenüberliegenden Seite durch den nach einer Parabel verlaufenden Druck belastet ist. *J. Valenta.*

Iškova, A. G.: Die Verbiegung einer kreisrunden Platte, die auf einem elastischen Halbraum liegt, unter der Wirkung einer gewissen axial-unsymmetrischen Belastung. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1958, Nr. 5, 78—84 (1958) [Russisch].

Zwischen einer Platte und einem elastischen Halbraum wurde lediglich das Vorhandensein normaler Spannungen angenommen. Im Fall einer Plattenbelastung, die durch die Funktion: $q = q^n \sum_{i=0}^{\infty} f_{2i} q^{2i} \cos n \theta$ gegeben ist, wird die Bettungsreaktion mittels nachstehender Funktionsform gesucht:

$$p = q^n [A(1 - q^2)^{-1/2} + \sum_{i=0}^{\infty} b_{2i} q^{2i} \cos n \theta].$$

Die Konstanten A und b_{2i} findet man aus dem unendlichen linearen Gleichungssystem. Es wurde ein Zahlenbeispiel gelöst. *Z. Kączkowski.*

Wysiatycki, Kazimierz: A problem of infinite slice. *Rozprawy inż.* 5, Nr. 4, 549—568, russ. und engl. Zusammenfassung 569 (1957) [Polnisch].

L'étude concerne des panneaux en consoles dont l'extrados est formé par un plan horizontal et l'intrados — par une surface cylindrique. On donne des solutions fermées pour les contraintes en employant des coordonnées bipolaires sous différents cas de surcharges. La forme des solutions est simple et élégante. Les solutions sont suivies d'exemples numériques. *Z. Wasintyński.*

Geertsma, J.: A remark on the analogy between thermoelasticity and the elasticity of saturated porous media. *J. Mech. Phys. Solids* 6, 13—16 (1957).

The analogous behaviour of the temperature distribution in thermoelastic problems and the liquid pressure distribution in a saturated porous medium is worked out in detail and applied to the cases plane strain and plane stress, the latter for thin plates only. Author's summary.

Rozenbljum, V. I.: Zur Berechnung der Temperaturspannungen im Turbinenrotor beim Anlassen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 10, 80—83 (1957) [Russisch].

Die Arbeit enthält eine analytische Lösung der stationären Temperaturspannungen eines unendlich langen dickwandigen Zylinders (eines Rotors) für den Fall, daß sich die Temperatur längs der Rotorachse linear ändert. Die radialen Deformationen werden vom Verf. in der Form des Produkts aus zwei Funktionen $u(r, z) = (z/l) u^0(r)$ dargestellt. Die Funktion $u^0(r)$ entspricht der bekannten Lösung für den Rotor, falls die Temperatur längs der Achse z konstant bleibt. Auf Grund der erwähnten Voraussetzung kann man im wesentlichen das Problem auf die Lösung von zwei üblichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung überführen. Ein numerisches Beispiel wird vom Verf. nicht angegeben. *J. Valenta.*

Ajanjan, É. M.: Das ebene elastoplastische Gleichgewicht eines schüttigen Mediums nahe eines zylindrischen Hohlraums. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 4, 137—140 (1957) [Russisch].

An axially-symmetric stress field of a thick-walled inelastic tube, normally loaded on the internal surface, is considered. The external radius of the tube is not necessarily finite. The Coulomb-Mohr's condition is supposed to characterise the limit state of the material. This limit state is actual within inner part of the tube and the outer concentric zone is strained elastically. The flow rule associated with the limit condition is assumed, but no strain field is presented. The results of the paper are an extension of W. Koiter's work (cf. this Zbl. 53, 140) about perfectly plastic cylinders and apply to a certain kind of elastic loose media. *J. Murzewski.*

Olszak, W. and S. Zahorski: A non-homogeneous orthotropic circular segment as an elastic-plastic problem. Arch. Mech. stosow. 11, 409—419 (1959).

The authors generalize here an earlier analysis by Shaffer and House (this Zbl. 66, 189); they study in the same way the bending of a thick cylindrical sheet into another similar sheet of smaller curvature through moments distributed along the edges, with the view of determining the critical moments of incipient plastic deformation and of collapse. But they relax partly the assumptions of homogeneity and isotropy made in the earlier analysis; they proceed then to define a radially non-homogeneous sheet for which plastic yielding occurs simultaneously throughout the section. The flow function and the yield condition used in the paper are those introduced (for inhomogeneous and anisotropic elasto-plastic bodies) by Olszak and Urbanowski [Arch. Mech. stosow. 8, 85—110, 671—694 (1956)].

G. Capriz.

Olszak (Ol'sak), W. (V.): Über die Grundlagen und Anwendungen der Theorie der inhomogenen elastoplastischen Medien. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 8, 20—34 (1957) [Russisch].

Après avoir fait des considérations générales sur la théorie des corps homogènes ou hétérogènes du point de vue élastique ou du point de vue plastique, en donnant aussi une classification de tels corps, l'A. considère quelques problèmes concrets, qu'il se propose de résoudre. Le cas du cylindre circulaire est traité comme un état de déformation plane, tant dans la théorie de l'élasticité que dans la théorie de la plasticité, en général ou pour certaines conditions aux limites. On mentionne aussi d'autres domaines, par exemple le demiplan.

P. P. Teodorescu.

Rabotnov, Ju. N.: Elasto-plastischer Zustand einer rotierenden Scheibe bei Vorhandensein einer Verfestigung. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinostr. 1959, Nr. 5, 154—156 (1959) [Russisch].

Verf. erwähnt angenäherte Ausdrücke für die Bestimmung der Spannungen der Scheiben bei Kriechbedingungen. Auf Grund der Alterungstheorie wird das Problem auf dasjenige der Scheibe im plastischen Zustand unter Berücksichtigung der linearen Verfestigung übergeführt. Verf. knüpft an seine frühere Arbeit (ibid. 1957, Nr. 5, 30—41) an und erwähnt Ausdrücke für die Bestimmung der Umfangs- und Radialspannungen in Abhängigkeit von der Verfestigungsgröße. Die Ergebnisse haben bloß einen orientierenden Charakter.

J. Valenta.

Ambarcumjan, S. A.: Zur Frage der nicht-linearen Theorie anisotroper Platten. Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady 24, 153—159 (1957) [Russisch].

Wenn man Längenänderungen der zur Plattenmittelebene orthogonalen Linienelemente vernachlässigt, den Einfluß der Normalspannungen in dieser Richtung auf die Verzerrungen parallel zur Mittelebene nicht berücksichtigt, bei der Bestimmung von Schubverzerrungen in Normalenrichtung vereinfachte Ausdrücke in den zugehörigen Tangentialspannungen annimmt und schließlich von den nicht-linearen Gliedern in den Ausdrücken für die Verzerrungen der Mittelebene nur diejenigen behält, welche die Verwölbung enthalten, so erhält man für die Komponenten des Verzerrungstensors in einem beliebigen Punkte verhältnismäßig einfache Ausdrücke. Aus diesen lassen sich mittels des Hookeschen Gesetzes die Spannungen und danach durch Integration über die Plattendicke auch die Schnittkräfte als Funktionen der Verschiebungen von Punkten der Mittelebene ausdrücken. Aus der Verträglichkeits- und der Gleichgewichtsbedingung für Kräfte in der Normalenrichtung lassen sich nach Einführung einer Spannungsfunktion für diese und für die Verwölbung zwei nichtlineare partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung gewinnen, die sich von den üblichen, aus der Voraussetzung der Verzerrungsfreiheit der orthogonalen Linienelemente abgeleiteten Gleichungen nur in einigen Gliedern unterscheiden, die als bekannte Belastungsglieder angenommen werden können. Auf solche Gleichungen lassen sich deshalb alle bekannten Lösungsmethoden anwenden.

(A. S. Vol'mir, Biegsame Platten und Schalen, dies. Zbl. **71**, 183). Am Zahlenbeispiel einer quadratischen Platte wird gezeigt, daß zuweilen im Falle der Anisotropie beachtenswerte Abweichungen auftreten, wenn die Voraussetzung der Verzerrungsfreiheit von orthogonalen Linienelementen durch die erste der eingangs erwähnten Annahmen ersetzt wird. *A. Kuhelj.*

Rakovščik, Ju. A.: Ermittlung der Verschiebungen und Berechnung der statisch unbestimmten Stabsysteme bei Verbiegung jenseits der Elastizitätsgrenze. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* **1957**, Nr. 4, 75—84 (1957) [Russisch].

Eine Methode zur Ermittlung der nichtelastischen Verbiegungen der Stäbe wird angeführt, in welcher die Koordinate längst des Stabes als eine gegebene Funktion des relativen Biegemomentes M/M_T betrachtet wird, wobei M das wirkende Biegemoment, M_T das Biegemoment, bei welchem die größte Spannung die Fließgrenze erreicht, bedeutet. *St. Drobot.*

Seth, B. R.: New solutions for finite deformation. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **45**, 105—112 (1957).

The use of finite components of strain shows that a plate can be bent into a spherical shell if suitable tractions are applied to the inner and outer surfaces and to the plane rim. The corresponding components of displacement have been obtained. (From author's summary.) *V. Bogunović.*

Hill, R.: On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid. III. *J. Mech. Phys. Solids* **5**, 153—161 (1957).

The uniqueness of the actual mode of deformation in a rigid-plastic problem is discussed without restrictions on changes of geometry. It is shown that uniqueness requires the specification of velocities on a part of the surface and of tractions and traction-rates on the remaining surface. *A. M. Freudenthal.*

Kljušnikov (Kliushnikov), V. D.: On a possible manner of establishing the plasticity relations. *PMM J. appl. Math. Mech.* **23**, 405—418 (1959), Übersetzung von *Priklad. Mat. Mech.* **23**, 282—291 (1959).

Verf. versucht, das Stoffgesetz der Plastizitätstheorie axiomatisch zu begründen und postuliert sinngemäß (A) Stetigkeit der Verzerrungen als Funktionale des Belastungsweges; (B) Existenz einer (stetigen oder gar regulären?) Fließfläche durch den Spannungspunkt bei vorgegebenem Belastungsweg, welche die rein elastischen von den elastisch-plastischen Spannungszuständen trennt. (C) Diese Fließfläche ist ein stetiges Funktional des Verzerrungs- bzw. Belastungsweges; ihre Punkte bewegen sich bei zunehmender Belastung auf kürzesten Wegen radial auswärts (?). (D) Falls die Spannungsänderung ΔP_1 in einem Spannungspunkt P_1 sowie das Richtungselement $d\hat{s}_1$ der Fließfläche durch P_1 im 9-dimensionalen Spannungsraum kongruent sind einem entsprechenden System $\Delta P_2, d\hat{s}_2$ in einem zweiten Spannungspunkt P_2 , so sind auch die Systeme $\Delta P_1, d\hat{s}_1, \Delta E_1$ und $\Delta P_2, d\hat{s}_2, \Delta E_2$ (ΔE = Verzerrungsänderung, dargestellt als Vektor im Spannungsraum) kongruent. Unter der Voraussetzung, daß die Spannung sich nur in einem zweidimensionalen Unterraum bewegt, leitet Verf. im wesentlichen ein verallgemeinertes Hencky-Nadaisches Stoffgesetz ab mit einer sehr komplizierten Ergänzung für den Fall singulärer Fließflächen. Die englische Textfassung scheint dem Ref. stellenweise unklar; er konnte den russischen Originaltext mangels Sprachkenntnissen nicht überprüfen. *H. Lippmann.*

Kljušnikov (Kliushnikov), V. D.: New concepts in plasticity and deformation theory. *PMM J. appl. Math. Mech.* **23**, 1030—1042 (1959), Übersetzung von *Priklad. Mat. Mech.* **23**, 722—731 (1959).

Um seine Theorie (vgl. vorstehendes Referat) mit anderen Theorien (a) Abgleit-Theorie von Batdorf and Budiansky [*NACA, Nat. advisory committee aeronautics, Techn. Note* 1871 (April 1949)], vgl. auch Lippmann, [*Ing.-Archiv* **26**, 187—197 (1958)]; (b) Theorie für lineare Belastungswege von Sanders, [*Proc. Second U. S. Nat. Congr. of Appl. Mech.*, 455—460 (1954)], (c) Verfestigungs-

Modelltheorie von Rabotnov [Priklad. Mat. Mech. 23, 164—169 (1959)] zu vergleichen, leitet Verf. diese aus ihren Axiomen für zweidimensionale Belastungswege neu her und findet, daß sie sich alle seiner Theorie (einer verallgemeinerten Hencky-Nadaischen Theorie) unterordnen.

H. Lippmann.

Pelczynski, T.: Über die Mohrsche Spannungshypothese. Wiss. Z. Hochschule Schweremaschinenbau Magdeburg 3, 143—147 (1959).

Nachdem M. T. Huber [Mechanische Rundschau 1949, 295 (1949)] gezeigt hatte, daß die Annahme von Leon, die Einhüllende der Mohrschen Spannungskreise sei eine Parabel, nicht richtig ist und W. Burzyński (Studium über Spannungshypothesen, Lwów 1928) nachgewiesen hatte, daß sie nicht alle Kreise der Grenzzustände umschließt, sind die Zweifel an den Grundlagen der Mohrschen Spannungshypothese nicht mehr verstummt. Verf. zeigt auf Grund eigener Arbeiten, daß die Plastizitäts- und Bruchgrenze durch zwei getrennte Gebiete im Dehnungs-Spannungsdiagramm gekennzeichnet sind.

J. Pretsch.

Eimer, Czesław: The foundations of the theory of creep of statically indeterminate prestressed structures. Rozprawy inż. 5, Nr. 3, 423—457, russ. und engl. Zusammenfassung 457—458 (1957) [Polnisch].

The equations for the analysis of one-dimensional statically indeterminate linear visco-elastic structures with internal prestressing forces and moments are established in a general form under the assumption of linear (Volterra) creep functions. Because of the assumed linearity these equations can be obtained directly by applying the elastic-visco-elastic analogy in a suitable way. No attempt is made to solve the equations.

A. M. Freudenthal.

Rozovskij, M. I.: Nichtlineare Integraloperator-Gleichungen des Kriechens und das Problem der Torsion eines Zylinders bei großen Drillwinkeln. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinostr. 1959, Nr. 5, 109—116 (1959) [Russisch].

The non-linear integral equations of creeping, introduced by Rabotnov [Vestnik Moskovsk. Univ. 1948, Nr. 10, 81—91 (1948)] and the author [Žurn. techn. Fiz. 25, 2339—2355 (1955)] are applied to the problem of torsion of a cylinder with large angles of torsion, as formulated by Išlinskij (this Zbl. 60, 419).

R. Stojanovitch.

Arutjunjan, N. Ch.: Ebene Kontaktaufgabe der Plastizitätstheorie für eine Materialverfestigung nach dem Potenzgesetz. Akad. Nauk Armjan. SSR. Izvestija, Ser. fiz.-mat. Nauk 12, Nr. 2, 77—105 (1959) [Russisch].

Equations of the deformation theory of plasticity are applied to plane strain problem of a half plane loaded by a concentrated force. Loading process (e. g. non-linear elastic problem) is studied for the following octahedral stress-strain relation $\sigma_i = K \varepsilon_i^\mu$ where μ, K are material constants. Material is assumed to be incompressible. Problem is solved in displacements in a standard way. Furthermore, on the basis of the obtained solution the contact problem of two nonlinear elastic bodies is studied. The same stress-strain law is used as that mentioned above. Bodies in contact are bounded by smooth analytic surfaces. Fredholm's singular integral equation of the first kind with the kernel $K(t, x) = |t - x|^{\mu-1}$ is obtained to be the equation of the problem. The integral equation is skilfully solved using a method developed by M. G. Krein (this Zbl. 58, 399; 66, 88) for Fredholm's equations with a kernel $K(t, x) = H(|t - x|)$. Closed form solutions are obtained in terms of Γ -functions of argument μ for symmetric and antisymmetric contact problems. Example of a flat rigid stamp indentation by a concentrated force and by a couple is presented.

A. Sawczuk.

Cox, A. D. and L. W. Morland: Dynamic plastic deformations of simply-supported square plates. J. Mech. Phys. Solids 7, 229—241 (1959).

Ähnlich einer Arbeit von Hopkins (dies. Zbl. 78, 388) werden die Momente M_{xx}, M_{xy}, M_{yy} (kartesisches $x-y$ -System im Plattenmittelpunkt, Richtungen ent-

lang den Diagonalen) mit den Krümmungsgeschwindigkeiten $\dot{\kappa}_{xx}$, $\dot{\kappa}_{xy}$, $\dot{\kappa}_{yy}$ linear gekoppelt. Statt des Trescaschen Fließkriteriums benutzen Verf. jedoch vereinfacht das Kriterium $\max(M_1, M_2) = M_0$ von Johansen (M_1, M_2 : Hauptmomente; M_0 = kritisches Moment $= \sigma_0 h^2$, wo h = halbe Plattendicke, σ_0 = Formänderungsfestigkeit). Elastische Verformung wird vernachlässigt, M_0 konstant angenommen. Belastung während vorgegebener Zeitdauer τ durch gleichmäßigen konstanten Druck p , der zur Zeit $t = \tau$ plötzlich entfernt wird. Das Problem wird durch Vorgabe von Geschwindigkeitsfeldern gelöst; in den auftretenden starren Bereichen werden die Momente erraten. Fall I („mittlere Last“): Verformung nur längs der Diagonalen, alle anderen Plattenbereiche seien starr. Es ergibt sich $p \geq p_0$; p_0 = kritischer Druck $= 6 M_0 / L^2$ (L = Seitenlänge der Platte). Für $p \geq 2 p_0$ kann das Fließkriterium nicht mehr erfüllt werden, daher $p_0 \leq p \leq 2 p_0$. Wird zur Zeit τ die Last entfernt, so verformt sich die Platte durch ihre kinetische Energie bis zur Zeit $T = p \tau / p_0$ weiter. Fall II („große Last“; $p > 2 p_0$): Die Diagonalen sowie die Begrenzungslinien eines konzentrischen Quadrates (Seitenlänge $\theta \cdot L$) bilden Unstetigkeitslinien der Normalableitung der Durchsenkgeschwindigkeit. Das innere Quadrat bleibt starr, der äußere Restbereich verformt sich wie unter I. Für $0 \leq t \leq \tau$ gilt $\theta = \theta_0 = \text{const}$; für $\tau \leq t \leq T_1$ ($= p \tau / 2 p_0$) schrumpft das innere Quadrat auf den Mittelpunkt zusammen, für $T_1 \leq t \leq 2 T_1$ Verformung entsprechend Fall I. Die Ergebnisse werden für den Fall der Stoßbelastung ($\tau > 0$; $p \tau \rightarrow I \neq 0$) umformuliert. Ein Lösungsweg für allgemeiner geformte Platten (reguläre Polygone) wird skizziert. Die benutzten Geschwindigkeitsfelder sind offenbar auf kleine Formänderungen beschränkt (Gültigkeit von 1. Ordnung). Deshalb scheint dem Ref. die Vernachlässigung des elastischen Anteils problematisch.

H. Lippmann.

Kačanov, L. M.: Über die plastische Verbiegung krummer dünnwandiger Rohre. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 5, 42—47 (1957) [Russisch].

This is a theoretical investigation of the plastic bending of thin-walled curved tubes with circular cross-section. A material with hardening properties described by a parabolic relation between the intensities of strain and stress is assumed. Because of mathematical difficulties the solution is given for the exponents of the parabola 1, 3, 5 only. The law of minimum complementary energy is used. The solution shows that the coefficient of flexibility increases rapidly with the exponent of the parabola. In the final part of the paper the limit load of the tube is considered, rigid-plastic material being assumed. Statically admissible stress-field is the only considered. The limit bending moment is much lower for a curved tube than for a straight one. For example, for the tube of 20 cm, dia, 1 cm wall-thickness and 25 cm radius of curvature: $M_{pl} = 0,56 M_0$, where M_0 — the limit moment for the straight tube.

W. Szczepiński.

Lianis, G. and H. Ford: Plastic yielding of single notched bars due to bending. J. Mech. Phys. Solids 7, 1—21 (1958).

Für einseitig gekerbte Stäbe unter reiner Biegebeanspruchung wird im plastisierten Bereich mit Hilfe geeigneter Gleitlinien-Netze der sogenannte “constraint factor” ermittelt, der als Verhältnis des plastischen Biegemoments des gekerbten Stabes zum plastischen Biegemoment eines ungekerbten Stabes definiert wird, wobei dessen Querschnitt mit dem engsten Querschnitt des Kerbstabes übereinstimmt. Es wird ebene Formänderung vorausgesetzt.

H. Neuber.

Madejski, Jan: Work hardening, elastic after-effect and residual stresses in aspect of the dynamical theory of plasticity. Rozprawy inż. 5, Nr. 4, 457—477, russ. und engl. Zusammenfassung 477—478 (1957) [Polnisch].

One-dimensional equations are established for a material made up of a “honeycomb” consisting of a skeleton structure of Maxwell or Bingham behavior (called “dynamic plastic” for some unknown reason) enclosing hypo-elastic domains, both phases deforming jointly. It is assumed, moreover, that the relative volume of the

two phases may be changed during the deformation as a result of heat transfer processes caused by heat-development due to inelastic deformation. It is hardly surprising that for a material model of this complexity the attempted analysis is completely confusing.

A. M. Freudenthal.

Mikeladze, M. Š.: Allgemeine Theorie der anisotropen starr-plastischen Schalen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 1, 85—94 (1957) [Russisch].

This paper deals with general equations and limit state of anisotropic rigid-plastic shells. The essential assumptions of this paper are: (a) the shell is of ideal-sandwich type (i. e., two very thin facings are separated by the core which resists only shearing stresses); (b) the facings are of an orthotropic rigid-plastic material. The author derives the yield condition in terms of internal forces and moments, and the flow rule based on the assumption of the existence of a plastic potential. Assuming proportional loading, the author shows that the limit load is equal to the smallest kinematically admissible load and to the largest statically admissible load. The paper is well written.

M. P. Bieniek.

Proksa, F.: Plastisches Blechbiegen bei Berücksichtigung der Kaltverfestigung. *Z. angew. Math. Mech.* 38, 299—301 (1958).

Rabotnov, Ju. N.: Über einige Möglichkeiten der Beschreibung des instationären Kriechens mit Anwendung auf die Untersuchung des Kriechens von Rotoren. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 5, 30—41 (1957) [Russisch].

The author considers some aspects of the phenomenological theory of the non-stationary creeping of metals, subjected to the actions of heat and high temperatures. In particular, the influence and the effect of high stresses is taken into account. In section 1, the author introduces a hypothesis on the relation between the magnitude of the plastic deformation p , the rate of the plastic deformation \dot{p} , the stress σ , and the temperature T . After choosing the form of the equation for this relation and solving it, the result expresses the functional relation between the stress and the time $\sigma(t)$. This is some sort of a monotonic decreasing function with increasing time. The author discusses this relation for various metals. In section 2, the author goes into the discussion of some details: the functional form of the stress itself; the dependence of the stress upon the time (sinusoidal curve); the explicit form of the deformation as a function of the time and stress. In section 3, the author discusses in detail the obtained expression for the deformation arriving at the conclusion that the chosen forms do not take into account some secondary effects. In particular, the influence of these effects upon the behavior of copper is presented in details with the aid of a diagram. In section 4, the author discusses more thoroughly the rate of the deformation tensor. A component of this is chosen in the sense of that of von Mises as a partial derivative of a function f with respect to the stress tensor component. The function f depends upon the tensor σ_{ij} , and upon the plastic deformation tensor. Various forms of this relation are discussed, with the use of Saint Venant-von Mises results and a new formula for the rate of the deformation is constructed, which is used in the place of the previously derived relation. Section 5 is devoted to the discussion on certain deficiencies of the obtained expression for the deformation rate. In section 6, the author applies the theoretical tool, given above, to a brief example of bending of a beam and in sections 7 and 8 to the turbine disc. Three subcases are considered, depending upon the kind of deformation: radial, tangential, etc. The formulas derived are kept in general forms without going into numerical calculations. An additional brief calculation example is given in section 9, which closes the paper.

M. Z. v. Krzywoblocki.

Rozenbljum, V. I.: Entwurf des T-förmigen Schwanzes einer Turbinenschaufel nach dem Prinzip der Grenzbelastungen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk* 1957, Nr. 5, 122—126 (1957) [Russisch].

Angenäherte Ermittlung der plastischen Spannungen in dem Befestigungsteil der Turbinenschaufel. *St. Drobot.*

Symonds, P. S. and T. J. Mentel: Impulsive loading of plastic beams with axial constraints. *J. Mech. Phys. Solids* 6, 186—202 (1958).

Es werden Stäbe untersucht, die an beiden Enden gestützt oder eingespannt sind, wobei jedoch Axialverschiebungen verhindert sind. Die äußere Stoßbelastung ist über den Träger gleichmäßig verteilt. Mittels der starr-plastischen Methode werden Durchbiegungsformeln und -diagramme gewonnen, welche die Bedeutung der Einflußgrößen klar erkennen lassen. *H. Neuber.*

Talypov, G. B.: Deformationen und Spannungen in Punkten eines Blechs, die durch heißes Geraderichten entstehen. *Leningradsk. Gosudarst. Univ., učenyje Zapiski* Nr. 217, mat.-mech. Fak., Ser. mat. Nauk Nr. 31, 272—287 (1957) [Russisch].

Die Spannungen und plastische Deformationen, welche in einer punktwise erwärmten und dann abgekühlten Metallplatte entstehen, werden theoretisch und experimentell untersucht. *St. Drobot.*

Zawadzki, Jerzy: Reduced pressure as a strength parameter (the increase of unit free energy as a measure of effective stress). *Rozprawy inż.* 5, Nr. 3, 359—396, russ. und engl. Zusammenfassung 396—398 (1957) [Polnisch].

A generalized von Mises plasticity condition $J_2 = f(J_1)$, where J_2 is the second invariant of the stress-deviation and J_1 the first invariant of the stress tensor is proposed as a "general" strength theory on the basis of a multitude of arguments based on relevant and irrelevant concepts of (incompletely digested) solid state theory. A function $f(J_1)$ of the form $f(J_1) = A - B J_1 - C J_1^2$ is the final result of the exhaustive and exhausting deliberations. The implications of this form $f(J_1)$ are then examined for simple states of stress. *A. M. Freudenthal.*

Babaev, N. N.: Über die Schwingungen ebener Balkenüberdeckungen unter Berücksichtigung der nichtelastischen Widerstandskräfte. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd., techn. Nauk* 1957, Nr. 5, 110—113 (1957) [Russisch].

The author investigates the problem of forced vibrations of elastic bodies making into consideration the influence of nonelastic resistance, namely, the vibrations of the roost with n transverse beams with one axial stringer, when the vibrations of the stringer are governed by means of the partial differential equation

$$\mathfrak{B}_1 \eta_{xxxx} + m_1 \ddot{y} + R = H \cos \omega t; \quad \eta = y + \varepsilon_1 \dot{y}.$$

Here are: m_1 the mass of the stringer, $\mathfrak{B}_1 = E I_1$ the flexural rigidity, $R(y, \dot{y})$ the resistance force and $H \cos \omega t$ the perturbing force. It is supposed that the reaction in one joint between the transverse beam and stringer is $Q = Q_0 \cos \omega t$, then is $R = n Q/L_1$ and the displacement of the joint is $y = Q_0(f_1 \cos \omega t + f_2 \sin \omega t)$ where f_i , $i = 1, 2$, are the known functions of the frequency. These functions can be determined from the boundary conditions on the edges of the transverse beams. The solution is given in the form of the series of the eigenfunctions of the free vibrations of beams without damping. The perturbing force is also explained by means of the series of the same eigenfunctions. *D. Raškovič.*

Chajkovič, I. M.: Fortpflanzung der Schwingungen im Relaxationsmedium. *Trudy Inst. Fiz. Zemli* Nr. 2 (169), 145—178 (1959) [Russisch].

In this paper the author determines the quantitative reparations of the formulae of the expansion of seismic waves in the semispace with free boundaries under the action of the impulsive axisymmetric load. Introducing the scalar and vector potential Maxwell's equations for three-dimensional space are conformed supposing that the time of the relaxation is given as one exponential function on the tension and temperature. Further, one treats the dynamical problem of isotropic semispace with the condition that in the interval $t < 0$ is in peace and in the moment $t = 0$ acts on the free boundary a normal axisymmetric force depending on time. The solu-

tion is supposed in form of Fourier-Bessel's integrals. Because of great mathematical difficulties one treats only the case when the material is very near to the ideal elastic media, dividing the field of the displacements in three parts: statical, Rayleigh's and compound describing the expansion of axial and transverse waves. In the second part of the paper one treats the problem of an elastic layer ($-H \leq z \leq 0$) in the semi-space ($z \geq 0$) when in $t < 0$ is in peace and in the moment $t = 0$ acts on the free boundary ($z = -H$) the perturbing force.

D. Rašković.

Kobrinskij, A. E.: Zur Theorie der stoßweise wirkenden Schwingungsdämpfung. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 5, 15—29 (1957) [Russisch].

Es werden Eigen- und erzwungene Schwingungen eines elastischen Systems mit einer stoßweise wirkenden Schwingungsdämpfung untersucht, indem diejenigen periodischen Bewegungen analysiert werden, bei welchen während einer Periode der Eigenschwingung oder der der erzwingenden Kraft zwei Stöße des gedämpften Systems und des Elementes der Schwingungsdämpfung ausgeübt werden. Die Ausführungen werden mit den Ergebnissen der Experimente verglichen. St. Drobot.

Sacharov, I. E.: Über die erzwungenen Schwingungen der Statoren elektrischer Wechselstrommaschinen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 11, 167—169 (1957) [Russisch].

Verf. befaßt sich mit der Lösung der durch das Magnetfeld erregten Schwingungen des Stromerzeugerstators, der durch einen dünnen Kreisring von konstantem Querschnitt schematisch dargestellt wird. Dabei wird vorausgesetzt, daß die zeitlich veränderliche Induktion im Spalt durch eine einzige harmonische Komponente ersetzt werden kann und daß die äußere Dämpfung der Geschwindigkeit der Querauslenkung proportional ist. Außerdem gilt die Voraussetzung, daß die innere Dämpfung der Deformation proportional, jedoch von der Schwingungsfrequenz völlig unabhängig ist. Unter diesen Voraussetzungen leitet der Verf. für die Querschwingungen folgende Gleichung ab:

$$\frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\mu}{\Omega} \left(\frac{\partial^7 u}{\partial \theta^6 \partial t} + 2 \frac{\partial^5 u}{\partial \theta^4 \partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^2 \partial t} \right) + \frac{2bR^4}{EI} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^2 \partial t} + m \frac{R^4}{EI} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u \right) = - \frac{PR^3}{EI} \frac{4p^3}{\pi} \cos 2p(\omega t - \theta).$$

u ist dabei die durch den Lagewinkel θ bestimmte Querauslenkung des Schnittes, b und μ sind Koeffizienten der äußeren und inneren Dämpfung, Ω die Schwingungsfrequenz, E der Biegeungselastizitätsmodul, I das Trägheitsmoment des Schnittes, m die Statormasse, ω die Winkelgeschwindigkeit der Feldrotation, p die Zahl der Polpaare, P die resultierende magnetische Zugkraft, $\frac{1}{2} p$ die Kreisringteile, und R ist der mittlere Halbmesser. Die Lösung wird in der folgenden Form gesucht:

$$u = \alpha \cos 2p(\omega t - \theta) + \beta \sin 2p(\omega t - \theta). \quad A. Tondl.$$

Apfelbeck, Alois: Mathematische Theorie der Torsions- und Biegungsschwingungen anisotroper Stäbe. Czechosl. math. J. 7 (82), 374—411, russ. Zusammenfassung 411—412 (1957).

Behandelt wird das System

$$\partial^2 v / \partial t^2 = \alpha \partial^4 v / \partial x^4 + \beta \partial^3 n / \partial x^3, \quad \partial^2 n / \partial t^2 = \gamma \partial^3 v / \partial x^3 + \delta \partial^2 n / \partial x^2$$

mit den Anfangsbedingungen $v(x, 0) = \varphi(x)$, $n(x, 0) = \mu(x)$, $\partial v(x, 0) / \partial t = \psi(x)$, $\partial n(x, 0) / \partial t = \nu(x)$ und den Randbedingungen

$$\alpha \partial^3 v / \partial x^3 + \beta \partial^2 n / \partial x^2 = 0, \quad \partial^2 v / \partial x^2 = \partial n / \partial x = 0$$

für $x = 0$ und $x = l$. Wenn die reellen Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Ungleichungen $\alpha > 0, \delta < 0, \beta \gamma < 0, \Delta = \alpha \delta - \beta \gamma < 0$ genügen und Stetigkeit aller vorkommenden Ableitungen vorausgesetzt wird, dann führt die Betrachtung des Integrals

$$F(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)^2 - \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^2 - \frac{\alpha \gamma}{\beta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial n}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

zu einem Eindeigkeitsatz für reelle Anfangswerte. Da für die Lösung eine Reihen-

entwicklung nach Eigenfunktionen angestrebt wird, so wird zunächst das homogene Problem ($\varphi = \psi = \mu = \nu = 0$) durch einen Separationsansatz auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt, wonach an Kamkes Untersuchungen (dies. Zbl. 22, 142, I, II, III, 344, 345) angeknüpft werden kann. Ist $(M(x), N(x))$ ein Randpaar, d. h. ein nicht triviales Lösungspaar des homogenen Problems mit $M^{(7)}(x)$ und $N^{(6)}(x)$ stetig in $[0, l]$, so können die Eigenwerte λ wie üblich durch einen Rayleighschen Quotienten

$$R[M, N] = - \int_0^l (\alpha \gamma M''^2 + 2\beta \gamma M'' N' + \beta \delta N'^2) dx \bigg/ \int_0^l (\gamma M^2 - \beta N^2) dx$$

charakterisiert werden. Sie sind reell, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$;

zu jedem positiven λ gehören höchstens zwei Eigen(funktionen)paare $(V(x), N(x))$, die orthogonal im Sinne

$$\int_0^l (\gamma V_i V_j - \beta N_i N_j) dx = 0 \quad i \neq j$$

gewählt werden können. Ein Vollständigkeitstheorem sichert die Entwickelbarkeit der Randpaare nach Eigenpaaren, aber das Problem als solches kann nicht als gelöst betrachtet werden, da die Existenz der Lösung nicht nachgewiesen wurde bzw. die Konvergenz und Differenzierbarkeit der auftretenden Entwicklungen sowie die Bedingungen für φ, ψ, μ, ν , für die die zu fordernde Differenzierbarkeit gesichert ist, nicht untersucht wurden.

F. Selig.

Babaev, N. N.: Über den Einfluß der Kräfte des inneren nichtelastischen Widerstands auf die Form der erzwungenen Transversalschwingungen von Stäben. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 7, 125—129 (1957) [Russisch].

The problem discussed in this paper reduces to the investigation of bending vibration of a prismatic beam of a dissipative material of Kelvin-Voigt type. The author draws some conclusions for the vibration analysis of ships. *M. P. Bieniek.*

Džubek, Jozef: Die Stabilität eines dünnwandigen abwechselnd in zwei Ebenen gestützten Stabes. Rozprawy Českosl. Akad. Věd, Ř. techn. Věd. 69, Nr. 6, 1—29, russ. und deutsche Zusammenfassung 30—33 (1959) [Slowakisch].

Stability of a *L*-shape cross-section continuous beam, simply supported in two perpendicular planes is studied under an axial load. Standard methods of the structural mechanics are used to obtain a set of equations involving rotations and moments at the supports and axial displacements. Eigen-value condition is used to obtain the critical (Euler) load equation from the obtained set. A method of numerical solution of the stability equation is discussed. For engineering calculations the critical load values are tabularized depending upon the number of spans of the beam and dimensions of its cross-section.

A. Sawczuk.

Gopak, K. N. und S. G. Krivošeeva: Biegetorsionsschwingungen und Stabilität der ebenen Form der Verbiegung eines flachen Konsolträgers. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinostr. 1959, Nr. 4, 160—162 (1959) [Russisch].

The authors consider in this paper the dynamical stability of the plane form of the bending of a thin prismatical ($\delta h L$) cantilevered beam ($\delta/h \ll 1$) which is subjected to the pure bending in the plane of the greatest flexural rigidity of the bending moment which acts at the free end of the beam the vector of which lies in the cross section making the angle $\frac{1}{2}\pi + (1-\lambda)\varphi$, $0 \leq \lambda \leq 1$, with the main axis of inertia of this section; this axis makes the angle φ with vertical one. The equations of the deformations $\mathfrak{B}_1 u_{zz} = M_\eta$, $\mathfrak{B}_2 v_{zz} = -M_\xi$, $\mathfrak{T} \beta_z = M_\xi$ are established. Here are \mathfrak{B}_i , $i = 1, 2$, the flexural rigidities of the beam, \mathfrak{T} the torsional rigidity, u, v the displacements of the centre of some cross section and β_z the torsional angle reduced to the unity of the length of the beam. Neglecting the members

with the small quantities of the second order the following governed equation is deduced $\beta_{zz} + M^2 \mathfrak{B}_1^{-1} \mathfrak{Z}^{-1} = M^2 \mathfrak{B}_1^{-1} \mathfrak{Z}^{-1} \lambda \varphi$, $M_\xi = M$, $M_2 = M(-\beta + \lambda \varphi)$, $M_\xi = M[u_z - (u_z)_z = L]$ with boundary conditions, $\beta = 0$ for $z = 0$ and $\beta = \varphi$, $\beta_z = 0$ for $z = L$. The transcendental characteristic equation is obtained with real roots for $\lambda \leq 0,5$. For $\lambda = 1$ the critical moment and frequency are determined and calculated for steel beam with $\delta/h \leq 0,1$, $h/L \leq 0,05$. D. Rašković.

Piszczek, Kazimierz: The influence of the curvature of an originally curved bar on the resonance regions of plane form of bending. Arch. Mech. stosow. 9, 155—188, russ. Zusammenfassung 188—189 (1957).

Die Arbeit befaßt sich mit dynamischen Untersuchungen von Kreisbogenträgern unter der Wirkung von Randmomenten. Von den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen des gekrümmten Stabes ausgehend, werden ausführlich Biege- und Drill-schwingungen am Balken auf zwei Stützen und am beiderseitig eingespannten Träger behandelt. Mit Hilfe der Galerkinschen Methode sind Beziehungen zum statischen Stabilitätsverhalten derartiger Tragwerke hergestellt. G. Kämmerl.

Strunkin, V. A.: Zur Berechnung der axialen Schwingungen der Scheiben von Axialturbinen und -kompressoren. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1958, Nr. 11, 100—102 (1958) [Russisch].

Verf. befaßt sich mit der Ermittlung der Eigenfrequenz axialer Schwingungen der Scheiben von Axialturbinen und -kompressoren. Er setzt eine Abhängigkeit der Durchbiegung des Scheibenelements

$y = a(x-1)(x^s-1)/y_1$, $y_1 = (x_1-1)(x_1^s-1)$, $x = r/R_0$, $x_1 = R_1/R_0$ voraus; a ist dabei ein Koeffizient, s ein Parameter, der im weiteren aus dem Frequenzminimum ermittelt wird, r ist Halbmesser des kreisrunden Elementes und R_1, R_0 sind der äußere und der innere Halbmesser der Scheibe. Mit dem erwähnten Ansatz soll dem Verf. die praktische Berechnung bedeutend erleichtert werden. Im weiteren werden dann die Ausdrücke für das Potential und die kinetische Energie gestaltet: durch Aufteilung von Scheiben mit kreisrunden Schnitten kann er die Integrale durch Summen ersetzen. Nach dieser Umformung ergeben sich Funktionen, deren Koeffizienten im voraus tabelliert werden können. Die Eigenfrequenz wird dann an Hand des Ritzschen Verfahrens bestimmt. A. Tondl.

Poznjak, É. L.: Über die Stabilität von Wellen jenseits der kritischen Rotationsgeschwindigkeiten. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 5, 104—107 (1957) [Russisch].

Der Artikel des Verfassers ist im wesentlichen eine kritische Bewertung der theoretischen Arbeiten über das Problem des Einflusses der inneren Werkstoffdämpfung auf die Stabilität der Rotorbewegung. Verf. teilt diese theoretischen Arbeiten in zwei große Gruppen auf. Die erste Autorengruppe setzt voraus, die Werkstoffdämpfung sei der Verformungsgeschwindigkeit proportional, die zweite behauptet, der Energieverlust in einem Zyklus hänge nicht von der Schwingungsfrequenz ab, sondern er sei Funktion der Verformungsamplitude. Im weiteren analysiert der Verf. die Ungenauigkeiten und Fehler einiger Arbeiten der zweiten Gruppe, wo man ein energetisches Kriterium anstatt von Variationsgleichungen zur Lösung der Bewegungsstabilität verwendet. Zum Schluß weist der Verf. mit Recht darauf hin, man brauche zwecks Erläuterung einiger Widersprüche zwischen der Theorie und dem Experiment nur die Ausgangshypothese genauer zu formulieren und bei der Lösung von der Untersuchung der Stabilität „im kleinen“ (mit Hilfe der Differentialgleichungen für die Variationen) auf die Untersuchung der Stabilität „im großen“, d. i. auf die nichtlinearen Differentialgleichungen, überzugehen. A. Tondl.

Tâche, J.: Calcul de la vitesse critique d'un arbre par intégrations numériques. Bull. techn. Suisse Romande 83, 81—86 (1957).

Es ist bekannt, daß die Ermittlung der kritischen Drehzahlen rasch umlaufender Wellen auf analytischem Wege selbst bei wenigen Feldern, die durch Lasten, Stützen

und Unstetigkeiten der Querschnitte bedingt sind, beträchtliche Schwierigkeiten bereitet. Früher suchte man daher die kritischen Drehzahlen mehrfeldriger Wellen auf graphischem Wege zu bestimmen, wobei man allerdings die dabei unvermeidlichen Ungenauigkeiten in Kauf nehmen mußte. Verf. unterzieht sich deshalb der dankbaren Aufgabe, ein analytisches Verfahren unter Ausnutzung der gebräuchlichen Rechenmaschinen auch für mehrfeldrige Wellen zu entwickeln, dem eigentlich nur zwei elementare Formeln zugrunde lagen, die die Verdrehung Ω und Durchsenkung Y an einer Stelle $i + 1$ aus den analogen Größen an einer Stelle i und aus elementaren Zusatzgliedern bestimmen lassen, die im wesentlichen vom Einfluß einer weiteren um b von der Stelle i entfernten Last P herrühren. Diese lauten:

$$\Omega_{i+1} = \Omega_i + P (bl/I + \frac{1}{2} l^2/I); \quad Y_{i+1} = Y_i + \Omega_i l + P (\frac{1}{2} b l^2/I + \frac{1}{3} l^3/I).$$

Hierin bedeutet l bzw. I Länge bzw. Trägheitsmoment des zwischen den Stellen i und $i + 1$ gelegenen Wellenstückes konstanten Querschnittes. Bei Berechnung dieser Werte Ω_{i+1} , Y_{i+1} wird die bekannte Eigenschaft der Rechenmaschinen mit großem Vorteil ausgenutzt, die Summen verschiedener Produkte zusammenlaufen zu lassen, wobei dann jeweils nur die Werte einer Feldgrenze notiert zu werden brauchen. Bei einem bestimmten Beispiele geht man von einer mittleren Feldgrenze aus, womöglich von einem Lager, um dessen Durchsenkung gleich zu Beginn der Rechnung auszuscalen, und rechnet nach beiden Seiten bis zum Ende der Welle. Dabei entwickelt man die Zahlentafeln nach beiden Seiten unter Ausnutzung der in den oben angegebenen Formeln vorher berechneten Zahlenwerte l/I usw. für alle Felder. Das vom Verf. durchgerechnete Beispiel enthält 10 Felder, neben dem Mittellager $m = 5$ ($Y_m = Y_5 = 0$) noch 2 weitere Endlager 0 und 10 ($Y_0 = Y_{10} = 0$) und zwei eingeprägte Kräfte P_3 und P_8 . Die drei statischen Gleichungen (Verschwinden der Durchsenkungen Y_0 und Y_{10} und Verschwinden der Momente um die Ausgangsstelle 5) ergeben P_0 und P_{10} , sowie die Anfangsverdrehung Ω_5 , ausgedrückt durch die eingeprägte Kräfte P_3 und P_8 , während man die Durchbiegungen Y_3 und Y_8 zunächst durch die Integrationsstafeln und dann nach Ersatz der Größen P_0 , P_{10} und Ω_5 durch P_3 und P_8 dargestellt erhält, wobei man zugleich eine wertvolle Kontrolle gewinnt. Einfache und übersichtliche Formeln, die für 1, 2 oder 3 Lasten explizit angegeben sind, lassen dann leicht die beiden kritischen Drehzahlen und die Verhältnisse der Biegungspfeile Y_8/Y_3 für dieselben ermitteln. Auch die Abänderung des Verfahrens für den Fall einer nicht verschwindenden Auslenkung der mittleren Feldgrenze $Y_m \neq 0$ wird erläutert. Die Methode, die wegen ihrer Gründung auf den erwähnten Eigenschaften der Rechenmaschinen in analytischer Hinsicht die Vorteile rascher Durchrechnung und großer Genauigkeit vereint, wird voraussichtlich auch bei anderen Eigenwertaufgaben, wie bei solchen statischer Stabilität oder bei Schwingungsproblemen ihren großen Nutzen erweisen können.

K. Karas.

Filippov, A. F.: A three-dimensional problem of diffraction of an elastic wave at a sharp edge. PMM J. appl. Math. Mech. 23, 989—996 (1959), Übersetzung von Priklad. Math. Mech. 23, 691—696 (1959).

Viene risolto il problema della diffrazione subita da una onda piana in un mezzo isotropo illimitato a causa del taglio di un semipiano. L'onda incidente è supposta obliqua, e, il problema essendo lineare, la ricerca viene limitata a onde semplici e spezzata in quella di onde di dilatazione e di torsione. L'uso di variabili complesse agevola il raggiungimento dello scopo.

T. Manacorda.

• Dovnorovič, V. I.: Räumliche Kontaktaufgaben der Elastizitätstheorie. [Prostranstvennye kontaktnye zadachi teorii uprugosti]. Minsk: Verlag der Staatlichen belorussischen V. I. Lenin-Universität 1959. 107 S. R. 6,65 [Russisch].

Ausgangspunkt bildet die Darstellung des elastischen Verschiebungs- und Spannungszustandes im Halbraum durch eine harmonische Funktion V (vgl. L. A. Galin, Aufgaben über die Pressung in der Elastizitätstheorie, Moskau 1953), die nicht

langsamer als $1/R$ abnimmt für $R \rightarrow \infty$, die auf der in der Ebene $z = 0$ gelegenen Berührungsfläche S den Wert $V(x, y, 0) = \alpha x + \beta y + b - \varphi(x, y)$ annimmt, wobei $\alpha x + \beta y + b$ die starre Verschiebung des Stempels in den Halbraum ist und $z - \varphi(x, y)$ die Gleichung der Unterfläche des Stempels (zu dieser Randbedingung wird verwiesen auf L. A. Lur'e, Räumliche Aufgaben der Elastizitätstheorie Moskau 1955, S. 252), während außerhalb S auf der Ebene $z = 0$ gilt $\partial V / \partial z = 0$; wirkt die auf den starren Stempel bzw. Preßkörper wirkende Kraft Q längs der Geraden $x = \xi$, $y = \eta$, so sind α, β, b bestimmt durch

$$Q = - \iint_S \sigma_z dx dy, \quad \xi Q = - \iint_S x \sigma_z dx dy, \quad \eta Q = - \iint_S y \sigma_z dx dy.$$

Kapitel I: Stempel elliptischen Querschnittes. Bei elliptischer Berührungsfläche S erhält man nach Einführung von elliptischen Koordinaten für V sowohl innerhalb wie außerhalb S eine Entwicklung nach Lamé-Funktionen. Die Darstellung der Normalspannung σ_z durch eine Dichte $\gamma(x, y)$ gemäß $\sigma_z = -2mG\gamma(x, y)/(m-1)$ mit $\varepsilon V_i / \partial n - \partial V_a / \partial n = 4\pi\gamma$, wo V_i bzw. V_a die Werte von V innen und außen sind, liefert für die Dichte eine Entwicklung nach Lamé-Funktionen, die mit dem auf dem Rand von S nach Unendlich gehenden Faktor

$$[1 - x^2/(c^2 - a^2) - y^2/(c^2 - b^2)]^{-1}$$

multipliziert ist. Wenn die Unterfläche des Stempels durch ein Polynom in x und y gegeben wird, kann man in der Dichte die Entwicklung nach Lamé-Funktionen durch ein Polynom ersetzen; stellt man die harmonische Funktion $V(x, y, 0)$ durch ein Integral über die Dichte dar, so liefert die entstehende Integralgleichung ein endliches System von linearen Gleichungen für die Koeffizienten des Polynoms. Als Beispiel wird der Stempel elliptischen Querschnittes mit einer parabolischen Unterfläche behandelt und der kreisförmige Stempel, wobei in dem Polynom für die Unterfläche bis zu den Produkten $x^i y^k$ mit $i + k = 4$ fortgeschritten wird. — Es wird auch eine auf dem Rand von S verschwindende Lösung für σ_z ermittelt, indem für die Dichte eine Darstellung angesetzt wird, bei der der Faktor $[1 - x^2/(c^2 - a^2) - y^2/(c^2 - b^2)]^{1/2}$ im Zähler steht und dafür die Dimension des Polynoms in x und y um 2 erniedrigt wird, jedoch können dann die Koeffizienten der Gleichung für die Stempelunterfläche sowie der Angriffspunkt (x_0, y_0) der Kraft Q nicht mehr beliebig gewählt werden, sondern werden passend bestimmt. [Dem Ref. scheint fraglich, ob diese auf dem Rand von S verschwindende Lösung für σ_z in der Praxis von besonderer Bedeutung ist, da dann, wenn eine für das Eintreten von Plastizität verantwortliche maximale Schubspannung auf dem Rand von S singular wird durch eine Singularität von σ_z , aus der physikalischen Anschauung diese Singularität der maximalen Schubspannung auch zu erwarten ist in den speziellen Fällen, in denen σ_z auf dem Rand von S verschwindet]. — Bei kreisförmigem Stempel wird noch eine Berechnung mit einer von V. J. Mossakovskij [Naučnye Zapiski J. M. A., Akad. Nauk SSSR, T. II, V. 1, (1953)] angegebenen Darstellung von σ_z vorgenommen. — Die Darstellung von σ_z mit einer Dichte erlaubt dann, wenn die Unterfläche des Stempels gegeben wird durch $b_1 \varrho^2 + \dots + b_k \varrho^{2k} + x(e_2 \varrho^2 + \dots + e_n \varrho^{2n-2}) + y(d_2 \varrho^2 + \dots + d_s \varrho^{2s-2})$ mit $\varrho^2 = x^2 + y^2$, die Spannung σ_z in der Form darzustellen

$$\sigma_z = - \frac{2\pi m G}{1/a^2 - \varrho^2} [c + c_1 \varrho^2 + \dots + c_k \varrho^{2k} + x(a_0 + \dots + a_{n-1} \varrho^{2n-2}) + y(f_0 + \dots + f_{s-1} \varrho^{2s-2})].$$

Die Bestimmung der Koeffizienten c_i, a_i, f_i erfolgt mit Hilfe einer von Galin (vgl. oben) angegebenen Integraldarstellung einer Funktion $q(x, y, z)$, die σ_z in der Form $mGq(x, y, 0)$ ($m-1$) darstellt. **Kapitel II: Stempel komplizierteren Querschnittes.** Zu den oben angegebenen Randbedingungen für die harmonische Funktion V kommen hier als Bedingungen für die Kontur L des Gebietes S : 1. in jedem Punkt von L

existiert eine eindeutige Normalebene; 2. der spitze Winkel θ zwischen der Normalebene zweier beliebiger Punkte von L erfüllt die Ungleichung $\theta < \alpha r$, wo r der Abstand beider Punkte ist und α eine Konstante; 3. eine zur Normalebene eines Punktes A von L parallele Ebene schneidet den Teil von L , der in einer Kugel mit dem Mittelpunkt A gelegen ist, nicht mehr als einmal, wobei der Kugelradius eine endliche und für alle A gleiche Zahl ist, und die genannte Parallelebene auch einen solchen Teil von L wirklich schneidet, wenn der Abstand beider paralleler Ebenen hinreichend klein ist; ferner soll keine Schubspannung zwischen Stempel und Halbebene auftreten. Die Aufgabe wird auf eine Integralgleichung zurückgeführt mit einem Satz von Zaremba [Uspechi mat. Nauk, n. Ser. 1 No. 3—4 (13—14), 125—146 (1946)] über die Darstellbarkeit der gesuchten harmonischen Funktion durch eine eindeutig bestimmte Dichte einer einfachen Schicht. Es wird gezeigt, daß unter der Bedingung

$$|\Delta\varphi(x, y)| < A/R^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \quad (x_0, y_0) \in S$$

die Spannung σ_z auf L verschwindet; weiterhin wird ein Beispiel für gegen Unendlich strebendes σ_z gegeben. Für den erstgenannten Fall wird bei kreisförmigem Stempelschnitt nach Eigenfunktionen entwickelt, von denen die 6 ersten mit dem Ritzschen Verfahren als Linearkombinationen der orthonormierten Potenzen 1, x , y , xy , x^2 , y^2 bestimmt werden.

H. Schlechtweg.

Mossakovskij, V. I., O. P. Makarevič und Z. Z. Rudjakov: Über die Abhängigkeit des Adhäsionskoeffizienten von der Rollgeschwindigkeit. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 5, 126—129 (1957) [Russisch].

Verff. lösen das Problem des Rollens einer Scheibe auf elastischer Unterlage (einer Halbebene), wobei der Einfluß der Rollgeschwindigkeit auf den Adhäsionskoeffizienten bestimmt wird. Verff. setzen dabei voraus, es existiere eine lineare Abhängigkeit zwischen dem Reibungskoeffizienten und der relativen Geschwindigkeit der Punkte der Berührungsfläche, und die Länge der Berührungszone sei gering im Vergleich mit den Abmessungen der sich berührenden Teile. Die Elastizitätskonstanten der Unterlage und der Scheibe sind identisch. Auf Grund der kinematischen Beziehungen und der bekannten Lösung der Halbebene in einer komplexen Form (s. näher N. I. Muschelišvili, Einige Grundprobleme der mathematischen Elastizitätstheorie, Moskau 1949) bestimmen Verff. die maximale Zugkraft, die auf die Scheibe wirkt (der Adhäsionskoeffizient ist dem Reibungskoeffizienten gleich) und erwähnen zum Schluß als Beispiel die Rollbewegungen eines Rades auf einer Schiene.

J. Valenta.

Aleksandrina, N. I.: Der Stoß einer Last gegen einen Balken. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 4, 85—93 (1957) [Russisch].

This paper considers lateral vibrations of a beam subjected to the impact of a falling body. The effect of the local elastic-plastic deformation in the area of contact is taken into account. The author assumes that the force between the body and the beam is a piece-wise linear function of the distance between the center of the body and the axis of the beam. The basic integral equation of this problem is similar to the equation derived by S. Timoshenko (see, for instance, S. Timoshenko: Vibration Problems in Engineering, 2nd edition, London 1937, p. 395). The solutions for the subsequent stages of impact are obtained by the application of an operational method.

M. P. Bieniek.

Metelicyn, I. I.: Das Prinzip des kleinsten Zwangs in der Theorie des Stoßes. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk 1957, Nr. 11, 105—115 (1957) [Russisch].

Für die Bewegung mechanischer Systeme unter dem Einfluß von Stoßkräften wird der Ausdruck der Gaußschen Funktion und die entsprechende Variationsgleichung gebildet. Es wird gezeigt, daß der von den Kopplungen geschaffene Zwang den kleinsten Wert bei reellen Geschwindigkeiten besitzt. Eine Reihe von Aufgaben unter

verschiedenen Voraussetzungen über die physikalischen Eigenschaften der zusammenstoßenden Körper wird untersucht, und zwar: der Zusammenstoß absolut fester Körper; der Einfluß der Stoßimpulse auf eine ideale inkompressible Flüssigkeit; der Zusammenstoß fester Körper, die in einer idealen inkompressiblen Flüssigkeit schwimmen; der Zusammenstoß elastischer Körper. — In der letzten Aufgabe gilt im Gegensatz zur Hypothese von Saint Venant die Voraussetzung, daß die inneren Impulse in der ersten Phase des Stoßes auf dem gesamten Volumen des Körpers entstehen, indem sie das Geschwindigkeitsfeld verändern. Die Aufgabe über den longitudinalen Stoß eines festen Körpers gegen einen elastischen Stab wird nach dem folgenden Schema gelöst. Es wird die allgemeine Lösung der Gleichung der elastischen Schwingungen hingeschrieben. Die willkürlichen Konstanten ermittelt man nach Einsetzen der Lösung in die fundamentale Variationsgleichung aus der Bedingung, daß die Gaußsche Funktion ein Minimum besitze. — Die Aufgabe über den Stoß einer frei abgestützten rechtwinkligen Platte ist gelöst. Es wird bemerkt, daß bei der Wirkung der Stoßlast die Spannungen bei ihrer Zunahme das Maximum erreichen und danach sinken. Der Stoßwiderstand erweist sich als abhängig vom Flächeninhalt der Platte.

V. A. Ivovič. R. Ž. Mech., No. 3470 (1959).

● **Sneddon, I. N. and R. Hill (editors): Progress in solid mechanics. Vol. 1.** Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1960. XII, 448 p. Guilders 50,—.

Die Mechanik des festen Körpers hat sich seit etwa 15 Jahren außerordentlich rasch entwickelt, und es wird für den Forscher immer schwieriger, die Veröffentlichungen auf diesem Gebiet zu überblicken. Kurze, von bekannten Fachleuten verfaßte Zusammenfassungen sind deshalb sehr zu begrüßen. Im ersten Kapitel des vorliegenden Werkes berichtet **S. C. Hunter** über die Theorie der Ausbreitungsvorgänge in eindimensionalen Kontinua, in denen durch die Dämpfung mechanische Energie in Wärme umgesetzt wird. Die verschiedenen Dämpfungsansätze werden besprochen, wobei auch auf den Fall des räumlichen Kontinuums eingegangen wird. Als mathematische Methoden werden Fourier- und Laplace-Transformation benutzt. — Das zweite von **K. Marguerre** verfaßte Kapitel ist der Matrizenmethode in der Stabwerksdynamik gewidmet, die etwa seit 1955 u. a. vom Verf. und seinen Mitarbeitern entwickelt wurde und für die Untersuchung der Schwingungen komplizierter Stabsysteme unentbehrlich ist. — Besonders interessant ist das dritte Kapitel, in dem **H. G. Hopkins** über die Wirkung von Explosionen in sphärischen Hohlräumen auf den umgebenden festen Körper berichtet. Die hier auftretenden elastisch-plastischen Vorgänge sind für die Geophysik von Bedeutung. Als Fließbedingung wird die von Tresca angegebene der größten Schubspannung benutzt. In mehreren Paragraphen wird das Problem unter verschiedenen Voraussetzungen (kleine elastische Verformungen, kleine elastisch-plastische und große elastisch-plastische Verformungen) behandelt. Für den Fall der großen elastisch-plastischen Verformungen fehlt bis jetzt eine strenge Lösung. — Die neuere Entwicklung der allgemeinen räumlichen Plastizitätstheorie behandelt **W. T. Koiter** im vierten Kapitel des Sammelbandes. Hier wird über Eindeutigkeitsfragen und über die Minimal-Prinzipien berichtet, die für die Ermittlung der Tragfähigkeit von Stahlbauten (Traglastverfahren) eine große praktische Bedeutung haben. Ein allgemeiner Existenzsatz für das räumliche Problem der Plastizitätstheorie bei einer beliebigen physikalisch möglichen Fließbedingung fehlt bis jetzt noch. — Über ein spezielles Problem der Elastokinetik, nämlich über die Dispersion elastischer Wellen in Stäben, berichtet **W. A. Green**. Diese Untersuchungen wurden schon vor fast hundert Jahren von Pochhammer und Chree begonnen. Um auch andere Stabquerschnitte als den kreisförmigen behandeln zu können, der allein elastizitätstheoretisch streng untersucht werden kann, wurden in den letzten Jahren zahlreiche Näherungsmethoden entwickelt. Es zeigt sich, daß z. B. für Biegungsschwingungen die aus der Näherungstheorie von Timoschenko abgeleitete Dispersionskurve (Phasenge-

schwindigkeit der elastischen Wellen als Funktion der Wellenlängen) gut mit der genau ermittelten übereinstimmt. — In der klassischen Theorie der Thermoelastizität, die hauptsächlich von J. M. C. Duhamel und Franz Neumann entwickelt wurde, steckt ein (praktisch nicht sehr wesentlicher) Widerspruch, da die Elastizitätstheorie, die nur für umkehrbare (isotherme oder adiabatische) Vorgänge gilt, mit dem nicht umkehrbaren Prozeß der Wärmeleitung gekoppelt wird. Über die strenge Theorie, die von den thermodynamischen Grundgleichungen nicht umkehrbarer Vorgänge ausgeht und in der auch Trägheitswirkungen berücksichtigt werden, berichtet P. Chadwick im sechsten Kapitel. Bis jetzt wurden nur wenige Beispiele (Stabilitätsprobleme) zu dieser genauen Theorie durchgerechnet, wobei sich gegenüber der klassischen Theorie nur geringe Abweichungen ergaben. Zu wünschen ist die vollständige Durchrechnung eines radialsymmetrischen Problems. — Ein besonders wichtiges Kapitel der Kontinuumsmechanik behandelt B. A. Bilby im siebenten Abschnitt, nämlich die stetige Verteilung von Versetzungen. Diese Untersuchungen bilden die lange gesuchte Brücke zwischen der Physik und der Kontinuumsmechanik des festen Körpers. Wegen der Versetzungen (und der evtl. vorhandenen Eigenspannungen) gilt in dem von dem festen Körper eingenommenen Raum eine nicht-riemannsche Geometrie. Es ergeben sich äußerst interessante Zusammenhänge mit der allgemeinen Relativitätstheorie und Differentialgeometrie. Die Grundgedanken dieses neuen Gebietes der Mechanik fester Körper finden sich schon in dem 1909 in Paris erschienenen Buch von E. und F. Cosserat „Théorie des corps déformables“. Hier wird sich eine sehr fruchtbare Zusammenarbeit zwischen Mechanikern, Physikern und Geometern entwickeln. — Zur Lösung drehsymmetrischer Probleme des elastischen Halbraumes und der dicken Platte wurde von Harding und Sneddon die Hankel-Transformation benutzt. R. Muki berichtet im letzten Kapitel des Werkes über die Erweiterung der Methode auf unsymmetrische Probleme. Man kann auf diese Weise z. B. die Spannungen im elastischen Halbraum ermitteln, der durch einen schräg stehenden Stempel beansprucht wird. Auch auf thermoelastische Probleme der klassischen Theorie läßt sich das Verfahren anwenden. — Das Sammelwerk der Herausgeber, dessen erster Band hier besprochen wurde, kann dem Forscher auf dem Gebiet der Festkörpermechanik zur Orientierung über das bis jetzt Geleistete sehr empfohlen werden. Die Darstellung ist klar, und es werden auch zu jedem Kapitel ausführliche Literaturhinweise gegeben.

A. Weigand.

● **Milne-Thomson, L. M.:** *Plane elastic systems.* (Ergebnisse der angewandten Mathematik. 6.) Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1960. VIII, 211 p., 76 fig. DM. 49.80.

L'A. présente, dans un livre de proportions assez réduites, les plus importants résultats du problème plan de la théorie de l'élasticité, étudiée à l'aide des fonctions de variable complexe. Le premier chapitre contient des considérations générales concernant le problème plan de la théorie de l'élasticité, en démontrant le rôle joué par la fonction d'Airy dans ce problème. Dans le second chapitre on introduit la notion de tension complexe et on donne la formulation du problème plan, du point de vue mathématique, à l'aide des fonctions de variable complexe. Pour faciliter la lecture, on passe en revue, dans le III^{me} chapitre, les principaux résultats de la théorie des fonctions de variable complexe, nécessaires pour l'exposé ultérieur. Le IV^{me} chapitre est dédié à l'étude du plan élastique infini et du demi-plan élastique. On considère le premier problème fondamental (conditions sur la frontière en tensions), le deuxième problème fondamental (conditions sur la frontière en déplacements) et le problème mixte. On donne des résultats pour beaucoup de cas particuliers. Nous remarquons aussi la considération du problème de contact pour le demi-plan élastique. L'A. se préoccupe après, de quelques problèmes ayant un caractère dynamique. Dans le V^{me} chapitre on étudie les domaines limités par des arcs de cercle. On donne

des résultats pour les cas du domaine circulaire, annulaire etc. en considérant aussi beaucoup de problèmes annexes. Nous mentionnons ainsi le cas du plan infini avec des coupures en arcs de cercle, soumis à un état de tension plane. Le cas des domaines bornés par une frontière quelconque est étudié dans le VI^{me} chapitre. On introduit des coordonnées curvilignes orthogonales, en insistant en particulier sur les possibilités des transformées conformes. On considère, à cette occasion, quelques cas particuliers: le cas d'un domaine dont la frontière est une ellipse, le cas du plan élastique avec des trous intérieurs etc. Le VII^{me} chapitre prend en considération l'influence de l'anisotropie du matériel. On donne d'abord des résultats ayant un caractère général, en revenant après à quelques problèmes étudiés antérieurement pour le cas isotrope. Chacun des 7 chapitres mentionnés ci-dessus est accompagné de nombreux exemples de calcul, pour lesquels on donne seulement les énoncés. Nous remarquons aussi que la bibliographie utilisée est très sommaire. Ce livre est écrit dans une forme théorique; toutefois il est adapté directement aux applications d'ordre pratique (physique et technique), le cercle de lecteurs auquel il s'adresse étant ainsi assez grand.

P. P. Teodorescu.

● Green, A. E. and J. E. Adkins: Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics. Oxford: At the Clarendon Press 1960. XIII, 348 p. 55 s. net.

In der auf verhältnismäßig knappem Raum gebotenen Darstellung der Theorie großer elastischer Verformungen spiegelt sich die Forschungs- und Entwicklungsarbeit des vergangenen Jahrzehnts wider, welche auf internationaler Ebene, zum großen Teil jedoch von englischen und amerikanischen Wissenschaftlern geleistet wurde. Die rasche Entwicklung einer leistungsfähigen Theorie ist durch die wachsende industrielle Bedeutung von Gummi und die Notwendigkeit klarer Vorstellungen über sein mechanisches Verhalten angeregt worden. — Der Inhalt baut auf dem Werk „Theoretical Elasticity“ von A. E. Green und W. Zerna (dies. Zbl. 56, 182) auf, in welchem mit Hilfe des Tensorkalküls eine allgemeine Elastizitätstheorie für endlich große Verformungen entwickelt wurde. Im vorliegenden Buch beschränken sich aber die Verff. auf eine Zusammenstellung der wichtigsten mathematischen Ableitungen und Bezeichnungen eingangs des I. Kapitels und verweisen darauf, Details dem vorausgegangenen Buch (T. E.) zu entnehmen. Es folgen Untersuchungen über die Formänderungsenergie bei elementaren Kristallklassen, für isotrope und anisotrope (aeolotrope) Körper, weiterhin die Ableitungen der zugehörigen Spannungs-Verformungs-Beziehungen, auch für solche Körper, welche durch Inkompressibilität geometrischen Zwangsbedingungen bei der Verformung unterworfen sind. In Kapitel II werden allgemeine Lösungen für isotrope und aeolotrope, kompressible und inkompressible Körper diskutiert, welche durch Zug, Torsion, Biegung, bei Hohlkörpern auch durch Aufblähen und Umstülpen verformt werden. Die letzten Abschnitte betreffen eine allgemeine Darstellung des Scherproblems, u. a. mit Hilfe der konformen Abbildung; speziell wird der auf Scherung beanspruchte zylindrische Ringkörper berechnet. — Gemäß der Bedeutung zweidimensionaler Probleme in der klassischen Elastizitätstheorie wird im III. Kapitel eine Theorie endlich großer, ebener Verformungen entwickelt, woran sich im IV. Kapitel eine Membrantheorie mit Anwendung auf axial- und rotationssymmetrische Probleme anschließt. Dann wird im V. Kapitel das Verfahren der sukzessiven Approximation für die Lösung des Verformungsproblems abgeleitet und an Hand verschiedener Belastungsfälle würfelförmiger und zylindrischer Körper erläutert. Den Schluß bilden ein Abschnitt über Torsion 2. Ordnung und eine Bemerkung über einfach zusammenhängende Querschnitte. — Die Methoden der sukzessiven Approximation finden in Kapitel VI speziell auf zweidimensionale Probleme Anwendung, wofür u. a. eine allgemeine Theorie unter Benutzung komplexer Potentialfunktionen entwickelt wird. Damit werden für den inkompressiblen ebenen Verzerrungszustand die Spannungen und Verschiebungen eines unendlich ausgedehnten Körpers einmal mit kreisförmigem

Loch und zum anderen mit starrem kreisförmigen, am Lochrand haftenden Einschuß berechnet. — Das Kapitel VII gibt eine Auswahl von elastischen Körpern wieder, welche durch dehnstarre Seile oder Seilnetze verstärkt sind und ebenen bzw. zylindrisch-symmetrischen Deformationen unterworfen sind. — Im VIII. Kapitel folgt ein Abriß über thermoelastische Verformungen. Als Ausgangsgleichungen werden die Energiegleichung und die Entropiegleichung benutzt. Ferner wird angenommen, daß eine innere Energiedichte oder die Helmholtzsche Funktion der freien Energie existiert. — Auf kurzem Raum werden im IX. Kapitel die Probleme der Stabilität großer elastischer Verformungen bei kompressiblen und inkompressiblen Körpern behandelt. — Kapitel X betrifft experimentelle Anwendungen. Nach grundsätzlicher Erörterung der nötigen Voruntersuchungen und des Zweckes von Experimenten mit realen Werkstoffen werden Methoden zur Auswertung der Versuche (größtenteils mit vulkanisiertem Gummi) für die Bestimmung der funktionalen Form der Formänderungsenergie beschrieben und bisher erzielte Ergebnisse für einige spezielle Belastungsfälle in Diagrammform dargestellt. — Das XI. Kapitel ist der Untersuchung rheologischer Zustandsgleichungen gewidmet, insbesondere für den Fall, daß das mechanische Verhalten des Mediums durch polynomische Beziehungen zwischen den Größen für den Spannungszustand und für seine zeitlichen Änderungen, die Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungsgradienten dargestellt werden kann. — Der Textteil schließt mit einem Anhang über die Reduktion eines Matrizenpolynoms zweier Matrizen. Die Namen der im Text angegebenen Autoren sind am Ende in einem Verzeichnis mit Seitenangabe zusammengestellt worden. Dieses vornehm ausgestattete Buch ist ein Grundlagenwerk in knapper, mathematisch anspruchsvoller Fassung und daher in erster Linie entsprechend interessierten Mathematikern und Physikern zu empfehlen. Infolge der wachsenden Bedeutung von Plasten als Material für tragende, stark verformbare Konstruktionsteile wird aber auch der wissenschaftlich tätige Festigkeitsingenieur angehalten, sich mit den aufgezeigten Grundlagen vertraut zu machen. Die in den einzelnen Kapiteln angeführten Beispiele können ihm dabei wertvolle Hinweise geben.

G. Löbel.

Kröner, Ekkehart: Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Arch. rat. Mech. Analysis 4, 273—334 (1960).

Die Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, an deren Entwicklung der Verf. wesentlich beteiligt ist, ermöglicht es, den Einfluß von Versetzungen und anderen Kristallbaufehlern auf die makroskopischen Eigenschaften fester Körper kontinuumsmechanisch wiederzugeben. In der vorliegenden Veröffentlichung wird hauptsächlich die nichtlineare Theorie behandelt. Kapitel I bringt eine allgemeine Übersicht. Schon E. und F. Cosserat (*Théorie des corps déformables*. Paris 1909. S. 122ff.) betrachteten ein Kontinuum, in dem zur Angabe des geometrischen Zustands außer den elastischen Verschiebungen noch die elastischen Verdrehungen erforderlich sind. In der Statik treten dann außer den Kraftspannungen auch Momentenspannungen auf. Das Cosseratsche Kontinuum hat 6 Verformungsfreiheitsgrade. Es läßt sich, wie W. Günther [Abb. Braunschweig wiss. Ges. 10, 195—213 (1958)] erkannt hat, durch einen Kristall mit makroskopisch spannungsfreien Strukturkrümmungen realisieren. Allgemeinere Verformungszustände, insbesondere solche mit makroskopischen Eigenspannungen lassen sich erfassen, wenn die Deformationen und Krümmungen nicht aus einem Verschiebungs- bzw. Drehfeld herleitbar zu sein brauchen. Man erhält dann ein Kontinuum mit 15 Freiheitsgraden. Die allgemeine Theorie dieses Kontinuums beschreibt außer den Versetzungen noch andere Gitterfehler. Daneben wird eine beschränkte Theorie behandelt, bei der nur Versetzungen auftreten, die im Körperinnern nicht enden. Die geometrischen Grundgleichungen erfahren in Kapitel II zunächst eine neue elementare Darstellung, dann die von K. Kondo (*Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering sci-*

ences by means of geometry. Vol. I. (dies. Zbl. 68, 148) Div. C. u. D.) sowie B. A. Bilby, R. Bullough, E. Smith [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 231, 263—273 (1955)] eingeführte Formulierung mit Hilfe der allgemeinen Differentialgeometrie. Der Versetzungsdichte entspricht hierbei der Tensor der Cartanschen Torsion, der antisymmetrische Teil der affinen Konnexion. Der Riemann-Tensor dieser Konnexion verschwindet in der beschränkten Theorie. In der allgemeinen Theorie sind dagegen beliebige metrische Konnexionen zugelassen; der Riemann- und der daraus gebildete Einstein-Tensor brauchen nicht zu verschwinden. Für diesen gelten die Einsteinschen Gleichungen der Kontinuumsmechanik, auf deren rechten Seiten die Komponenten des sogenannten Materietensors stehen. Der symmetrische Teil dieses zweistufigen Tensors beschreibt Eigenspannungszustände, die ohne Mitwirkung von Versetzungen durch den Einbau von Extramaterie (z. B. Atome auf Zwischengitterplätzen) in das ideale Kristallgitter entstehen. Zur Deutung des antisymmetrischen Teils wird eine hypothetische Substanz mit der provisorischen Bezeichnung Drehmaterie eingeführt, die jedoch in der mathematischen Fassung der allgemeinen Theorie keine Berücksichtigung findet. — Wie der Verf. inzwischen erkannt hat [Arch. rat. Mech. Analysis 7, 78—80 (1961)], ist die Einführung der Drehmaterie überflüssig. Zur Integration der Grundgleichungen (Kapitel III) dienen Spannungsfunktionen, die, wie H. Schaefer [Ingenieur-Arch. 28, 291—306 (1959)] gezeigt hat, auch zur Behandlung dreidimensionaler Randwertprobleme geeignet sind. Die Festlegung zulässiger Nebenbedingungen geschieht durch zwei Ansätze. Der eine wurde schon in einer früheren Arbeit mit A. Seeger [Arch. rat. Mech. Analysis 3, 97—119 (1959)] auf das nicht-lineare Summationsproblem der Eigenspannungen angewandt. Mit dem anderen, der von Schaefer stammt, wird das zweite Randwertproblem behandelt. Die Spannungsbestimmung erfolgt wie beim Summationsproblem durch Iteration mit linearen Näherungen. Am Beispiel des von zwei unendlich ausgedehnten parallelen Ebenen begrenzten Körpers gelingt es, durch Entkopplung der Randbedingungen auf je ein Standard-Problem der Potential- und der Bipotentialtheorie zu kommen. Allgemein ist das noch nicht möglich. Fortschritte in dieser Richtung würden die Programmierarbeit für moderne Rechenmaschinen vereinfachen. Kapitel IV bringt die Theorie der Par- und Dielastizität in linearer Näherung. Makroskopisch punktförmige Gitterfehler lassen sich in Analogie zur Elektro- und Magnetostatik weitgehend als elastische Dipole beschreiben. Die potentielle Energie und das Drehmoment eines Dipols im elastischen Deformationsfeld werden elementar abgeleitet. In einem dielastischen Kontinuum entstehen solche Dipole beim Anlegen einer mechanischen Spannung, während ein parelastisches Kontinuum permanente Dipole enthält, die sich in Richtung eines elastischen Feldes eindrehen können. Zur Herstellung rein par- bzw. dielastischer Körper im Gedankenversuch wird in Hohlräume Materie mit gleichen elastischen Eigenschaften eingezwängt bzw. Materie mit anderen elastischen Eigenschaften spannungsfrei eingefüllt. Reale kristalline Festkörper sind stets dielastisch, viele zugleich parelastisch. Anwendungsmöglichkeiten für die Theorie der Par- und Dielastizität werden betrachtet. Im Schlußkapitel untersucht der Verf., die Vorstellungen, unter denen man in der linearen Theorie (s. E. Kröner: Kontinuums-theorie der Versetzungen und Eigenspannungen, dies. Zbl. 84, 400) die Versetzung als elementare Eigenspannungsquelle auffaßt und macht drei Vorschläge zur Definition der elementaren Eigenspannungsquelle in der allgemeinen Theorie. Bei der Betrachtung ungelöster Probleme weist er besonders auf das Fehlen der dynamischen Theorie hin. Schließlich kommt er noch auf die interessanten und fruchtbaren Beziehungen zwischen allgemeiner Relativitätstheorie und Kontinuums-theorie der Versetzungen und Eigenspannungen zu sprechen und wirft dabei die Frage auf, ob es physikalisch begründet ist, für das Weltall nur eine Riemannsche Geometrie zuzulassen, also zu seiner Beschreibung eine Konnexion zu benutzen, die weniger allgemein ist als die allgemeinste metrische Konnexion.

C. Seyferth.

● Vlasov, V. Z. und N. N. Leont'ev: **Balken, Platten und Schalen auf elastischer Unterlage.** [Balki, plity i oboločki na uprugum osnovanii]. Moskau: Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur 1960. 491 S. mit 2 Taf. R. 16,35 [Russisch].

This book is a detailed description of a new method for calculating structures on elastic foundation given in the authors' previous papers. The simplest model of proportional elastic foundation does not agree with the experimental data. On the other hand solutions of beams, plates and shells bedded on an elastic half-space, in view of the mathematical difficulties, are not as yet applicable in engineering. Still the elastic half-space does not represent adequately the problem of stress distribution in soils. In the first chapter the authors derive the general relations. The mathematical methods applied in this book are those used by Vlasov in his engineering theory of shells and thin-walled structures. The bedding is considered as an elastic half-space. Instead of looking for rigorous solutions, the authors express the unknown displacements in the half-space by a finite number of functions in which the vertical variable and the two horizontal variables are separated. For example in the plane problem:

$u(x, y) = U_1(x) \varphi_1(y) + \dots + U_n(x) \varphi_n(y)$, $v(x, y) = V_1(x) \psi_1(y) + \dots + V_n(x) \psi_n(y)$. The functions $\varphi_i(y)$ and $\psi_i(y)$ are assumed in a form suitable for a given problem. The distribution of displacements in the vertical direction being assumed, the equilibrium equations can not be satisfied in each point. Instead, using the principal of virtual work, equilibrium is considered for vertical columns. Thus, by a variational method, an overall equilibrium is obtained. In view of these assumptions, by a proper choice of the functions $\varphi_i(y)$ and $\psi_i(y)$, a good approximation of the relation between surface loads and surface displacements can be obtained. These solutions do not give informations what regards stress distribution in the half-space. Thus the method is restricted to the analysis of the structures. In detailed discussions the authors assume horizontal displacements zero. Three basic models are introduced. The first model considers an elastic layer on a rigid half-space. The vertical displacement is assumed linear. The second model considers an elastic layer or half-space with a vertical displacement distribution according to a proper hyperbolic function. The third model considers layered media. Suitable linear displacement distributions are considered securing continuity. The third case leads to rather complicated expressions. The first two models yield very simple relations. For example in the three-dimensional problem the authors obtained: $2t \nabla^2 w(x, y) - k w(x, y) + q(x, y) = 0$, where $w(x, y)$ — the surface displacements; t and k — constants expressed in terms of the elastic constants, the depth of the layer and the assumed displacement distribution; q — surface load. When t assumed zero, this formula reduces to the simple relation for proportional elastic foundation. Thus, the obtained expression gives a better approximation and still applied to problems like plates on elastic foundation does not yield essential mathematical difficulties. The theory being applied in engineering practice, the constants should be checked experimentally. No experimental data are given throughout the book. In the second chapter the authors consider the plane problem, beams on elastic foundation. The solutions yield the displacements of the beam and the free surface as well. Mathematically the problem is reduced to a fourth-order ordinary differential equation, linear and with constant coefficients. Several cases of loading are considered in detail. The influence of forces, applied to the free surface, on the deflection of the beam is considered. In the third chapter the authors analyze plates on elastic foundation. The problem is described by the following equation:

$$\nabla^2 \nabla^2 w - 2r^2 \nabla^2 w + S^4 w = p(x, y)/D.$$

Putting r to zero the equation reduces to the usual one for plates on elastic foundation. The new term does not introduce serious mathematical difficulties. Several

cases of boundary conditions and loading are considered in detail. Graphs are given showing the influence of the foundation coefficients on moments and deflections. The fifth chapter contains the problem of shallow shells on elastic foundation. Spherical shells are considered. Especially problems encountered in tank design are solved in detail. In the sixth chapter the authors consider the dynamics and stability of beams and shells on elastic foundation. For the dynamical problem inertia terms are introduced in the equation governing the displacements of the structure and proper mass forces are considered in the half-space. The mass of soil vibrating with the structure depends upon the choice of the function describing the displacement distribution. Damping is not considered. Reviewer believes, in the dynamical problem, the solution obtained does not describe the reality adequately. Due to wave propagation in the half-space there will be always energy dissipation. The seventh chapter contains another approach to the problems of thick plates and the elastic half-space. The fundamental equations of elasticity are reduced to six, enclosing the three unknown displacements and the three stresses acting in the plane $z = \text{constant}$. Then these functions are expanded in Taylor's Series. Several problems are discussed by this method. P. Wilde.

Baker, W. E.: The elastic-plastic response of thin spherical shells to internal blast loading. *J. appl. Mech.* **27**, 139—144 (1960).

The author considers elastic-plastic response of a spherical shell to a spherically symmetric transient pressure pulse on its inner surface. Laplace transform technique has been used to solve the differential equation of motion in the radial direction, under the assumption of linear strain hardening stress-strain law in the plastic region, the variation of the shell radius and shell thinning being neglected. The governing differential equation which becomes nonlinear in the case of increase of shell radius and shell thinning with time parameter during deformation is solved numerically. The theory is compared with experiment and is shown to be in good agreement.

D. N. Mitra.

Müller, K.-H.: Spannungen in anisotropen kreiszylindrischen Rohren. *Ingenieur-Arch.* **27**, 417—420 (1960).

Verf. befaßt sich mit folgendem ebenen Problem der Elastizitätstheorie: ein Kreisring (oder Rohrquerschnitt), hergestellt aus einem Material von allgemeiner geradliniger Anisotropie, ist einer auf seinen Rändern wirkenden Belastung ausgesetzt. Indem man sich der Airyschen Spannungsfunktion mit komplexen Variablen bedient, bestimmt man die Komponenten des Spannungs- und Verschiebungszustandes in Form unendlicher Reihen. Seine Koeffizienten berechnet man rekursiv aus einem System von vier linearen Gleichungen. Verf. kündigt eine Arbeitsfortsetzung von mehr technischem Inhalt an. Z. Kączkowski.

Fadle, J.: Der homogene, innerlich statisch unbestimmte Parallelfachwerkträger. *Ingenieur-Arch.* **27**, 314—325 (1960).

Man untersuchte einen Parallelfachwerkträger mit doppelten Diagonalstäben in jedem Feld. Das System der bekannten Maxwell'schen Gleichungen löste man unter Anwendung der Matrizenrechnung. Es wurde auch eine Näherungslösung angegeben. Z. Kączkowski.

Galfajan, P. O. und K. S. Čobanjan: Eine Aufgabe über die Torsion eines rechteckigen Stabes mit einer dünnen verstärkenden Hülle. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Otd. techn. Nauk, Mech. Mašinost.* **1960**, Nr. 1, 165—167 (1960) [Russisch].

Der untersuchte Stab besteht aus einem Kern von rechteckigem Querschnitt und einer dünnwandigen Hülle, die aus anderem Material hergestellt ist. Die Spannungsfunktion bei der Torsion für den Innenteil des Querschnitts wurde durch eine einfache trigonometrische Reihe ausgedrückt. Das gelöste Zahlenbeispiel betrifft den Quadratquerschnitt eines Betonstabes mit einer stählernen Hülle.

Z. Kączkowski.

Rothe, Alexander: Über die Voraussetzungen und Grundlagen der klassischen baustatischen Theorie hochgradig statisch unbestimmter Stabtragwerke. *Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg* **4**, 111—122 (1960).

Die Arbeit ist kurzer Bericht über gut bekannte Voraussetzungen, Regeln und entsprechende Grundbeziehungen, auf denen die klassische Theorie der elastischen Stabwerksysteme basiert. Am Schluß der Abhandlung sind Betrachtungen angegeben worden, die die Anwendung der Kräfte- und Deformationsmethoden zur Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Stabwerksysteme betreffen.

J. Czulak.

Miklowitz, Julius: Plane-stress unloading waves emanating from a suddenly punched hole in a stretched elastic plate. *J. appl. Mech.* **27**, 165—171 (1960).

Eine unendliche dünne elastische Scheibe, die durch den gleichmäßigen Spannungszustand $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_0$ vorgespannt sei, werde plötzlich durch einen kreiszylindrischen Stempel gelocht. Verf. löst diese Aufgabe durch Integration der Wellengleichung $\Delta u - u/r^2 = 1/c^2 u_{tt}$ mit den Anfangsbedingungen $u(r, 0) = 0$; $u_t(r, 0) = 0$ und den Randbedingungen $u(r, t) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$

und

$$\sigma_r(a, t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\sigma_0 t/t_s & 0 \leq t \leq t_s \\ -\sigma_0 & t > t_s \end{cases}$$

Durch Überlagerung des ursprünglichen Spannungszustandes $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_0$ wird der Lochrand für $t > t_s$ spannungsfrei. Als Lösungsmethode benutzt der Verf. wie auch A. Kromm bei einem ähnlichen Problem (dies. Zbl. **30**, 135, 421) die Laplace-Transformation. Aus der komplexen Umkehrformel ergibt sich die Umfangsspannung $\sigma_\theta(r, t)$ als kompliziertes uneigentliches Integral, das mit Hilfe eines Digitalrechners numerisch ausgewertet wurde.

A. Weigand.

Klassische Feldtheorie und Relativitätstheorie:

Jones, Robert T.: Analysis of accelerated motion in the theory of relativity. *Nature* **186**, 790 (1960).

The well-known treatments of accelerated motion in the theory of relativity have led to certain difficulties of interpretation (see, for instance, J. Crampin, W. H. McCrea and D. McNally, this Zbl. **86**, 220)). In the present "Letter to the Editors" a method is very briefly outlined, which, according to the author, avoids such difficulties. The analysis is based on the use of restricted conformal transformations.

H. Rund.

Onicescu, O.: Sur la mécanique du point matériel. *Bull. math. Soc. Sci. math. phys. R. P. R., n. Sér.* **1** (49), 461—465 (1957).

The author endeavours to formulate a new type of mechanics, neither classical nor relativistic in the accepted sense of these terms, of a material particle in an electromagnetic field (compare also Onicescu, this Zbl. **82**, 172). The inertial properties of the particle are supposedly determined by a differential form, whose structure indicates how another differential form determining the properties of the field should be defined. The so-called laws of motion are obtained by equating the exterior derivatives of these forms. These equations are, in fact, very similar to those of the special theory of relativity.

H. Rund.

Capella, Alexandre: Sur la quantification du champ électromagnétique libre en relativité restreinte. *C. r. Acad. Sci., Paris* **251**, 636—638 (1960).

Les invariants du champ sont exprimés directement en fonction des opérateurs de création et annihilation de «photons réels». On obtient ainsi pour l'énergie une forme définie positive sans faire appel à la condition de Lorentz et sans utiliser les potentiels. Le vecteur spin apparaît colinéaire à la direction de propagation.

Zusammenfassung des Autors.

Pham Mau Quan: Sur la dynamique analytique du point en relativité restreinte. *C. r. Acad. Sci., Paris* **251**, 639—644 (1960).

Nouvelles équations du mouvement d'un point en présence d'un champ de forces dérivant d'un potentiel scalaire. Équations de la dynamique analytique du point sous forme invariante, mieux adaptée à l'étude et à l'extension relativiste des propriétés du mouvement.

Zusammenfassung des Autors.

Milner, S. R.: The classical field theory of matter and electricity. I: An approach from first principles. II: The electromagnetic theory of particles. Philos. Trans. roy. Soc. London, Ser. A **253**, 185—226 (1960).

Verf. schlägt vor, die Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik durch Terme zu ergänzen, welche physikalisch die Existenz von magnetischen Einzelpolen und von magnetischen Strömen implizieren würden. Dabei müßten gleichzeitig die wahren elektrischen Ladungen und die Leitungsströme durch Zusatzterme ergänzt werden. Die so verallgemeinerten Maxwell'schen Gleichungen sollen es gestatten, räumlich ausgedehnte Systeme zu konstruieren, welche sich wie ausgedehnte stabile klassische Elementarteilchen verhalten. Für die Ausbreitung der verallgemeinerten elektromagnetischen Felder ergibt sich eine enge Relation zu der Schrödingergleichung. Erwartungsgemäß sind die verallgemeinerten Maxwell'schen Gleichungen gegenüber einer umfangreicheren Gruppe von Transformationen invariant, als sie die Gruppe der Lorentztransformationen darstellt. Die physikalische Deutung dieser Tatsache wird darin gesucht, daß die wahren elektrischen Ladungen und die Leitungsströme als Summe zweier Terme in der Theorie auftreten, von denen aber nur die Summe eine wirkliche physikalische Bedeutung besitzen soll.

Th. Seel.

● **Thinius, E.:** Ortskurvenlehre und konforme Abbildungen in der komplexen Ebene. Hamburg—Berlin—Bonn: R. v. Decker's Verlag, G. Schenck 1959. 98 S. 88 Abb. DM 19,80.

Das Buch will das Rechnen mit komplexen Zahlen in der Wechselstromtechnik durch graphische Konstruktionen veranschaulichen und erleichtern. Zunächst werden die vier Grundrechnungsarten nebst Potenzierung, Radizierung, Differentiation und Integration nach der Zeit behandelt; es folgen als einfachste Ortskurven die Kreise einschließlich der Geraden und ihre Inversion. Kompliziertere Ortskurven werden nur kurz erwähnt. Die konformen Abbildungen durch elementare Funktionen einschließlich des Logarithmus, der e -Funktion, der Kreis- und Hyperbelfunktionen werden ausführlich dargestellt. Dabei wird außer von der gewöhnlichen komplexen Ebene auch von mehrblättrigen Ebenen und der komplexen Zahlenkugel nach Riemann Gebrauch gemacht. Die hergeleiteten Methoden finden dann Anwendung zur Darstellung der elektrischen Eigenschaften von komplexen Widerständen aus R -, L - und C -Elementen, des Eingangs- und Wellenwiderstandes von Leitungen, Übertragungsgrößen, Reflexionsfaktoren und Nachbildungen; ferner für gekoppelte Kreise, Filter und Dämpfungsentzerrer in überbrückter T -Schaltung. Zum Verständnis des Buches ist nur die Kenntnis der Grundbegriffe der komplexen Zahlen und der konformen Abbildungen erforderlich.

G. Günther.

Saškov (Shaskov), A. G.: Transient response in a DC circuit consisting of an ohmic resistance and a thermistor. Automat. Remote Control **20**, 20—26 (1959), Übersetzung von Avtomat. Telemekh. **20**, 23—30 (1959).

Die Gleichungen für die elektrische Hintereinanderschaltung eines Thermistors und eines ohmschen Widerstandes werden aufgestellt. Die Gleichungen werden als Signalflußbilder dargestellt, aus denen die komplexe Übertragungsfunktion für zwei Fälle ermittelt wird. Im ersten Fall dient der Thermistor als Fühler für die Temperatur eines ruhenden Mediums, im zweiten Fall als Fühler für die Änderungen des Wärmeüberganges zwischen Thermistor und Medium (wie es z. B. bei Durchfluß-, Druck- und Konzentrationsmessungen vorkommt). Die nichtlineare Kennlinie des Thermistors wird linearisiert, die statischen Instabilitätsmöglichkeiten der Schaltung werden betrachtet. 8 Abb. 7 Schrifttumshinweise.

W. Oppelt.

Kay, I. and R. A. Silverman: On the uncertainty relation for real signals: *Postscript. Inform. and Control* 2, 396—397 (1959).

Hinweis auf eine Arbeit von A. G. Mayer und E. A. Leontovich [C. r. Acad. Sci., USSR 2. Ser. 4, 353—360 (1934); dies. Zbl. 10, 349], die Ergebnisse enthält, welche von den Autoren in einer früheren Arbeit [Inf. and Control 1, 64—75 (1957); dies. Zbl. 80, 215] abgeleitet wurden, ohne daß die Autoren Kenntnis von der russischen Arbeit hatten. W. Klose.

Lin, Wei-guan: Characteristic impedances of the slotted coaxial line. *Science Record*, n. Ser. 3, 583—591 (1959).

Es werden in der Arbeit die Wellenwiderstände koaxialer Leitungen berechnet mit vollkommen leitendem Innen- und Außenleiter, wenn der Außenleiter entweder einen einzigen oder zwei gegenüberliegende Schlitze aufweist. Die dabei angewendete Methode ist die Methode der konformen Abbildung. H. Buchholz.

Papadopoulos, V. M.: Wave propagation on a coaxial system. *Quart. appl. Math.* 17, 423—436 (1960).

Es wird die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs eines unendlich gut leitenden, nach beiden Seiten unbegrenzt langen metallischen Leiters von kreisförmigem Querschnitt untersucht. Die Achse dieses Leiters stimmt mit der z -Achse eines Zylinderkoordinatensystems überein. Nur im Raumteil $z \geq 0$ umhüllt diesen Leiter ein äußerer Metalleiter, der ebenfalls unendlich gut leitet. Die Lösung dieser Aufgabe wird nach der Methode der unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten hergeleitet. In zwei Grenzfällen werden in der Lösung auch numerische Werte angegeben, wie z. B. in dem Grenzfall einer dünnen vertikalen Antenne über einer vollkommen leitenden Erde. H. Buchholz.

Chapman, J. H., W. J. Heikkila and J. E. Hogarth: A new technique for the study of scatter propagation in the troposphere. *Canadian J. Phys.* 35, 823—830 (1957).

Rasche Feldstärke-Schwankungen, wie sie bei Scatter-Ausbreitung auftreten, erzeugen Seitenbänder im Fourier-Spektrum, die ein „Ausbreitungs-Rauschen“ darstellen. Mit Hilfe von scharf begrenzten, variablen Filtern wurde dieses Spektrum auf einer 500 MHz-Strecke ausgemessen. Die Energieverteilung geht im wesentlichen mit f^{-2} (f Abstand von der Trägerfrequenz), genauer mit $(1 + f^2/f_1^2 + f^4/f_1^2 f_2^2)^{-1}$; Meßwerte: f_1 zwischen 0,01 und 0,1, f_2 zwischen 1 und 10 Hz.

K. Rawer.

Lü, Bao-wei: Theory of forward-scatter propagation of ultra-short radio waves. *Sci. Sinica* 8, 761—780 (1959).

Die Streuung wird durch phasenrechte Summierung über die Elemente des Streuvolumens erhalten. Dabei werden die Korrelationsfunktion bzw. deren dreidimensionale Fourier-Transformierte in natürlicher Weise eingeführt. Auf die Troposphäre wird Kolmogorow's Turbulenz-Modell angewandt und dafür (ohne Beweis) das räumliche Spektrum nach $h^{-11/3}$ angegeben. ($h = 2\pi/\lambda$ räumliche Wellenzahl). Für die tiefe Ionosphäre werden trotz Erdmagnetfeld bei überwiegender Stoßzahl die Bewegungsgleichungen isotrop. Summierung über die geladenen Teilchen (elektrische Neutralität bleibt erhalten) zeigt, daß die stationäre Bewegung ein „Gradientenwind“ ist. In der Ionisierungsbilanz hat man dann lediglich das Divergenzglied. Aus diesen Ansätzen wird das Spektrum, abhängig von der „mittleren Inhomogenität“ nach Heisenbergs Vorstellung berechnet, es geht mit $h^{-13/3}$. Die mögliche Modifikation der Theorie im Fall eines erheblichen vertikalen Gradienten der Elektronendichte wird am Schluß angedeutet. K. Rawer.

Wentworth, R. C., W. M. MacDonald and S. F. Singer: Lifetimes of trapped radiation belt particles determined by Coulomb scattering. *Phys. Fluids* 2, 499—509 (1959).

Im Erdmagnetfeld bewegen sich Ladungen auf Schraubenbahnen. Für ihre Streuung am Coulombfeld von Plasma-Ionen wird eine von Rosenbluth u. a. angegebene Gleichung für die Änderung der Verteilungsfunktion im Phasenraum spezialisiert auf den Fall unbewegter Streuzentren und schneller gestreuter Teilchen. Für die letzteren gibt Integration über den Phasenraum dann eine Kontinuitäts-Gleichung, in der das magnetische Moment der bewegten Ladungen als wichtiger Parameter auftritt. Aus ihr kann eine Zeitkonstante („Lebensdauer“) erhalten werden. Sie wird mit einer angenommenen Dichteverteilung im Außenraum numerisch berechnet, steigt mit wachsender Teilchenenergie E etwa mit $E^{3/2}$. Die Winkelverteilungsfunktion der Teilchen wird aus der stationären Kontinuitäts-gleichung erhalten und erlaubt es schließlich, den Intensitätsverlauf der eingefangenen Partikel-Strahlung längs einer magnetischen Kraftlinie zu bestimmen. *K. Rawer.*

Cairó, Lorenzo: *Méthode de perturbation pour la propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma remplissant partiellement un guide d'ondes circulaire.* C. r. Acad. Sci., Paris **250**, 4129—4131 (1960).

On considère un guide circulaire, le plasma étant disposé à son intérieur dans un tube concentrique. On trouve une relation qui relie la valeur de la constante de propagation aux diamètres des deux tubes concentriques. On se borne au mode fondamental du guide vide.

Zusammenfassung des Autors.

Barsukov, K. A.: *Transition radiation in waveguides.* Soviet Phys., JETP **37** (10), 787—789 (1960), Übersetzung von Žurn. éksp. teor. Fiz. **37**, 1106—1109 (1959).

We examine the radiation produced in a waveguide when a charged particle passes through the boundary between two media. It is shown that at ultrarelativistic charge velocities the radiation is mainly in the forward direction and its magnitude is proportional to the particle energy. Formulas are derived for the radiation energy and for its spectral distribution.

Zusammenfassung des Autors.

Carlson, B. C.: *Fields of an accelerated point charge.* Amer. J. Phys. **27**, 669—670 (1959).

Die Beziehung, die zwischen dem magnetischen und dem elektrischen Feld einer mit relativistischer Geschwindigkeit bewegten Punktladung besteht, wird auf einfache Weise aus dem Liénard-Wiechert-Potential abgeleitet. *C. Passow.*

Petrina, D. Ja. (D. Y.): *Dispersion relations in the diffraction problem.* Ukrain. mat. Žurn. **10**, 405—412, engl. Zusammenfassung 412 (1958) [Russisch].

Die Fredholm'sche Theorie wird auf die Integralgleichung für die Beugung einer skalaren Welle an der Grenzfläche zweier Medien angewandt und gezeigt, daß die Streuamplitude in der oberen Halbebene (dabei Primär-Wellenzahl als komplexe Variable, übertragener Impuls und Azimutwinkel festgehalten) analytisch ist und auf der reellen Achse Verzweigungspunkte besitzt. Mittels der Dispersionsrelationen, welche der Verf. erhält, kann aus der Streuamplitude die Gestalt der beugenden Fläche ermittelt werden.

Walter Franz.

Toraldo di Francia, G.: *Babinet's principle for diffraction at a plane screen with directional conductivity.* Nuovo Cimento, X. Ser. **9**, 309—315 (1958).

Das früher (dies. Zbl. **71**, 215) hergeleitete Babinetsche Prinzip für ebene Schirme, welche nur in einer kartesischen Koordinatenrichtung leitend sind, wird nunmehr auch für Schirme bewiesen, deren Leitfähigkeit einem System von regulären krummen Linien folgt.

Walter Franz.

Cowley, J. M. and A. F. Moodie: *Fourier images. I: The point source.* Proc. phys. Soc., Sect. B **70**, 486—496 (1957).

Die Verff. gehen aus von dem Kirchhoffschen Integral, das die Amplitude in einem beliebigen Aufpunkt angibt, wenn über die Objektebene und die Lichtquelle integriert wird, und spezialisieren es für den Fall einer Punktquelle und ein unendlich ausgedehntes, ebenes, periodisches Objekt. Die übliche Approximation zweiter Ordnung (Fresnelsche Beugung) wird für ein eindimensionales periodisches Objekt durchgeführt und eine Formel für die Intensitätsverteilung in einer zur Objektebene

parallelen Beobachtungsebene hergeleitet. Eine Reihe von Beobachtungsebenen ist dadurch ausgezeichnet, daß in ihnen dieselbe Lichtverteilung herrscht wie im periodischen Objekt selbst, lediglich vergrößert oder verkleinert durch den Faktor $M = (R + R_q)/R_q$, wobei R_q den Abstand Punktquelle bis Objekt und R den Abstand Objekt bis Beobachtungsebene bedeutet. Dies entspricht der Vergrößerung eines Schattenbildes. Für diese ausgezeichneten Beobachtungsebenen, in denen die sog. Fourierbilder entstehen, gilt die Formel $(1/R) + (1/R_q) = \lambda/2\nu a^2$, wobei λ die Wellenlänge, a die Gitterkonstante und ν die Reihe der halben ganzen Zahlen $(\pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots)$ durchlaufen kann. Eine bemerkenswerte Ausnahme bilden cosinusförmige Gitter — d. h. also solche, die sich bei der Fourierdarstellung eines periodischen Objektes auf ein Glied beschränken — insofern, als für sie keine diskreten Bildebenen bestehen, sondern daß sie für alle R im Fokus sind. Für den zweidimensionalen Fall wird die Endformel ebenfalls angeführt. — Im experimentellen Teil geben die Verf. eine Anordnung an, die die Fourierbilder auf einfache Weise zu beobachten und zu photographieren gestattet. Sie besteht aus einem Mikroskop und einer Beleuchtungseinrichtung, die ein Bild einer kleinen Lochblende in der Nähe des periodischen Objektes entwirft. Unperiodizitäten werden um so mehr unterdrückt, je höher die Ordnungszahl des Fourierbildes ist. — Die Verf. sind der Ansicht, daß die Existenz der Fourierbilder die Möglichkeit eines Entwurfs von optischen (insbesondere elektronenoptischen) Systemen höheren Wirkungsgrades in sich trägt, wenn die a priori Kenntnis der Periodizität ausgenutzt wird.

H. Riesenber.

Cowley, J. M. and A. F. Moodie: Fourier images. II: The out-of-focus patterns. Proc. phys. Soc., Sect. B **70**, 497—504 (1957).

Die Verf. behandeln in Ergänzung zu ihrer ersten Arbeit über Fourierbilder (s. obiges Referat) die Lichterscheinungen in Ebenen, die zwischen den Fourierschen Bildebenen liegen (out-of-focus patterns). Es werden zwei Darstellungen für die Wellenfunktion u (Amplitude) in Fresnelscher Näherung für eine Punktlichtquelle angegeben. Einmal wird u dargestellt als Faltung der Fouriertransformierten der Objektfunktion mit der Fouriertransformierten einer Fresnelschen Wellenfunktion (zu einer Punktquelle gehörigen Wellenfunktion). Andererseits wird u beschrieben als die Faltung der Objektfunktion mit der Fresnelschen Wellenfunktion. Die erste Darstellung hat den Vorteil, daß bei einem periodischen Objekt seine Fouriertransformierte aus diskreten Werten besteht und die Faltungsoperation sich auf eine Summation beschränkt. — Die Verf. vergleichen die durch Rechnung erhaltenen Ergebnisse an einem zweidimensionalen Gitter mit dem Experiment.

H. Riesenber.

Steel, W. H.: Scalar diffraction in terms of coherence. Proc. roy. Soc. London, Ser. A **249**, 574—588 (1959).

Verf. geht aus von dem Begriff der Kohärenz, wie ihn E. Wolf (dies. Zbl. **57**, 428) mittels einer Korrelationsfunktion eingeführt hat. Verf. entwickelt eine Theorie der Beugung von Licht beliebigen Kohärenzgrades mittels einer 4-dimensionalen Fourier-Transformation, entsprechend der Korrelation zwischen Punktepaaren einer Ebene. Für nicht-monochromatisches Licht tritt eine fünfte Dimension hinzu. Die Theorie führt auf eine lineare „Kohärenz-Übertragungs-Funktion“ [coherence transfer function], welche als Spezialfälle die „Kontrast-Übertragungs-Funktion“ (für inkohärente Beleuchtung) bzw. die „Übertragungs-Faktoren“ (für partiell kohärente Beleuchtung) nach Hopkins enthält.

Walter Franz.

Kazarinoff, N. D. and R. K. Ritt: On the theory of scalar diffraction and its application to the prolate spheroid. Ann. of Phys. **6**, 277—299 (1959).

Die Verf. untersuchen die Beugung einer skalaren Welle an einer ideal reflektierenden Koordinatenfläche eines Systems, in welchem die Wellengleichung separierbar ist. Mit Hilfe der Resolventen-Theorie linearer Operatoren (A. R. Sims,

dies. Zbl. 77, 292) wird eine Integraldarstellung der Lösung gefunden, welche mit derjenigen identisch ist, welche sich für Zylinder und Kugel mittels der Watson-Transformation ergibt (Walter Franz, dies. Zbl. 56, 211). Die Rechnung wird für das gestreckte Sphäroid explizit durchgeführt, und das Ergebnis nach der Langerschen Theorie (R. E. Langer, dies. Zbl. 5, 158; 11, 301) asymptotisch ausgewertet. Es ergibt sich eine Entwicklung nach Kriechwellen, welche im Lichtgebiet jedoch divergiert und nach der von Franz angegebenen Methode unter Abspaltung eines geometrisch-optischen Terms konvergent gemacht wird. *Walter Franz.*

Mertens, Robert: On the "method of parts" for the diffraction of light by superposed and standing supersonic waves. *Simon Stevin* 32, 80—90 (1958).

Die Beugung einer Lichtwelle an zwei Ultraschall-Wellen, die in entgegengesetzten Richtungen senkrecht zum Lichtstrahl fortschreiten, wird berechnet, indem das Material in schmale Schichten parallel zu den Wellenflächen des Lichtes zerlegt gedacht wird, in welchem abwechselnd eine der beiden Ultraschall-Wellen laufen soll; auf jeder dieser Schichten wird dann eine vom Raman und Nath [Proc. Indian Acad. Sci. Ser. A 2, 406—412(1935)] aufgestellte Formel angewandt. Im Limes unendlich dünner Schichten ergibt sich ein Differentialgleichungs-System für die Amplitudenänderung der einzelnen Beugungsordnungen beim Durchgang der Welle durch das Material (Anm. des Ref.: Dieses System hätte wesentlich einfacher direkt aus der Wellengleichung gewonnen werden können), dessen Lösung angegeben wird. *Walter Franz.*

Boerboom, A. J. H., H. A. Tasman and H. Wachsmuth: Shape of the magnetic field between conical pole faces. *Z. Naturforsch.* 14a, 816—818 (1959).

Die rotationssymmetrische und zu einer achsensymmetrischen Ebene antisymmetrische Verteilung des skalaren magnetischen Potentials im Zwischenraum zwischen zwei magnetischen Polschuhen mit konischer Oberfläche wird durch eine Reihenentwicklung nach Potenzen der Koordinaten in Hauptnormalen- und Binormalenrichtung einer kreisförmigen Hauptbahn ausgedrückt. Für die Koeffizienten dieser Reihenentwicklung folgen aus der Potentialgleichung und der Existenz einer konischen Äquipotentialfläche Rekursionsformeln, mit Hilfe deren die ersten dieser Koeffizienten in Abhängigkeit von dem die Inhomogenität des Feldes beschreibenden Feldindex berechnet werden. *F. Lenz.*

Lapeyre, Renée: Intégration numérique de l'équation du mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique. *C. r. Acad. Sci., Paris* 251, 2144—2146 (1960).

● **Synge, J. L.: Relativity. The general theory.** (Series in Physics). Amsterdam North-Holland Publishing Company 1960. XV, 505 p. Guilders 55,—.

Im Jahre 1956 erschien der Band über Spezielle Relativitätstheorie von Synge (dies. Zbl. 71, 218). Zur Freude des Lesers liegt nun nach 4 Jahren auch der Band über Allgemeine Relativitätstheorie wiederum in hervorragender Ausstattung vor. Das umfangreiche Werk gliedert sich in folgende Kapitel: Kapitel I: „Wesentliche Tensorformeln für die Riemannsche Raum-Zeit“. Dieser Teil führt allgemein in die Riemannsche Geometrie ein, wobei neben dem üblichen Tensorapparat auch die Vektorverschiebung nach Fermi-Walker abgehandelt wird. Besonders hervorzuheben ist die systematische Darstellung der Sätze von Stokes und Gauß (Green). Kapitel II: „Die Weltfunktion Ω “. Dieses ganze Kapitel — in dieser Art einmalig — beschäftigt sich mit der von Ruse eingeführten Zwei-Punkt-Invarianten und den daraus erzeugten Zwei-Punkt-Tensoren. Der hierfür zuständige geometrische Apparat wird konsequent aufgebaut. Eine längere Abhandlung wird der Verwendung von Fermi-Koordinaten und optischen Koordinaten gewidmet. Kapitel III „Chronometrie in der Riemannschen Raum-Zeit“. Nach einer Typisierung der Beobachtungen und der Darlegung der „Riemannschen Hypothese“ bringt Verf. seine Meinung, wonach nur der Zeitmessung fundamentale Bedeutung beizumessen sei,

während Ortsmessungen von abgeleitetem Charakter seien. Deshalb auch im Titel „Chronometrie“ statt „Geometrie“. An dem Beispiel des fallenden Apfels werden diese Gedanken konkret behandelt. Interessant für den Leser ist die Tatsache, daß das Einsteinsche Äquivalenzprinzip als verwirrend beiseite gelegt wird. Ein Abschnitt über die Ausmessung des Gravitationsfeldes beschließt dieses Kapitel. Kapitel IV: „Das materielle Kontinuum“. Der Aufbau dieses Kapitels erfolgt auf der Grundlage eines diskreten Materiemodells, welches der Wirklichkeit adäquater sei. Mit Hilfe statistischer Methoden wird der Übergang zum Kontinuum vollzogen, dessen Relationen zu den Feldgleichungen und Erhaltungssätzen untersucht werden. Kapitel V: „Einige Eigenschaften von Einstein-Feldern“. Eine allgemeine Studie über retardierte und avancierte Potentiale und deren lineare Näherung leitet dieses Kapitel ein. Weiter findet man die Behandlung statisch eingebetteter Körper und des Cauchy-Problems in Gaußschen Normalkoordinaten sowie die Theorie der Stoßwellen. Kapitel VI: „Integrale Erhaltungsgesetze und Bewegungsgleichungen“. Es werden die verschiedenen Arten von integralen Erhaltungssätzen und deren Beziehungen zu der Killing-Gleichung diskutiert. Interessant ist es, daß sich Verf. hinsichtlich des Problems der Gravitationsenergie der Auffassung von Landau und Lifschitz anschließt. Kapitel VII: „Felder mit sphärischer Symmetrie“. Der Inhalt dieses Kapitels läßt sich mit folgenden Stichworten charakterisieren: de Sitter-Universum, Schwarzschild-Feld, Periheldrehung, Lichtablenkung und Spektralverschiebung. Kapitel VIII: „Einige spezielle Universa“. Neben der Behandlung der üblichen Weltmodelle und Effekte (statische Universa, kosmologische Rotverschiebung) findet sich eine systematische Darstellung der Universa vom Gödelschen Typ. Kapitel IX: „Gravitationswellen“. Das Dilemma der Gravitationswellen tritt in diesem Teil besonders deutlich in Erscheinung, da schon der Begriff der Gravitationswelle, mit dem sich Verf. eingehend auseinandersetzt, problematisch ist, weil bei nichtlinearen Theorien das Fourier-Theorem nicht mehr angewendet werden kann. In erster Linie beschäftigt sich Verf. mit den ebenen Gravitationswellen. Nur andeutungsweise geht er auf zylindrische und sphärische Gravitationswellen ein. Kapitel X: „Elektromagnetismus“. In diesem Teil findet man die Maxwellsche Theorie in den Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie eingearbeitet. Spezielle Abschnitte beschäftigen sich mit dem Cauchy-Problem und dem Lichtkosmos. Kapitel XI: „Geometrische Optik“. Besonders hervorzuheben sind die Abschnitte: Wellen, Strahlen, und Photonen in einem dispersiven Medium, geometrische Optik in einem statischen Universum, stellare Aberration und Differentialchronometrie.

Der Anhang des Werkes enthält Polemiken gegen übliche Konventionen sowie Vorschläge für eine neue Namensgebung für die Multiplen von Einheiten. Eine einmalige moderne Bibliographie über eine gewisse Auswahl aus der allgemein-relativistischen Literatur in einem Umfang von 64 Seiten beschließt das Werk, das in seiner Struktur in vielem von der konventionellen Art abweicht und neuartige Auffassungen des Verf. zum Ausdruck bringt. Gerade aus diesem Grunde ist es dem forschenden Physiker noch mehr als dem Studenten der Physik zu empfehlen. Wer in Anbetracht der vielen Neuerscheinungen heutzutage nicht die Zeit finden sollte, das Werk im einzelnen zu studieren, möge nicht versäumen, wenigstens das Sokrates-ironische Vorwort zu lesen.

E. Schmutzer.

Kilmister, C. W. and B. O. J. Tupper: Eddington's statistical theory. III: The uncertainty of the origin. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 6, 117—140 (1957).

After expressing their views on the principles of relativity and uncertainty, the authors extend the arguments of the previous papers (Part I; II this Zbl. 71, 392; 78, 190) on the density-particle correlation to a relation between the uncertainty of the physical origin (cf. Part. IV this Zbl. 81, 440) and the Hubble constant.

H. J. Groenewold.

Le-Thanh-Phong: Vecteur de Poynting en relativité générale. C. r. Acad. Sci., Paris 250, 987—989 (1960).

Verf. zeigt die Gleichheit des Poynting-Vektors von L. Bel [Comptes rendus 247, 1094 (1958)] mit demjenigen, der sich aus dem von Pirani [Phys. Rev. 105, 1089—1099 (1957)] angegebenen, die 2. Ableitungen des Energie-Impuls-Pseudotensors enthaltenden Tensor $\bar{t}_\alpha{}^\beta$ konstruieren läßt. Außerdem verallgemeinert Verf. die Definition von $\bar{t}_\alpha{}^\beta$ für den Fall, wo $R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$ (und nicht $= 0$) ist. Auch hier ergibt sich Gleichheit des entsprechenden Poynting-Vektors mit dem von Bel.

D. Geißler.

Pirani, F. A. E.: Gravitational waves in general relativity. IV: The gravitational field of a fast-moving particle. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 252, 96—101 (1959).

(Teil III s. dies. Zbl. 84, 440). — Bekanntlich ist das Schwarzschildsche Feld ein Gravitationsfeld vom Typ I gemäß der Klassifikation Petrovs [Kasansk. gosudarst. Univ., učenyje Zapiski, Nr. 114, Nr. 8, 55—69 (1954)]. Verf. transformiert nun den Riemann-Tensor des Schwarzschildschen Feldes auf ein nichtkanonisches Bezugssystem, das zu einem Beobachter gehört, der sich mit einer uniformen Geschwindigkeit V relativ zur Schwarzschild-Singularität bewegt. In dieser nichtkanonischen Darstellung bekommt der Riemann-Tensor eine Form, die für $V \rightarrow c$ bei Vernachlässigung aller beschränkt bleibenden Terme mit der kanonischen Form des Riemann-Tensors eines Gravitationsfeldes übereinstimmt, das vom Typ II, Eigenwert Null ist. — Ref. möchte noch auf das elektromagnetische Analogon hinweisen, nämlich auf die Beziehung, die für einen mit $V \rightarrow c$ gegenüber einer elektrischen Ladung bewegten Beobachter zwischen dem Feldstärketensor des zu dieser Ladung gehörenden Coulomb-Feldes und einem elektromagnetischen "sheet" besteht. *H. Treder.*

Schiff, L. I.: Motion of a gyroscope according to Einstein's theory of gravitation. Proc. nat. Acad. Sci. USA 46, 871—882 (1960).

Die Gravitationstheorie Einsteins enthält als integrierende Bestandteile das Relativitätsprinzip und das Äquivalenzprinzip. Aus diesen folgt zusammen mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz bereits die erste Näherung für ein schwaches zentralsymmetrisches Gravitationsfeld. Hingegen sind die vollen Einsteinschen Gleichungen erst zur Bestimmung der höheren Näherungen oder zur Bestimmung von nicht zentralsymmetrischen Feldern notwendig. — Verf. bemerkt daher, daß mit Ausnahme der Drehung des Merkurperihels alle anderen experimentell nachgewiesenen allgemein-relativistischen Effekte an sich nur Bestätigungen des Äquivalenzprinzips sind. An Hand der Diskussion der Bewegung eines Gyroskops im Feld der rotierenden Erde mit Hilfe der relativistischen Bewegungsgleichungen für ein Pol-Dipolteilchen von Papapetrou (dies. Zbl. 44, 228) leitet der Verf. nun den allgemeinen Ausdruck für die Präzession der Momentenachse her. In der betrachteten Näherung zerfällt dieser Ausdruck in 3 Terme: 1. Die speziellrelativistische Präzession gemäß Thomas [Philos. Mag., VII. Ser. 3, 1—22 (1927)], 2. die geodätische Präzession nach de Sitter [Monthly Not. Roy. astron. Soc. 77, 155, 481 (1916)] und Fokker [Nederl. Akad. Wet., Proc., 29, 611—621 (1920)], die sich bereits aus dem Äquivalenzprinzip ergibt, und 3. ein Term, der eine Folge der durch die Erdrotation erzeugten nichtdiagonalen Komponenten von $g_{\mu\nu}$ ist. Dieser letzte Term ist eine über das Äquivalenzprinzip hinausgehende Konsequenz der Einsteinschen Gleichungen und ist von der Relativgeschwindigkeit des Gyroskops unabhängig. Die ihm entsprechende Präzession läßt sich somit auch an einem Gyroskop feststellen, dessen Schwerpunkt relativ zur Erde ruht. — Die quantitative Rechnung zeigt, daß diese Präzessionen experimentell nachweisbar sein sollten.

H. Treder.

Schmutzer, Ernst: Beitrag zur projektiven Relativitätstheorie. II. Z. Phys. 154, 312—318 (1959).

In einer vorherigen Arbeit (dies. Zbl. 84, 443) wurde unter Fallenlassen der Integrabilitätsforderung für den Vektor des fünfdimensionalen Linienelementes

eine verallgemeinerte Form der projektiven Relativitätstheorie hergeleitet. Die physikalische Interpretation wurde abweichend von der üblichen Theorie durchgeführt. Dies wird hier präzisiert und weiter ausgebaut. Es ergibt sich ein „ J -Feld“ als neuartiges Phänomen. — Aus einem skalaren Materiefeld ergibt sich dieselbe Bewegungsgleichung, die für geladene Partikel zu fordern ist. Für eine Punktladung werden die Feldgleichungen gelöst, für kosmologische Modelle Differentialgleichungen für den Weltradius angegeben. Feldgleichungen und Erhaltungssätze für Minkowskimetrik führen auf eine nichtlineare Elektrodynamik mit endlicher Selbstenergie einer Punktladung.

K. Just.

Bonnor, W. B.: The problem of evolution in general relativity. J. Math. Mech. 9, 439—444 (1960).

Verf. beschäftigt sich mit dem Problem der Eindeutigkeit der Evolution in der allgemeinen Relativitätstheorie. Er knüpft an die Existenztheoreme von Fourès-Bruhat [dies. Zbl. 49, 192; J. rat. Mech. Analysis 5, 951—966 (1956); C. r. Acad. Sci., Paris 246, 1809—1812 (1958)] an, wonach im Sinne des Cauchy-Problems Eindeutigkeit der Entwicklung im materiefreien Fall und im Falle „reiner Materie“ gewährleistet ist, und kann zeigen, daß keine eindeutige Lösung existiert, wenn man Materie in Form einer idealen Flüssigkeit annimmt. Das wird an zwei Beispielen demonstriert, von denen das eine das Modell-Universum ist. E. Schmutzer.

Walker, A. G.: Axioms for cosmology. Studies Logic Found. Math., Axiomatic Method 308—321 (1959).

Ausgehend von Partikeln und Ereignissen wird in axiomatischer Weise das übliche Linienelement der Metrik homogener kosmologischer Modelle hergeleitet. Grundlegung hierbei sind die Lichtsignale, mit denen Ereignisse in der Geschichte verschiedener Partikel aufeinander abgebildet werden. Aus Forderungen an diese Abbildungen läßt sich die Existenz einer universellen Zeitkoordinate beweisen und die Raummetrik auf Zeitmessungen zurückführen.

K. Just.

Cataneo, Carlo: Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 48, 361—386 (1959).

L'A. applique ici une notion introduite dans de précédents articles (ce Zbl. 83, 428; 84, 438) de décomposition et dérivée transverse de tenseurs définis dans une variété V_{n+1} hyperbolique normale munie d'une congruence de courbes C_0 orientées dans le temps (terminologie de la Relativité) $x^0 = \text{constante}$. V_{n+1} est douée d'une métrique hyperbolique normale $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ ($i, j = 1, \dots, n, 0$) et l'on définit à l'aide du tenseur métrique un vecteur $(\gamma^i) : \gamma^\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, n$; $\gamma_0 = 1/\sqrt{-g_{00}}$ tangent à C_0 , et un tenseur $\gamma_{ik} = g_{ik} + \gamma_i \gamma_k$ (ils interviennent naturellement dans l'écriture du ds^2 si l'on groupe dans un carré les termes en dx_0). En chaque point x , l'espace tangent T_x à V_{n+1} est considéré comme somme $\theta_x + \sum_x$, où θ_x est à une dimension tangent à C_0 , \sum_x est orthogonal à θ_x et désigné comme „plate-forme spatiale“. Les vecteurs de V_{n+1} sont décomposés en somme de vecteurs spatiaux (dans \sum_x) et temporels (dans θ_x). De même, les tenseurs d'ordre supérieur à un de V_{n+1} sont décomposés sur les produits tensoriels de θ_x et \sum_x . Pour les tenseurs spatiaux sont définies une dérivée ordinaire $(\tilde{\partial}_i)$ et covariante $(\tilde{\nabla}_i^*)$ qui peuvent être obtenues par projection des ∂_i et ∇_i associés à g_{ij} , sur \sum_x ou ses produits tensoriels. On a : $\tilde{\partial}_i = \partial_i + \gamma_i \gamma^0 \partial_0$; $\tilde{\nabla}_i^* = \tilde{\partial}_i - [{}^h_i]$ sur un vecteur covariant, où l'on désigne par $[{}^h_i]$ le symbole de Christoffel (quantité purement spatiale) formé avec les $\tilde{\partial}$ et les γ_{ij} . $\tilde{\partial}_i$ et $\tilde{\nabla}_i^*$ ont les propriétés habituelles, en particulier $\tilde{\nabla}_i^* \gamma_{jk} = 0$. Les projections sur \sum_x , θ ou leurs produits deux à deux de $V_i \gamma_j$, du tenseur tourbillon $V_i \gamma_j - V_j \gamma_i$

du tenseur de Killing $\Delta_i \gamma_j + \Delta_j \gamma_i$ sont calculées; elles permettent l'interprétation des propriétés de la congruence C_0 comme caractères de mouvements fluides dont elles donnent ainsi une classification. Dans une dernière partie, l'A. exprime à l'aide des tenseurs précédemment définis les projections de vecteurs temporels ($\in \theta_x$) ou spatiaux ($\in (\sum_x)$) et de deux-tenseurs spatiaux ($\sum_x \otimes \sum_x$). J. Charles.

Hessaby, M.: Modèle de particule infinie. J. Phys. Radium 18, 323—326 (1957).

L'A. détermine les tenseurs de champ pour le champ gravitationnel en le considérant comme un cas particulier du champ électromagnétique. Le potentiel de gravitation, l'énergie du champ et le champ électrique sont déterminés dans le cas statique à symétrie sphérique. Une étude est faite des dimensions des constantes introduites. Dans le dernier paragraphe est déterminée l'équation de propagation des ondes. J. Charles.

Maurer-Tison, F.: Aspects mathématiques de la théorie unitaire du champ d'Einstein. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 76, 185—269 (1959).

Le cadre géométrique choisi pour la théorie unitaire est une variété différentiable V_4 munie d'une connexion linéaire $L_{\alpha\beta}^\gamma$ et sur laquelle est donné un tenseur fondamental g . Les équations adoptées sont: $\partial_\rho g_{\lambda\mu} - L_{\lambda\rho}^\sigma g_{\sigma\mu} - L_{\mu\rho}^\sigma g_{\lambda\sigma} = 0$ (définition de la connexion), $\partial_\rho (g^{[\rho\beta]} \sqrt{-g}) = 0$ (conditions de torsion), $P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} (\partial_\alpha \sum_\beta + \partial_\beta \sum_\alpha) = 0$ (équations du champ). $P_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci, \sum_α un vecteur arbitraire. Dans cet article est étudiée la résolution de ces équations; elle est interprétée — en tenant compte en particulier des cas exceptionnels — d'un point de vue géométrique et d'un point de vue physique. Le mémoire est divisé en trois parties: Première Partie. L'A. après avoir rappelé les principales propriétés des connexions infinitésimales, et les bases de la théorie unitaire d'Einstein interprète géométriquement le système des équations de liaison. Cette étude conduit à l'introduction d'une seconde connexion $\bar{\omega}$ associée à ω définie par $\bar{L}_{\alpha\beta}^\gamma = L_{\beta\alpha}^\gamma$; on précise les propriétés des équations du champ relatives à ces connexions ω et $\bar{\omega}$. En particulier au transport d'un vecteur covariant le long d'un chemin quelconque relativement à $\bar{\omega}$ correspond le transport d'un vecteur contravariant, associé par isomorphisme défini à l'aide de $g_{\alpha\beta}$, le long du même chemin relativement à ω ; il y a entre les groupes d'holonomie associés à ω et $\bar{\omega}$ un antiisomorphisme naturel. Enfin à une solution des équations du champ $(g_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}^\gamma, \sum_\alpha)$ correspond toujours une autre solution exprimée à l'aide de $\bar{L}_{\alpha\beta}^\gamma$. On précise à la fin les propriétés de connexions coaffines associées à $(g_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}^\gamma)$. Il est fait usage de repères coaffines: réunion d'un corepère linéaire et d'une forme différentielle linéaire. — Deuxième Partie. C'est l'étude du problème de Cauchy relatif aux équations du champ, problème étudié aussi pour les cas exceptionnels, et qui conduit à une étude précise des variétés caractéristiques. La méthode employée est celle définie par A. Lichnérowicz en Relativité Générale; les coordonnées utilisées généralisent les coordonnées isothermes de G. Darmon; elles ne sont cependant isothermes qu'au premier ordre, l'existence de coordonnées totalement isothermes paraissant impossible en théorie unitaire. La conclusion de l'étude est l'existence de trois cônes caractéristiques du second ordre en chaque point de V_4 , dont les positions relatives sont précisées. — Troisième Partie. Ici est abordée l'interprétation physique des propriétés établies précédemment. Tout d'abord sont rappelées les propriétés des champs électromagnétiques qui guideront pour les identifications de la présente théorie: il y a en particulier dans le cas intérieur deux cônes caractéristiques pour les équations de Maxwell et d'Einstein. On choisit alors ici le tenseur de champ de manière qu'il existe un potentiel-vecteur puis on fait apparaître aisément le tenseur de Maxwell et le tenseur d'Einstein. Par contre le tenseur d'impulsion-énergie n'est défini commodément que dans des

hypothèses de champ faible. Une bibliographie sur les espaces fibrés et connexions infinitésimales, la relativité générale, la théorie unitaire d'Einstein, termine ce mémoire. *J. Charles.*

Venini, Carlo: *Massa di un corpuscolo elettrizzato nella seconda approssimazione dell'ultima teoria unitaria einsteiniana.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **27**, 362—367 (1959).

Das Bewegungsproblem elektrisch geladener Teilchen wird in der Approximation zweiter Ordnung in der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie mit Hilfe der Einstein-Infeldschen Methode (dies. Zbl. **33**, 425) diskutiert. *J. I. Horváth.*

Lévy, Jack: *Une version modifiée de la théorie du champ unifié d'Einstein.* J. Phys. Radium **20**, 747—750 (1959).

Dans un lagrangien, d'où l'on déduit les équations d'une théorie unitaire du champ, on introduit un terme quadratique par rapport au vecteur de torsion de la connexion affine. Ceci permet d'écrire sous deux formes équivalentes les équations du champ et de mettre en évidence un vecteur courant. La donnée du lagrangien est justifiée par des résultats de M. H. Heyraud et de la nouvelle théorie de Dirac. *J. Charles.*

Lenoir, Marcel: *Sur les solutions à symétrie sphérique de la théorie du champ unifié.* C. r. Acad. Sci., Paris **250**, 981—983 (1960).

Die Bonnorschen Bewegungsgleichungen (dies. Zbl. **56**, 440) werden mit Hilfe der Papapetrouschen Approximationsmethode (dies. Zbl. **31**, 376) von einer geeigneten Hamiltonschen Funktion der einheitlichen Feldtheorie abgeleitet. Dann wird die explizite Lösung dieser Bewegungsgleichung diskutiert; endlich wird die Strom- und Ladungsdichte in der Bonnorschen Theorie angegeben. *J. I. Horváth.*

Hély, Jean: *Modèles d'univers en état de radiation pure.* C. r. Acad. Sci., Paris **249**, 1867—1868 (1959).

On définit un modèle très général d'univers en état de radiation pure, au sens de A. Lichnérowicz. (Résumé de l'auteur). *J. Charles.*

Hara, Osamu: *A study of charge independence in terms of Kaluza's five dimensional theory.* Progress theor. Phys. **21**, 919—937 (1959).

Die Eichtransformation des Maxwellfeldes wird als Rotation um eine Achse interpretiert, der Drehwinkel entspricht dann der zusätzlichen Koordinate in Kaluzas fünfdimensionaler Theorie. Eine von Klein angegebene Verallgemeinerung der Eichtransformation ist isomorph der Drehgruppe in einem dreidimensionalen Lorentzraum. Das führt zur Isomorphie zwischen Kleins Transformation (für z. T. imaginäre Drehwinkel) und den Drehungen im Isospinraum. Endliche Ladungsmultipletts entsprechen nichtunitären Darstellungen der dreidimensionalen homogenen Lorentzgruppe. Eine ähnliche Interpretation für Nukleonenzahl und Strangeness wird angedeutet, ein skalares Mesonenfeld explizit vorgeführt. Konsequenzen allgemeiner Transformationen, bei denen Minkowskiraum und Isospinraum kein direktes Produkt bilden, werden diskutiert. *K. Just.*

Quantentheorie:

Schwinger, Julian: *Unitary operator bases.* Proc. nat. Acad. Sci. USA **46**, 570—579 (1960).

Unitary operators U are investigated, which transform two orthonormal vector bases or two orthonormal operator bases into each other. A particular case is the cyclic permutation V of N vectors. The cyclic permutation of the N eigenvectors of V gives a reciprocal unitary transformation U^{-1} with the original vectors as eigenvectors. U and V generate a complete operator basis

$$N^{-1/2} \exp(m n \pi i / N) U^m V^n = N^{-1/2} \exp(-m n \pi i / N) V^n U^m$$

for the physical quantities of the system. The integers k and l for which U^k and V^l

generate the same basis are investigated, as well as the commutative factorizations corresponding to the factorizations of N . The irreducible bases corresponding to the prime factors ν correspond to single degrees of freedom. The case $\nu = 2$ is equivalent to spin $\frac{1}{2}$ degree of freedom. The limit $\nu \rightarrow \infty$, which yields the pair of complementary properties with continuous spectra, is not carried out in detail.

H. J. Groenewold.

● Heisenberg, Werner: Mutamenti nelle basi della scienza. Traduzione di Adolfo Verson. (Biblioteca di cultura scientifica N. 17.) Torino: Editore Boringhieri 1960. 168 p. L. 1500.

● Broglie, Louis de: Non-linear wave mechanics. A causal interpretation. Amsterdam: Elsevier Publishing Company 1960. XII, 304 p., 20 illustr. 57 s., Dfl. 30,00.

Aeschlimann, Florence: Extension de la théorie fonctionnelle des corpuscules au nucléon et au photon. J. Phys. Radium 18, 562—566 (1957).

Ausgehend von der Funktionaltheorie des Diracschen Elektrons [F. Aeschlimann: J. Phys. Radium 18, 523—526 (1957)] wird diese Theorie auf alle Fälle von Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ und entweder Isospin $\frac{1}{2}$ oder einem ausgezeichneten Schraubensinn erweitert. Mit Hilfe der Fusionsmethode von L. de Broglie wird außerdem die Funktionaltheorie von Teilchen mit Spin 1 aufgebaut und es werden die für die nichtlinearen Terme bestehenden Möglichkeiten diskutiert. *F. Engelmann.*

Hellman, Olavi: On the Schrödinger eigenvalue problem. II. Mat.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk. 32, Nr. 10, 15 p. (1960).

Es wird eine Arbeit (vgl. dies. Zbl. 87, 430) fortgesetzt, die sich mit einer ziemlich allgemeinen Klasse von Schrödinger-Gleichungen eines Teilchens in einem Zentralkraftfeld beschäftigt. Eine einschränkende Bedingung, nach welcher bei der früheren Diskussion noch bestimmte vom Drehimpuls abhängige diskret liegende Massenwerte des Teilchens ausgeschlossen werden mußten, wird fallen gelassen. Die Betrachtungen können auch auf den Fall ausgedehnt werden, daß die Teilchenmasse radial vom Ort abhängt. *F. Schlögl.*

Senitzky, I. R.: Dissipation in quantum mechanics. The harmonic oscillator. Phys. Review, II. Ser. 119, 670—679 (1960).

Eine allgemeine quantenmechanische Theorie eines gedämpften Oszillators wird entwickelt, die keine detaillierten Voraussetzungen über den Mechanismus des Energieverlustes macht. Gesamthamiltonian ist $H = H_{\text{osc}} + H_v + \alpha P \Gamma$, wobei H_{osc} den freien Oszillator beschreibt mit dem Impuls P (und Koordinate Q); H_v ist der Hamiltonoperator des Verlustmechanismus und Γ eine Koordinate dieses Mechanismus, die mit P gekoppelt ist. Die Heisenberg Gleichungen für P und Γ werden dann mit einer gewissen Approximation gelöst, und man erhält $\ddot{P} + \beta \dot{P} + \omega^2 P = F$, wobei der Erwartungswert von F verschwindet und man bekommt die klassische Gleichung des gedämpften Oszillators. Der Hauptpunkt der Arbeit liegt in der Approximation, wodurch die Irreduzibilität eingeführt wird. Es sei bemerkt, daß man die Operatorgleichung $\ddot{P} + \beta \dot{P} + \omega^2 P = 0$ auch direkt von einem Hamiltonoperator ableiten kann; doch ist diese Methode einerseits nicht physikalisch, andererseits liefert sie die falschen Vertauschungsrelationen $[Q(t), P(t)] = i \hbar e^{-\beta t}$.

A. O. Barut.

Opat, Geoffrey, I.: The electric dipole sum rule. Nuclear Phys. 14, 506—511 (1960).

The electric dipole sum rule of Thomas, Reiche and Kuhn, as developed by Levinger and Bethe, is shown to hold by giving an exact treatment of recoil and redundant coordinates. Levinger and Bethe have discussed the effect of exchange potentials on the dipole sum and so this point is not considered here.

Zusammenfassung des Autors.

Kröner, E.: Zur Behandlung des quantenmechanischen Vielteilchenproblems mit Hilfe von Zweiteilchenfunktionen. *Z. Naturforsch.* 15a, 260—265 (1960).

Nach dem Vorgehen von Bopp (dies. Zbl. 88, 448) werden quantenmechanische Systeme aus N gleichartigen Teilchen mit Zweiteilchenwechselwirkung durch Zweiteilchenfunktionen beschrieben. Mit ihrer Hilfe werden nach der Methode der „Konfigurationsüberlagerung“ Konfigurationen und „Superkonfigurationen“ berechnet.

G. Wallis.

Baudet, Jean, Françoise Cabaret, Jacques Tillieu et Jean Guy: Table d'intégrales à deux centres. II. *J. Phys. Radium* 21, 105—111 (1960).

(Teil I, s. Tillieu, Baudet, Guy, dies. Zbl. 77, 447). — Es werden 114 Integralformeln für die Zweizentren-Integrale $\int f e^{-\alpha r_1 - \beta r_2 - \gamma r_{12}} dt$ angegeben, wenn f als Funktion von r und ϑ die bei quantenmechanischen Rechnungen zu erwartenden Formen durchläuft. Die Formeln führen die obigen Integrale auf vier Basisintegrale zurück. Tabellen sind nicht angegeben worden.

H. Preuß.

Dolph, C. L.: A saddle point characterization of the Schwinger stationary points in exterior scattering problems. *J. Soc. industr. appl. Math.* 5, 89—104 (1957).

Verf. zeigt, daß das Schwingersche Variationsverfahren bei (äußeren) Streuproblemen deshalb nicht immer zu guten Ergebnissen führt, weil der zu variierende Integralausdruck nicht hermitesch ist, und daher der stationäre Punkt ein Sattelpunkt in der komplexen Ebene wird. Um die Verhältnisse in der Umgebung des Sattelpunktes zu beschreiben, ist die a-priori-Kennntnis eines Parameters am Sattelpunkt nötig, ohne welche bei Anwendung einer genäherten „trial function“ anscheinend keine Fehlerabschätzung möglich ist.

Walter Franz.

Saxon, D. S. and L. I. Schiff: Theory of high-energy potential scattering. *Nuovo Cimento, X. Ser.* 6, 614—627 (1957).

Die Ergebnisse einer Arbeit von Saxon (dies. Zbl. 78, 442) werden auf den Fall der nicht-separablen dreidimensionalen Schrödingergleichung ausgedehnt. Der neu hergeleitete exakte Ausdruck für die Streuamplitude führt zu einem Näherungsverfahren, das insbesondere für kleine und große Streuwinkel diskutiert wird.

G. Höhler.

Martin, A.: Analytic properties of $l \neq 0$ partial wave amplitudes for a given class of potentials. *Nuovo Cimento, X. Ser.* 15, 99—109 (1960).

Es werden die analytischen Eigenschaften der Partialwellenamplituden $l \neq 0$ einer gegebenen Klasse von Potentialen untersucht. Dabei bedient sich der Verf. einer Transformation zur Eliminierung des Zentrifugaltermes und benützt die Laplace-Transformation zweier Größen, die zu unabhängigen Lösungen der Schrödingergleichung in Beziehung stehen. Auch die Bedingungen für das Aufstellen von Dispersionsrelationen werden näher untersucht.

P. Urban.

Iogansen, L. V.: Quantum corrections to radiation from a rigid rotator. *Soviet. Phys., JETP* 36 (9), 216—217 (1959). Übersetzung von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* 36, 313—314 (1959).

Der Verf. berechnet die Intensität der Synchrotronstrahlung als Funktion der Frequenz, sowie die insgesamt ausgestrahlte Energie. Er betrachtet im Gegensatz zu den bereits vorliegenden Arbeiten das Elektron als einen starren Rotator, wobei der Charakter, der die Rotation bedingende Kraft, beliebig bleibt. Die Berechnung geht von der Dirac-Gleichung für eine freie azimutale Bewegung aus. Die Ergebnisse stimmen bis auf eine kleine Abweichung im numerischen Faktor im Ausdruck für die Gesamtenergie mit den bisher bekannten Ergebnissen überein.

C. Passow.

Sokolov, A. A., I. I. Gusejnov (Guseinov) and B. K. Kerimov: Scattering of Dirac particles by a short-range center of force with damping taken into account. *Soviet Phys., JETP* 7, 76—78 (1958). Übersetzung von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* 34, 110—112 (1958).

The theory of radiation damping is applied to the case of Dirac particles scattered elastically by an arbitrary short-range centre of force. This is an extension of similar work on spinless particles. The differential and total cross sections are calculated and a relation is derived between the predicted phase shifts for spinless and Dirac particles.

G. Field.

Lurié, D.: On the Pauli group. *Physica* 25, 1130—1141 (1960).

Im Anschluß an eine Arbeit von Wouthuysen [*Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. B.*, 61, 54—62 (1958)] wird eine Theorie der achtkomponentigen Spinoren untersucht. Dabei wird die Invarianz der Komponenten gegenüber der Pauli-Gruppe verwendet.

M. E. Mayer.

Beaufays, O.: Détermination algébrique d'un spineur par un pseudo-vecteur. *Acad. roy. Belgique. Bull. Cl. Sci., V. Sér.* 45, 859—875 (1960).

Dans une étude précédente (v. ce Zbl. 82, 219) l'A. a montré qu'à tout spineur ψ de l'espace-temps de Minkowski correspond un pseudo-vecteur

$$t_\mu = (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) / (\bar{\psi} \gamma_5 \psi) - (\bar{\psi} \gamma_5 \psi) / (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi).$$

Réciproquement, il montre ici que si t_μ est donné il existe deux spineurs ψ correspondant et que si le point à l'infini sur t_μ est donné il existe quatre spineurs auxquels correspond t_μ .

G. Petiau.

Newton, Roger G.: Analytic properties of radial wave functions. *J. math. Phys.* 1, 319—347; **Errata.** *Ibid* 452 (1960).

In der Entwicklung der Theorie der Dispersionsbeziehungen in quantisierten Feldtheorien ist es sehr nützlich, zuerst die entsprechenden Verhältnisse in nichtrelativistischen Potentialproblemen zu diskutieren. Der vorliegende zusammenfassende Artikel dient diesem Zweck. Die analytischen Eigenschaften der Wellenfunktion, der S Matrix und der Greenschen Funktionen der nichtrelativistischen Potentialstreuung mit lokalen Potentialen werden eingehend untersucht.

A. O. Barut.

Shimazu, Haruo: On the non-local boundary condition in quantum field theory. *Progress theor. Phys.* 23, 821—828 (1960).

Bekanntlich ist die Gupta-Bleulersehe lokale Formulierung der Quantenelektrodynamik mit einer indefiniten Metrik identisch mit der Dirac-Schwingerschen nichtlokalen Formulierung mit positiv definiter Metrik. In diesem Sinne wird in der vorliegenden Arbeit untersucht, was einer Theorie mit indefiniter Metrik und den Randbedingungen von Bogoljubov et al. (vgl. 1958 annual international conference of high energy physics in CERN, dies. Zbl. 88, 217) im Raum der physikalischen Zustände (positiv definiter Metrik) entspricht. Der Zustandsvektor Φ wird in der Form $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ zerlegt, wobei Φ_1 im Hilbertraum I (physikalische Zustände) und Φ_2 im Hilbertraum II (Zustände mit nicht positiv definiter Norm) liegt. Wenn Φ einer Schrödingergleichung genügt und man die Randbedingung $\Phi_2(\pm\infty) = \Phi_1(\pm\infty) = 0$ einführt, so kann man den Hamiltonoperator H_1 im Raum der physikalischen Zustände als eine Potenzreihe formal angeben. H_2 ist aber nicht nur nicht-lokal, sondern auch nicht hermitisch. Für ein einfaches Beispiel wird gezeigt, daß das Zeitintervall, in welchem die Norm von Φ_2 von eins verschieden ist, umgekehrt proportional der Breite ΔE des Wellenpaketes ist.

A. O. Barut.

Kolkunov, V. A., L. B. Okun' and A. P. Rudik: The singular points of some Feynman diagrams. *Soviet Phys., JETP* 11 (38), 664—670 (1960). Übersetzung von *Zurn. eksper. teor. Fiz.* 38, 877—881 (1960).

● Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, LXXV: Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs. Lille, 3—8 juin 1957. Paris: Centre National de la Recherche Scientifique 1958. 283 p.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

Wightman, A. S.: Quelques problèmes mathématique de la théorie quantique relativiste. Colloques internat. Centre Nat. Rech. Sci. **75**, 1—38 (1959).

Es wird eine axiomatische Begründung der lokalen Quantenfeldtheorien mit Hilfe der Distributionentheorie eingehend besprochen. Bezeichnet: (i) $S(\Lambda)$ eine endliche Darstellung der homogenen unimodularen (Lorentz'schen) Gruppe \mathcal{L} ; (ii) $D[i]$ die Gesamtheit der zu der $[i]$ -ten Darstellung gehörenden Folge der unendlich differenzierbaren Funktionen $f(x) = \{f^j(x); j = 1, 2, \dots, \dim [i]\}$ der vier-dimensionalen Weltpunkte; (iii) $f_{(a, \Lambda)}(x) = S(\Lambda^{-1})^T f(\Lambda^{-1}(x - a))$ die Transformierte von $f \in D[i]$ durch die inhomogene unimodulare Lorentz-Gruppe $\{a, \Lambda\} \rightarrow x' = \Lambda x + a$; (iv) $U(a, \Lambda)$ eine kontinuierliche Representation von $\{a, \Lambda\}$ in dem Hilbertschen Raum H , der zu nicht-negativen Eigenvektoren Ψ gehört (vorausgesetzt, daß ein Zustandsvektor Ψ_0 mit $U(a, \Lambda) \Psi_0 = \Psi_0$ existiert, durch den der Vakuumzustand des Feldes beschrieben wird). Die Feldoperatoren $T(f)$ mit $f \in D[i]$ sollen den folgenden Folgen der Axiome genügen: (I₁) Die Operatoren $T(f)$ und $T(f)^*$ mit $f \in D[i]$ haben einen gemeinsamen linearen Bereich D in H , so daß sich die Relationen $\Psi_0 \in D$, $U(a, \Lambda) D \subset D$, $T(f)D$ bzw. $T(f)^* D \subset D$ erfüllen lassen: (I₂) Der Operator $T(f)$ ist in D homogen und linear; (I₃) $T(f)$ hängt schwach-kontinuierlich von $f \in D[i]$ ab; d. h., wenn Φ und $\Psi \in D$ sind, dann bedeutet das skalare Produkt $(\Phi, T(f) \Psi)$ eine Schwartzsche Distribution; (II) Die Transformationsregel des Feldes: $U(a, \Lambda) T(f) U(a, \Lambda)^{-1} = T(f_{(a, \Lambda)})$ ist gültig in D ; (III) Wenn die Funktionen f^j und g^k ($j, k = 1, 2, \dots, \dim [i]$) der Folgen f bzw. $g \in D[i]$ der Relation $f^j(x) g^k(y)$ für die Weltpunkte x und y mit $(x - y)^2 \geq 0$ genügen, sollen $[T(f), T(g)] = 0$ und $[T(f), T(g)^*] = 0$ bestehen, wo $[\]$ üblicherweise den Kommutator bzw. den Antikommutator bedeutet; (IV) Für skalare neutrale Felder φ bestehen die asymptotischen Relationen $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} (\Phi, \varphi(d(t_0, \eta, \alpha)) \Psi) = (\Phi, \varphi^{in}(f) \Psi)$

bzw. $\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} (\Phi, \varphi(g(t_0, \eta, \alpha)) \Psi) = (\Phi, \varphi^{out}(f) \Psi)$, wo $\Phi, \Psi \in D$ und $f \in D[i]$ sind

$g(t_0, \eta, \alpha) = -2\eta^\mu \partial/\partial x^\mu \left[\int dx f(x) \Delta(x - y) \right] \alpha(\eta \cdot y - t_0) - \left[\int dx f(x) \Delta(x - y) \right] \alpha'(\eta \cdot y - t_0)$ bedeutet, η einen zeitartigen Einheitsvektor bzw. $\alpha(t)$ eine — außerhalb des Ursprung enthaltenden endlichen Intervalles verschwindende und unendlich differen-

zierbare — Funktion mit $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t) dt = 1$ bezeichnet, und $\varphi^{in}(f)$ und $\varphi^{out}(f)$

die entsprechenden Propagatoren des skalaren Feldes φ bedeuten. Dieses allgemeine Axiomensystem der lokalen Quantenfeldtheorien wird von dem Standpunkte aus untersucht, welche Folgerungen des Axiomensystems für die Struktur der Feldtheorie wichtig sind bzw. welche Folgerungen von speziellen — von dem Axiomensystem unabhängigen — dynamischen Voraussetzungen abhängen. Endlich wird die Haagsche Theorie [Danske Vid. Selsk., math.-Phys. Medd. **29**, No 12 (1955); s. auch D. Haag und A. S. Wightman, dies. Zbl. **48**, 443], weiterhin die Relation zwischen dem Axiomensystem und dem Teilchenbild der Felder besprochen. *J. I. Horváth.*

Haag, R.: Discussion des „axiomes“ et des propriétés asymptotiques d'une théorie des champs locale avec particules composées. Colloques internat. Centre Nat. Rech. Sci. **75**, 151—162 (1959).

Anknüpfend an die Arbeit von A. S. Wightman (s. vorstehendes Referat) wird die axiomatische Begründung der lokalen Quantentheorie der Felder eingehend besprochen. Verf. kritisiert insbesondere das asymptotische Axiom IV. von Wightman, dessen Struktur übermäßig kompliziert ist; deswegen wird vorgeschlagen, daß dieses Axiom durch eine Reihe von Axiomen ersetzt werden soll, an deren Spitze die vom physikalischen Standpunkte aus sehr bedeutungsvolle Kausalitätsbedingung steht. In der Theorie des Verf. lassen sich auch die zusammengesetzten Teilchen und damit auch die in Wechselwirkung stehenden Felder beschreiben. *J. I. Horváth.*

Barut, A.: Vacuum expectation values and analytic functions. On lectures by A. S. Wightman. *Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 14*, 192—196 (1959).

A simple introduction to the Wightman program including the Wightman axioms, regularity in the forward tube and extended tube; definition of Jost-points, local commutativity and the permuted tubes; weak local commutativity, holomorphy domains.

R. F. Streater.

Hove van, Léon: Quelques méthodes et problèmes de la théorie quantique des champs en interaction. *Colloques internat. Centre Nat. Rech. Sci. 75*, 39—55 (1959).

Die adiabatische, sowie die S -Matrixmethode und die Methode der asymptotischen Zustände der Quantenfeldtheorie werden diskutiert und verglichen. Dann wird die sog. „Störungsmethode der asymptotischen Zustände“ besprochen, welche früher vom Verf. schon vorgeschlagen war [*Physica 21*, 901—923 (1955); *22*, 343—354 (1956)].

J. I. Horváth.

Segal, I.-E.: Caractérisation mathématique des observables en théorie quantique des champs et ses conséquences pour la structure des particules libres. *Colloques internat. Centre Nat. Rech. Sci. 75*, 57—103 (1959).

Es wird die Quantentheorie der Felder mit Hilfe der auf einem Hilbertschen Raum definierten, absolutkontinuierlichen Distributionen begründet und die vorgeschlagene Theorie eingehend besprochen. Die angewandten Methoden werden sowohl vom mathematischen, als auch vom physikalischen Standpunkte aus diskutiert, doch werden die mathematischen Einzelheiten und Beweise nicht dargelegt [das findet man in einer anderen Arbeit des Verf.: *Trans. Amer. math. Soc. 88*, 12—41 (1958)]. — Nach einer Klassifizierung des auf einem Hilbertschen Raum definierten Boson- bzw. Fermionensystems werden die dynamischen Eigenschaften, die Formulierung unendlicher Operatoren, sowie das Kausalitätsproblem der Quantenfeldtheorien behandelt. Endlich wird die Theorie der freien Felder, sowie eine Systematisierung der Elementarteilchen vorgeschlagen (s. auch die Arbeiten des Verf., dies. Zbl. *34*, 66; *70*, 340; *73*, 94; *83*, 437)].

J. I. Horváth.

Jost, Res: Sur le théorème CTP. *Colloques internat. Centre Nat. Rech. Sci. 75*, 105—107 (1959).

Es wird darauf hingewiesen, daß ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Theorie der CTP Invarianz und der Hall-Wightmanschen Theorie (D. Hall-A. S. Wightman, dies. Zbl. *78*, 443) vorhanden ist (s. auch die in diesem Zbl. *85*, 433 besprochene Arbeit des Verf.).

J. I. Horváth.

Källén, Gunnar: L'électrodynamique quantique. *Colloques internat. Centre Nat. Rech. Sci. 75*, 109—117 (1959).

Es werden die wichtigsten und interessantesten Probleme der Quantenwechselwirkung von Elektronen- und elektromagnetischen Feldern kritisch dargestellt und vom mathematischen sowie physikalischen Standpunkte aus sehr gedankenreich besprochen.

J. I. Horváth.

Caianiello, E. R.: Les développements en série de perturbation. Les équations des champs et leur renormalisation. *Colloques internat. Centre Nat. Rech. Sci. 75*, 119—138 (1959).

Es wird eine mathematisch exakte Fassung der Renormalisationsmethode der Quantentheorie der Felder vorgeschlagen, um den divergenten Integralen der Theorie auszuweichen und die ungelösten Probleme der feldtheoretischen Methode zu behandeln. Diese Methode des Verf. wurde früher in einer Reihe von Arbeiten (dies. Zbl. *53*, 171, *57*, 436; *66*, 441; *77*, 217) publiziert.

J. I. Horváth.

Friedrichs, K. O.: Remarques sur l'intégration des fonctionnelles dans l'espace d'Hilbert. *Colloques internat. Centre Nat. Rech. Sci. 75*, 139—145 (1959).

Vom Standpunkt der Quantenfeldtheorie aus ist die Anwendung der Integrale der Funktionale von besonderer Wichtigkeit. Das hängt damit zusammen, daß das vollständige System der Zustandsgrößen der Felder aus unendlich vielen.

auf einer raumartigen Hyperfläche untereinander vertauschbaren Operatoren [d. h., z. B. im Falle eines skalaren Mesonenfeldes aus den Werten des Potentials in verschiedenen Punkten der Fläche $\Phi(x)$] besteht. Das bedeutet aber, daß die Schrödingersche Wahrscheinlichkeitsamplitude des Systems ψ ein Funktional der Zustandsgröße $\Phi(\cdot)$ — d. h., $\Phi(\cdot) = \psi[\Phi(\cdot)]$ — ist und die physikalischen Größen des Systems lassen sich in der Form

$$I[\psi] = \int \int \dots \int_s |\psi[\Phi(\cdot)]|^2 d\Phi(x_1) d\Phi(x_2) \dots$$

darstellen, wo bei der Integration eine Mannigfaltigkeit des Funktionalenraumes betrachtet werden soll. Es wird insbesondere das Funktionalintegral

$$I(f) = \int \int \dots \int |f(\Phi)|^2 \exp \left\{ - \int \Phi^2 dx \right\} \sum_x \left(\frac{dx}{\pi} \right)^{1/2} \delta\Phi(x)$$

behandelt (s. auch Verf. u. a., dies. Zbl. 77, 313; 89, 316).

J. I. Horváth.

Salam, Abdus: Relation entre les théories scalaires et pseudoscalaires. Colloques internat. Centre Nat. Rech. Sci. 75, 147—149 (1959).

Bekanntlich ist das Vorzeichen des zweiten (logarithmisch divergenten) Störungsgliedes für Skalar- und Pseudo-Skalarfelder verschieden. Es wird darauf hingewiesen, daß dieser Vorzeichenwechsel nicht notwendigerweise bei allen höheren Ordnungen vorkommt.

J. I. Horváth.

Ruijgrok, Th. W.: Un modèle exactement renormalisable de champs quantifiés. Colloques internat. Centre Nat. Rech. Sci. 75, 163—168 (1959).

Mit Hilfe des sog. „zyklischen Modells“ wird die Wechselwirkung zwischen schweren Teilchen und θ -Mesonen untersucht. Der Übergang auf die Darstellung der asymptotischen stationären Zustände hat die Folge, daß das Renormalisationsverfahren unmittelbar die Schrödingersche Gleichung des Systems beeinflusst und dadurch divergente Integrale in der sukzessiven Approximation nicht vorkommen. Es ist aber problematisch, ob die Geisterzustände bei diesem Modell vorkommen oder automatisch eliminiert werden.

J. I. Horváth.

Bremermann, H. J., R. Oehme et J. G. Taylor: Une démonstration possible des relations de dispersion. Colloques internat. Centre Nat. Rech. Sci. 75, 169—178 (1959).

Die Dispersionsrelationen der Quantentheorie der Felder werden mit Hilfe der Methode der analytischen Fortsetzung bewiesen.

J. I. Horváth.

Valatin, J. G.: Sur les divergences dans la théorie quantique des champs. Colloques internat. Centre Nat. Rech. Sci. 75, 179—183 (1959).

Um die mathematisch inkonsequente Operation der Multiplikation und Division mit der unendlichen Renormalisationskonstanten zu vermeiden wird die Multiplikation der Operatoren der Quantenfeldtheorie mit einer der Diracschen Approximationsverfahren analogen Methode definiert. Diese Methode des Verf. wurde früher schon vorgeschlagen (dies. Zbl. 57, 439).

J. I. Horváth.

Barut, A.: Relativistic invariance and quantum mechanics. On lectures by A. S. Wightman. Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 14, 81—94 (1959).

This is an introduction to the Wigner-Bargmann-Wightman view of relativistic invariance in quantum mechanics, including: bodily and subjective identity; active and passive points of view; physically realizable states and super-selection rules; coherent sub-spaces of Hilbert space; the most general representation of the translation group; the homogeneous Lorentz group and the little groups. It is shown that every continuous unitary representation of the covering group of the connected component of the inhomogeneous Lorentz group can be labelled by a representation

of the little group L_k for each 4-vector k , and a measure $\mu(k)$ over R^4 . Some examples of physical interest are discussed. By considering inversions, representations are divided into 4 types which give rise to a super-selection rule. It is proved that if the energy is bounded below, then space-inversion must be represented by a unitary operator, and time inversion by an antiunitary operator. *R. F. Streater.*

Michel, L.: Covariant description of polarization. *Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 14, 95—104 (1959).*

Der Beitrag stellt eine Niederschrift einer auf dem Lehrgang über mathematische Probleme der Quantentheorie der Elementarteilchen und der Felder in Varenna im Sommer 1958 gehaltenen Vorlesung dar. Ausgehend von den Grundbegriffen der Quantenmechanik wird die allgemeine gruppentheoretische Theorie des Spins und der polarisierten Zustände aufgebaut und auf die physikalisch interessierenden Spezialfälle angewendet. Die Darstellung ist sehr gedrängt, oft fast stichwortartig, was die Verständlichkeit etwas beeinträchtigt. *F. Engelmann.*

Haag, R.: The framework of quantum field theory. *Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 14, 131—152 (1959).*

This is a review of the "axiomatic method" approach in quantum theory, in which the following principles are incorporated: (1) the basic mathematics of Quantum Physics, (2) invariance under inhomogeneous Lorentz transformations, (3) all states of a system correspond to collision processes between a (finite) number of particles ("spectral conditions"). After a discussion of the spectral conditions and their consequences, the author considers the question of field operators and their properties, and their connection with the S -matrix. *G. Field.*

Pauli, W. and B. Touschek: Report and comment on F. Gürsey's "Group structure of elementary particles". *Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 14, 205—211 (1959).*

Starting with some basic fields, e. g. two lepton and one baryon field, it is possible to define Lorentz invariant rotation groups which transform the components among themselves. It is possible to construct compound particles from the fields, e. g. isospinor bosons and iso-vector bosons; however, the components are not eigenstates of parity. Touschek generalizes this by considering n q -number fields, and all symmetry groups which 1. commute with the proper Lorentz group, 2. do not involve the coordinates, 3. leave the canonical commutation relations invariant. For $n = 1, 2$ the only groups are the lepton gauge and the Pauli group respectively. For the case $n = 4$ the author considers subgroups which also permit the definition of a mass operator. It is shown that isotopic spin space can be constructed, and that parity assignments of the particles are not arbitrary. *R. F. Streater.*

Corinaldesi, E.: An introduction to dispersion relations. *Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 14, 369—384 (1959).*

Thirring, W.: Dispersion relations, *Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 14, 385—400 (1959).*

Puppi, G.: Fit to dispersion relations of pion-nucleon scattering. *Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 14, 401—407 (1959).*

These three papers from the subject matter of expository lectures delivered at the International School of Physics held under the auspices of the Italian Physical Society during the summer of 1958. The first paper deals with the physical and mathematical background of the Theory of Dispersion relations. Dispersion relation is shown to be a logical consequence of the theory of Complex Variables by connecting causality conditions with the analyticity properties. The appendix contains an application to non-relativistic potential scattering. The author must be congratulated for the extraordinary clarity which is usually lacking in papers dealing with dispersion relations. The second paper is confined to the dispersion relations for two-particle scattering. The author gives a lucid discussion on the various steps that lead to the

dispersion relations for Compton scattering by nucleons and pion nucleon scattering, a noteworthy feature being a short discussion on the justification of the well-known interchange of order of integration which has been originally adopted by Goldberger (dies. Zbl. 67, 448) and has been the usual target of attack. The last paper by Puppi deals with the applications of the dispersion relation. Sign ambiguity of the phase shifts and Fermi-Yang ambiguity are discussed. The various methods of determination of the coupling constants are explained with remarkable clarity. The three papers will no doubt be a great boon to any beginner in the theory and application of dispersion relations.

S. K. Srinivasan.

Gürsey, F.: On the symmetries of strong and weak interactions. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 16, 230—240 (1960).

As a starting point, the properties of the γ_5 -dependent rotation group in the isotopic spin spaces are investigated: they are represented by the transformation

$$1. \quad G'_3: \psi \rightarrow \exp(i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}) \cdot \psi \quad \psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

(p, n) stand for proton, neutron and ψ for the nucleon field. The G'_3 transformation is not allowed for a Dirac particle taking a $m \neq 0$ mass: however, it can be performed if one poses $\vec{\omega} \equiv \vec{\varphi}$, where $\vec{\varphi}$ stands for a pseudoscalar 1-isospin boson field. After performing the transformation 1., the Dirac equation for the ψ field becomes an equation similar to the well known non linear Dyson-Foldy one of nucleons subject to a pseudovector interaction with the pion field. But, separating ψ in left- and right-handed fields by means of the $(1 \pm \gamma_5)/2$ projections, it is rather easy to show how G'_3 turns out the subgroup of a G_4 group of which two subgroups G'_3 ($i = 1, 2$) exist that act on the subspaces of the left- and right-fields. A representation of such subgroups is also given. The (Σ, Λ) -hyperons are interpreted as tensorial representations, nucleons and cascade particles as vector representations of the G_4 group. A continuous hypercharge transformation H is also defined by means of a unitary transformation: it takes into account both the charge conservation and the conservation of the 3rd component of the isospin. H turns out to be a subgroup of G_4 . In such a way, G_4 transformation invariance gives rise to charge and strangeness conservation as well as to some peculiar symmetries of the weak interactions. This fact justifies the hope of the author, that is of deducing the properties of the weak interactions from those (at least, in part) of the strong ones. In fact, the most interesting part of the paper is concerned with the properties which are missing (or hold) by going off to the weak interactions, if one assumes that the strong ones are invariant under H and G_3 transformations. To this scope, a switching procedure is followed, in which G_4 invariance is approximately valid, and G_3 and H invariance is assumed to hold strictly in any case. The aim of the method is to show that weak interactions are effectively G_3 invariant (K — mesons are also investigated in the general scheme, which includes the leptons' weak couplings.)

L. Tenaglia.

Ahmavaara, Y.: Chirality invariance and the Lorentz group. *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, Ser. A VI. 48, 22 p. (1960).

Um die „Handlichkeitstransformation“ (sog. chirality transformation: $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\gamma_5 \lambda} \psi$, wo ψ den Feldoperator, γ_5 das Produkt der Diracschen Matrizen: $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ und λ einen reellen Parameter bedeutet) und die Invarianz gegenüber dieser Transformation rein gruppentheoretisch (d. h. unabhängig von einer speziellen Darstellung) zu erklären, wird die Fortsetzung der homogenen Lorentz-Gruppe in dem Parameterraum $[\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3\}]$ der Gruppe mit Hilfe der Methoden der Lieschen Algebra sehr gedankenreich durchgeführt. Die Elemente $a(\Phi) \equiv a(\varphi_k, \chi_k) = \varphi_k j_k + \chi_k l_k$ der Lie-Algebra (wo φ_k und χ_k reelle Parameter, sowie die Operatoren $j_k = x_i \partial_i - x_l \partial_l$ (Zykl. Perm für $k, i, l = 1, 2, 3$) bzw. $l_k = x_k \partial_0 - x_0 \partial_k$ die Erzeugende der speziellen Lorentz-Transformation und x_0 bzw. x_k die zeitartigen

bzw. raumartigen Koordinaten der Raum-Zeitwelt bedeuten) lassen sich homomorph auf die Gruppe der Lorentz-Operatoren $\{L(\Phi) = e^{a(\Phi)}\}$ abbilden. Wegen der Periodizität der Operatoren $L(\Phi)$ kann man den Parameterraum in Gebiete $\{\Phi\} = \{\Phi\}_0, \{\Phi\}', \{\Phi\}'' \dots$ einteilen. Diese Gebiete sind zwischen einander und mit der homogenen eigen-Lorentz-Gruppe isomorph und ihre Vereinigung $\{\Phi\} = \{\Phi\}^0 \cup \{\Phi\}' \cup \{\Phi\}'' \cup \dots$ bildet einen abgeschlossenen linearen Raum. Die adjungierten Operatoren $A(\tilde{\Phi}) = \exp \{\tilde{q}_k A(j_k) + \tilde{\chi}_k A(l_k)\}$ mit $A(j_k) = (\varphi_i \partial/\partial\varphi_i - \varphi_l \partial/\partial\varphi_l) + (\chi_i \partial/\partial\chi_i - \chi_l \partial/\partial\chi_l)$ bzw. $A(l_k) = (\varphi_i \partial/\partial\chi_l + \chi_l \partial/\partial\varphi_i) - (\varphi_l \partial/\partial\chi_i + \chi_i \partial/\partial\varphi_l)$ (Zykl.) bedeuten eine Transformation des Raumes $\{\Phi\}$ an sich und die Klasseneinteilung der Gruppe dieser Operatoren läßt sich mit Hilfe der invarianten quadratischen Formen $f_1 = \varphi_k \chi_k$ bzw. $f_2 = \varphi_k \varphi_k - \chi_k \chi_k$ durchführen. Betrachtet man die kontinuierlichen Transformationen, die die derart eingeführten Klassen der Operatoren $A(\tilde{\Phi})$ permutieren und den Bedingungen $A(f_1) = F(f_1, f_2)$ und $A(f_2) = G(f_1, f_2)$ [mit willkürlichen kontinuierlichen Funktionen F und G] erfüllen; sowie die Inversion I in dem Parameterraum $\{\Phi\}$, dann läßt sich die mit der homogenen eigen-Lorentz-Transformation isomorphe Gruppe der Lorentz-Operatoren durch die Berücksichtigung der Inversionen zu der Transformationsgruppe $\{A, I\}$ erweitern, welche als Fortsetzung der vollständigen homogenen Lorentz-Gruppe betrachtet werden kann. Endlich wird gezeigt, daß einerseits $F = \alpha f_1 + \beta f_2$ sein soll, andererseits die Operatoren $A(x) = \varphi_k \partial/\partial\chi_k - \chi_k \partial/\partial\varphi_k$ die Vertauschungsrelationen $[A(x), A(j_k)] = 0$, $[A(x), A(l_k)] = 0$ mit $k = 1, 2, 3$ sowie $A(x) I + I A(x) = 0$ erfüllen, so daß sich die Operatoren $A(x)$ als Erzeugende der Handlichkeitstransformation interpretieren lassen. Schließlich wird diese Interpretation und ihre Darstellung im Falle des Diracschen Spinorfeldes eingehend diskutiert.

J. I. Horváth.

Volkov, D. V.: On the quantization of half-integer spin fields. Soviet Phys., JETP 36 (9), 1107—1111 (1959), Übersetzung von Žurn. éksper. teor. Fiz. 36, 1560—1566 (1959).

A method of quantizing half-integer spin fields is considered, for which the maximal occupation number is two. The method is consistent with the requirements of relativistic causality, positive-definiteness of the energy for non-interacting fields. Schwinger's Lagrangian formulation and invariance under TCP transformations.

G. Field.

Federbush, Paul G. and Kenneth A. Johnson: Uniqueness property of the two-fold vacuum expectation value. Phys. Review, II. Ser. 120, 1926 (1960).

It is shown under general assumptions that if the one-body Green's function equals its free-field value the theory is that of free field.

Zusammenfassung der Autoren.

Froissart, M.: Covariant formalism of a field with indefinite metric. Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 14, 197—204 (1959).

A covariant formalism is set up for free fields which contain „ghost” states, i. e. states with zero normalisation. A model of a „dipole-ghost” field is derived and the exclusion of ghost states from the S -matrix is discussed. Finally, the problem of complex masses is briefly raised.

G. Field.

Vaks, V. G.: On theories with an indefinite metric. Soviet Phys., JETP 37 (10), 332—334 (1960), Übersetzung von Žurn. éksper. teor. Fiz. 37, 467—469 (1959).

The conditions of unitarity and macro-causality for the Lee model with an indefinite metric are investigated.

Zusammenfassung des Autors.

Kazes, E. and C. Kaufman: On the indefinite metric in the Lee model. Nuovo Cimento, X. Ser. 17, 616—618 (1960).

Verff. untersuchen das wohlbekannte Leeseche Modell und machen explizit die Voraussetzung, daß die Kopplungskonstante rein imaginär ist. (Diese Voraussetzung wird auch dann gemacht, wenn eine reelle Kopplungskonstante im Prinzip möglich wäre. Die physikalische Begründung dieser Annahme ist nicht unmittelbar evident.) Sie zeigen dann, daß die Metrik nicht eindeutig definiert ist, sondern daß willkürliche

Phasen hinzugefügt werden können. Die physikalische Interpretation des Modells, insbesondere die Wahrscheinlichkeitserhaltung, wird von diesen Phasen nicht beeinflusst.

G. Källén.

Majer (Mayer), M. É. and D. V. Širkov (Shirkov): On Thirring's two-dimensional model. Doklady Akad. Nauk SSSR 122, 45—47 (1958) [Russisch].

Dans la théorie de W. E. Thirring [Ann. of phys. 3, 91—112 (1958)] avec un Lagrangien d'interaction du type $\mathcal{L}(x) = g \bar{\psi}(x) \sigma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(x) \sigma_\mu \psi(x)$ les AA. étudient la diffusion de deux particules de masse nulle en utilisant la méthode de perturbation usuelle. L'approximation du second ordre de la matrice S ne contient pas de divergence ultraviolette. Cette approximation est améliorée par la méthode du groupe de renormalisation. On montre notamment qu'il n'y a pas renormalisation de la charge g .

G. Petiau.

Lee, B. W. and A. Klein: Application of the Chew-Low formalism of multi-channel reactions. Nuovo Cimento, X. Ser. 13, 891—908 (1959).

Es wird die Low-Gleichung für einen nichtrelativistischen Streuprozeß untersucht, für den Fall eines Modelles bei dem die Streuquelle mehrere Zustände besitzt und die mittlere Wechselwirkung zwischen Quelle und Partikel in Faktoren zerlegt werden kann. Die Verff. geben eine Ableitung des optischen Theorems und lösen die Low-Gleichung nach einer Methode von L. Castellejo, R. H. Dalitz und F. J. Dyson (dies. Zbl. 70, 226). Außerdem wird das Resonanzphänomen studiert und die Breit-Wigner Formel abgeleitet. Es zeigt sich, daß die Methode eine allgemeinere Anwendung gestattet.

P. Urban.

Klarsfeld, S.: L'intégration des équations de la mésodynamique classique. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. şti., Sect. Şti. mat. fiz. 9, 175—185, russ. und französ. Zusammenfassung 184 (1957) [Rumänisch].

Die Greensche Funktion der Klein-Gordon-Gleichung wird hergeleitet und auf die Berechnung des Feldes einer bewegten Punktquelle (Nukleon) angewandt.

Walter Franz.

Sokolov, A. A.: Theory of Dirac particles with oriented spins and parity non-conservation. Nuclear Phys. 9, 420—425 (1959).

The theory of Dirac particles with oriented spin [see A. A. Sokolov, this Zbl. 80, 230 and Sokolov, Kerimov, Ann. d. Physik VII. F. 2, 46—53 (1958)] is used to investigate the Lüders-Pauli (CPT) theorem, with particular reference to β -decay. Taking experimental evidence into account, the theory would demand left screw (Lee and Yang) for S, T coupling for an antineutrino and right screw (Feynman and Gell-Mann) for V, A coupling. For a combination of these types of interaction, it may be necessary to introduce two different types of antineutrinos.

G. Field.

Medvedev, B. V. and M. K. Polivanov: A spectral condition as a method of renormalization. Soviet Phys., Doklady 4, 829—832 (1960), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 127, 537—540 (1959).

Im wohlbekannten feldtheoretischen Modell von T. D. Lee (dies. Zbl. 56, 232) gibt es drei Arten von Teilchen, V -Teilchen, N -Teilchen und θ -Teilchen, die mit einander in solcher Weise wechselwirken, daß einige einfache Zustände des Modells exakt berechnet werden können. Man findet z. B. daß die Größe der renormierten Kopplungskonstante nicht beliebig sein kann, sondern daß ein kritischer Wert nicht überschritten werden darf, ohne daß das Modell anomale, sogenannte Geisterzustände enthält, die eine negative Wahrscheinlichkeit tragen (Källén, Pauli, dies. Zbl. 66, 443). Die Größe der kritischen Kopplung hängt in sehr wesentlicher Weise von einer Abschneidefunktion ab, die in der Wechselwirkung vorkommt. In einer Arbeit hat P. Redmond eine neue Näherungsmethode einer Feldtheorie vorgeschlagen, wo die gewöhnliche störungstheoretische Entwicklung in solcher Weise modifiziert wird, daß einige spezielle Graphen exakt summiert werden während andere vernachlässigt

werden (dies. Zbl. 85, 435). Die Näherungsmethode ist in solcher Weise konstruiert worden, daß die erhaltenen Fortpflanzungsfunktionen immer das korrekte analytische Verhalten zeigen, d. h. so, daß keine Geisterzustände auftreten. In der vorliegenden Arbeit wollen die Verff. untersuchen, wie diese Näherungsmethode für das Leesche Modell funktioniert, wo die exakte Lösung bekannt ist. Insbesondere zeigen sie, daß das Redmondsche Verfahren in diesem speziellen Fall bedeutet, daß die Beiträge des Geisterzustandes zur Fortpflanzungsfunktion des V -Teilchens ganz einfach weggestrichen werden. Sie zeigen weiter, daß man dasselbe Ergebnis durch die Ersetzung der ursprünglichen Abschneidefunktion in der Wechselwirkung mit einer modifizierten Abschneidefunktion erhalten kann. Die neue Abschneidefunktion ist so konstruiert worden, daß der kritische Wert der Kopplungskonstante immer größer als die renormierte Kopplungskonstante wird, weshalb keine Geisterzustände auftreten.

G. Källén.

Ansel'm, A. A.: A model of a field theory with nonvanishing renormalized charge. Soviet Phys., JETP 36 (9), 608—611 (1959), Übersetzung von Žurn. éksp. teor. Fiz. 36, 863—868 (1959).

Verf. betrachtet zwei Spinorfelder in einer zweidimensionalen Welt (eine Raumdimension und eine Zeitdimension), die mit einander und mit sich selbst wechselwirken. In gewissen Sinne ist dies eine Verallgemeinerung des Thirring'schen Modells eines mit sich selbst wechselwirkenden Spinorfeldes in einer zweidimensionalen Welt [Ann. of Phys. 3, 91—112 (1958)]. Das hier betrachtete Modell wird nicht exakt gelöst, sondern der Verf. benützt eine Näherungsmethode, die ursprünglich in einem anderen Zusammenhang von Djatlov, Sudakov und Ter-Matrosjan entwickelt worden ist [Soviet Phys., JETP 5, 631—642 (1957) bzw. Žurn. éksp. teor. Fiz. 32, 767—780 (1957)]. Die Methode besteht im wesentlichen darin, daß einige spezielle Graphen für das asymptotische Verhalten der Theorie als besonders wichtig angesehen werden und dazu benützt werden, Integralgleichungen für gewisse Spektralfunktionen niederzuschreiben. Die Integralgleichungen können sowohl in dem ursprünglich von Djatlov, Sudakov und Ter-Matrosjan betrachteten Fall wie in dem hier betrachteten Modell, exakt gelöst werden. Das Hauptergebnis der Analyse von Djatlov, Sudakov und Ter-Matrosjan war, daß die renormierte Kopplungskonstante der Theorie exakt verschwinden müßte, damit das Ergebnis physikalisch konsistent wäre. In dem hier behandelten Modell findet der Verf. aber ein qualitativ anderes Ergebnis und zeigt speziell, daß es hier nicht notwendig ist, (auch nicht in der betrachteten Näherung) die renormierte Kopplungskonstante gleich Null zu setzen.

G. Källén.

Moffat, John W.: Regularized vacuum expectation values in quantum field theory. Nuclear Phys. 16, 304—330 (1960).

Es wird eine formale Regularisation der Spektralfunktionen des Heisenberg-Bildes eingeführt, welche es ermöglicht, die Rechnungen in eindeutiger eichinvarianter Form durchzuführen. Verf. behauptet, daß mit dieser Methode Källén's Beweis, daß wenigstens eine Renormierungskonstante unendlich ist, glaubwürdiger wird.

M. E. Mayer.

Taylor, J. G. and A. E. A. Warburton: Complex singularities of partial-wave amplitudes in perturbation theory. Phys. Review, II. Ser. 120, 1506—1507 (1960).

We show that the complex singularities which invalidate Mandelstam's representation do not cause complex singularities of partial wave amplitudes for two-particle scattering processes, except for the expected "kinematic" complex branch points. Zusammenfassung der Autoren.

Oehme, R.: Structure singularities of electromagnetic form factors. Nuovo Cimento, X. Ser. 13, 778—789 (1959).

In local field theories the form factors of particles can have singularities which are characteristic for the structure of these particles as composite systems. These "structure singularities" are studied with the help of examples from perturbation

theory. Their mathematical properties are described for real and complex values of the mass variable, and their physical implications are discussed. (Author's Abstract)

G. Field.

● **Hamilton, J.: The theory of elementary particles.** (Internat. Ser. of Monographs on Physics.) Oxford: Clarendon Press; London: Oxford University Press 1959. XII, 482 p. 75 s. net.

Der Verf. versucht eine sehr vollständige und — soweit es auf einer endlichen Zahl von Seiten möglich ist — ausführliche Beschreibung der Methoden zu geben, die in der Physik der Elementarteilchen Anwendung gefunden haben oder vorge schlagen worden sind. Es werden dabei nicht nur verwickelte mathematische Methoden angegeben, sondern der Verf. bemüht sich wirklich darum, alle die Hilfsmittel wenigstens zu erwähnen, die für den auf diesem Gebiet praktisch arbeitenden Physiker nützlich sind. Selbstverständlich werden in diesem Buch die quantisierten Feldtheorien behandelt, aber auch mehr phänomenologische Methoden, die sich auf einfache Symmetrieüberlegungen stützen, werden diskutiert. So sind z. B. mehrere Seiten der elementaren Theorie des Impulsmoments gewidmet. Clebsch-Gordan- und Racah-Koeffizienten werden nachhereingeführt, und ihre Anwendung bei der Streuung und dem Zerfall von polarisierten Teilchen recht ausführlich beschrieben. Übrigens wird ein ganzes Kapitel für die Analysis von Streuexperimenten mit polarisierten Teilchen gebraucht, wobei auch die statistische Dichtematrix eingeführt und angewendet wird. Es gibt wohl kein anderes Buch, in dem so verschiedene Sachen wie z. B. die Schwingersche Variationsmethode für die Feldquantisierung und die elementare Theorie der Kugelfunktionen behandelt werden. Eben diese Breite der Darstellung bringt es aber mit sich, daß die Diskussion an mehreren Stellen ein wenig oberflächlich wird, und daß die in den verschiedenen Methoden vorkommenden Schwierigkeiten manchmal nur in einer Fußnote — oder überhaupt nicht — erwähnt werden. Als Beispiel nehmen wir die Behandlung der Nebenbedingung in der Quantenelektrodynamik. Der Verf. schreibt die Nebenbedingung in der Gupta-Bleuler Form $\partial_\nu A_\nu^{(+)}(x) |\psi\rangle = 0$, aber ohne daß die von diesen Autoren benutzte indefinite Metrik explizit diskutiert wird. Eine Fußnote (S. 95) erweckt sogar den Eindruck, daß der Verf. meint, die indefinite Metrik wäre nur eine unnötige Komplikation, und man sollte lieber ohne sie arbeiten. Der Ref. meint hierzu, daß dies an sich wohl möglich wäre, aber daß die so konstruierte Methode weder die Einfachheit der ursprünglichen Fermischen Methode, wo die Nebenbedingung nicht nur für positive Frequenzen verlangt wird, noch die logische Konsistenz der vollständigen Gupta-Bleuler-Methode [normierbare Zustandsvektoren, exakte Gültigkeit der Gleichung $\langle 0 | \{A_\mu(x), A_\nu(x')\} | 0 \rangle = \delta_{\mu\nu} D^{(1)}(x' - x)$ usw.] hätte. Als zweites Beispiel sei die Behandlung der Zweikomponententheorie der Neutrinos erwähnt. Auf S. 153 gibt es eine Fußnote, aus welcher man den Eindruck bekommt, daß diese Theorie von der Majoranaschen Theorie wesentlich verschieden wäre, da die eine invariant bei Spiegelungen sei und die andere nicht. Bekanntlich sind aber die zwei Theorien einander vollständig äquivalent (vgl. J. Serpe, dies. Zbl. 47, 215). Es handelt sich nur um zwei verschiedene Definitionen der Raumspiegelung in den zwei Theorien und zwar so, daß dieselbe Transformation in der einen Theorie als Raumspiegelung allein und in der anderen als das Produkt einer Raumspiegelung und einer Ladungskonjugation aufgefaßt wird. In diesem Zusammenhang bemerkt man, daß die Arbeit, in der H. Weyl ursprünglich die Zweikomponententheorie eingeführt hat [Z. Phys. 56, 330—352 (1929)], nicht zitiert wird, wohl aber neuere Arbeiten, in denen verschiedene Autoren unabhängig von einander diese Theorie „entdeckt“ haben. Das Kapitel der Renormierung behandelt die Technik der Feynman-Dyson-Graphen. An sich ist es sehr vernünftig, daß ein großer Teil des Buches sich mit der Quantenelektrodynamik beschäftigt, wo diese Methoden ihre hauptsächliche Anwendung gefunden haben. Doch hört fast bei jedem Punkt die Diskussion dort auf, wo die

wirklichen Schwierigkeiten anfangen. In diesem Kapitel gibt es aber recht vollständige Literaturhinweise, weshalb der Leser hier ohne allzu große Mühe das aufsuchen kann, was er in diesem Buch nicht lernen kann. Ähnliche Beispiele können an mehreren Stellen gefunden werden, aber die oben erwähnten seien für den Zweck dieser Besprechung hinreichend.

G. Källén.

Yamaguchi, Y.: A composite theory of elementary particles. Suppl. Progress theor. Phys. Nr. 11, 1—36 (1959).

Es wird eine „composite“-Theorie der Elementarteilchen entworfen, die die Teilchen p , n , Λ und ν , e , μ als fundamental ansieht. Hinsichtlich der Baryonen handelt es sich um einen Spezialfall des Sakata-Modells [Progress theor. Phys. 16, 386—687 (1956)]; der Ausdehnung auf die Leptonen liegt eine innere Analogie zwischen den beiden fundamentalen Teilchentripeln zugrunde. An Wechselwirkungen werden sehr starke, mittelstarke sowie elektromagnetische und schwache eingeführt, die sich durch ihre Symmetrieeigenschaften unterscheiden. Während für die mittelstarken Wechselwirkungen Ladungsunabhängigkeit vorausgesetzt wird, werden die sehr starken Wechselwirkungen „global“ symmetrisch angesetzt, was hier durch vollständige Symmetrie gegenüber Vertauschungen von p , n und Λ definiert ist. Diese wirken nur zwischen den Baryonen und sind im wesentlichen sowohl für die Massenwerte der fundamentalen Baryonen als auch für ihre Bindung zu weiteren Baryonen oder Mesonen verantwortlich, während die mittelstarken Wechselwirkungen die Massenaufspaltung von n und Λ , von π und K , sowie von e und μ liefern. Die Theorie enthält über die bekannten Teilchen hinaus weitere Baryonen und Mesonen, deren Existenz zumindest als Resonanzzustand in Streuprozessen einer experimentellen Prüfung zugänglich wäre. Außerdem sind Spekulationen über die Möglichkeit der Existenz und die Eigenschaften von überschwachen Wechselwirkungen angefügt, die die Stabilität der Materie und die Ladungserhaltung durchbrechen.

F. Engelmann.

Yamaguchi, Y.: A model of strong interactions. Suppl. Progress theor. Phys. Nr. 11, 37—51 (1959).

Um eine quantitative Durchführung der Elementarteilchentheorie des Verf. (siehe vorstehendes Referat) zu ermöglichen, wird für die starken Wechselwirkungen zwischen Mesonen und Mesonen sowie zwischen Mesonen und Baryonen eine lokale, Yukawa-artige Beschreibung eingeführt, die sich in Übereinstimmung mit dieser Theorie befindet. Im wesentlichen wird die „globale Näherung“ untersucht, was einer Berücksichtigung nur der sehr starken Wechselwirkungen entspricht. Ihre globale Symmetrie wird durch Einführung einer neuen Symmetrietransformation, der G -Transformation von Baryonen und Mesonen, berücksichtigt. Es ergeben sich interessante Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Meson-Baryon-Wechselwirkungskonstanten.

F. Engelmann.

Salam, Abdus and J. C. Ward: Weak and electromagnetic interactions. Nuovo Cimento, X. Ser. 11, 568—577 (1959).

Einführung eines dreidimensionalen Ladungsraumes, in dem z. B. (e^+ , ν , e^-) zu einem Vektor zusammengefaßt sind. Forderung der Invarianz gegen Drehungen in diesem Raum, d. h. verallgemeinerte Eichtransformationen. Dies führt zur Einführung dreier Felder mit Spin 1, von denen eines mit dem elektromagnetischen Feld identifiziert wird. Die beiden geladenen Vektor-Bosonen vermitteln die schwachen Wechselwirkungen, die auf diese Weise [analog wie bei J. Schwinger, Ann. of Phys. 2, 407—434 (1957)] mit der elektromagnetischen Wechselwirkung zusammengefaßt werden. Eine γ_5 -Symmetrisierung schließlich gibt paritätsverletzende Terme für die schwachen Wechselwirkungen, während die elektromagnetische Wechselwirkung paritätserhaltend bleibt.

G. Grawert.

Bollini, C. G.: On the coupling of the elementary particles with the electromagnetic field. Nuovo Cimento, X. Ser. 14, 560—570 (1959).

L'A. introduit une interaction électromagnétique dans la forme de théorie générale des particules de spin quelconque qu'il a introduite précédemment (ce Zbl. 84, 226, 85, 221). Dans cette théorie les particules à spin sont décrites par un spineur général satisfaisant à l'équation de Klein-Gordon et à des conditions supplémentaires considérées comme contraintes. L'interaction est introduite en tenant compte de ces contraintes et reste invariante de jauge. La théorie obtenue est renormalisable et redonne les résultats connus de la théorie de Dirac dans le cas du spin $\hbar/2$.

G. Petiau.

Granovskij (Granovskii), Ja. I. (Ya. I.): The mass spectrum of mesons in Heisenberg's theory. Soviet Phys., JETP 36 (9), 819—822 (1959), Übersetzung von Žurn. eksper. teor. Fiz. 36, 1154—1158 (1959).

Verf. berechnet für die verallgemeinerte Heisenberg-Gleichung $\gamma_\nu \partial\psi/\partial x_\nu \pm \hbar^2 O_n \psi (\bar{\psi} O_n \psi) = 0$, wobei O_n die 5 grundlegenden Spinoperatoren $O_n = 1, \gamma_\mu, i\gamma_\mu\gamma_\nu, i\gamma_5\gamma_\mu, \gamma_5$ bedeutet, die Massenwerte der Mesonen in 1. Tamm-Dancoff-Näherung. Die gefundenen Werte liegen für den skalaren Fall ($O_n = 1$) den wahren Mesonenmassen am nächsten. Auch das alte „realistische Modell“ Heisenbergs, das einen ersten Versuch darstellte, die Isospineigenschaften in die Theorie einzubauen, wird betrachtet mit dem Ergebnis, daß die Mesonenmassen hier gegenüber dem einfachen Fall nicht wesentlich modifiziert sind. In der neuen Form der Heisenbergschen Theorie (s. Dürr, Heisenberg u. a., dies. Zbl. 88, 224) zeigt sich jedoch, daß gerade der pseudovektorielle Fall allen physikalischen Erhaltungssätzen Rechnung zu tragen gestattet.

F. Engelmann.

Goto, Shigeo and Shigeru Machida: Effects of virtual nucleon pairs to the electromagnetic structure of the nucleon. Progress theor. Phys. 20, 216—238 (1958).

The effects are calculated covariantly in charge-independent pseudoscalar meson theory. A rigorous expression for the vertex function is derived which is similar to that obtained by perturbation methods, though it differs from it in that the summation is carried out over all possible intermediate states allowed by conservation laws. Also, the matrix elements must be calculated between exact eigenstates of the Hamiltonian, rather than between first approximations of such states. To calculate the effects of virtual nucleon pairs, an approximation is used, where the eigenfunctions of the total Hamiltonian are replaced by some suitably chosen functions which take into account the main contributions from such pairs. These effects are proved to show up, regardless of the magnitude of the coupling constant, only through the renormalization factors which affect the relative magnitudes of the isotopic scalar and vector parts of the nucleon-current contributions and the meson-current contribution. The ratio of the anomalous magnetic moments of the proton and neutron and the mean-square radii of the charge distributions are calculated. Their values are almost the same as those obtained by the cut-off method in second-order perturbation theory.

G. Field.

Kuni, F. M.: The dispersion relation for the nucleon-nucleon scattering. Vestnik Leningradsk. Univ. 12, Nr. 10 (Ser. Fiz. Chim. Nr. 2), 21—36, engl. Zusammenfassung 36 (1957) [Russisch].

Es handelt sich hier um eine ausführlichere Darstellung einer Arbeit aus dem Jahre 1956 (dies. Zbl. 78, 213), in welcher Dispersionsbeziehungen für Nukleon-Nukleon-Streuung abgeleitet werden. Dabei geht der Verf. nicht auf die besonderen Schwierigkeiten dieses Falles ein.

M. E. Mayer.

Roy, P. K.: K-meson-nucleon scattering and relativistic dispersion relations. Nuclear Phys. 20, 417—439 (1960).

The main conclusion of the present works is that the dispersion theoretic analysis of non-forward scattering is capable of discriminating between a scalar and pseudoscalar K-meson on qualitative grounds alone; it strongly indicates that these mesons are pseudoscalar.

Aus der Zusammenfassung des Autors.

Deloff, A. and J. Wrzecionko: The phenomenological Baryon-Baryon scattering theory and the relative parity determination. *Nuclear Phys.* **20**, 464—474 (1960).

The reactions $a + b \rightarrow c + d$ with four baryons are considered. Two cases of relative intrinsic parities $I_a I_b = \pm I_c I_d$ are taken into account; the phenomenological S -matrix technique is used for obtaining the cross section and polarizations.

Aus der Zusammenfassung des Autors.

Matthews, P. T. and A. Salam: The inelastic scattering of elementary particles. *Nuovo Cimento*, X. Ser. **13**, 381—393 (1959).

While „ordinary” scattering (in contrast to “resonance” scattering) is purely elastic in nuclear physics and generally treated as “potential” scattering. the same is not true in elementary particle physics, where it includes such processes as charge exchange or even change in the nature of the particles. A method is here developed for the phenomenological description of this “ordinary” inelastic scattering which includes the general requirements of causality, unitarity and time reversal invariance through a convenient set of parameters by which the cross sections may be calculated. The energy dependence of the real part of the scattering amplitude is considered and a generalization of the effective range theory to inelastic processes is deduced. It is further shown that the principle of unitarity operates even below the threshold for one or more channels of the system and the method is finally applied to the K nucleon system.

N. Dallaporta.

Moravcsik, Michael J.: Negative to positive ratio from nonrelativistic theories of pion photoproduction. *Phys. Review*, II. Ser. **105**, 267—277 (1957).

Low's formalism (this Zbl. **64**, 219) for charged photopion production is presented and worked out numerically with “enhancement approximations”, and also taking into account the recoil effects, which however turn out negligible. Fairly good agreement with experiment is obtained up to 440 Mev; the negative to positive ratio, in particular, agrees very well, especially in the case of a modified theory, where the S -wave term is replaced by the one from perturbation calculation.

Z. Koba.

Logunov, A. A., B. M. Stepanov and A. N. Tavcheldidze (Tavkhelidze): On the role of bound states in photoproduction. *Soviet Phys., Doklady* **2**, 12—14 (1957), Übersetzung von *Doklady Akad. Nauk SSSR* **112**, 45—47 (1957).

Vgl. die Besprechung des russischen Originals in diesem Zbl. **82**, 433.

Kazes, E.: Meson production in the static charged scalar theory. *Nuovo Cimento*, X. Ser. **14**, 74—80 (1959).

Castillejo et al. (this Zbl. **70**, 226) could give the general solution of the Low equation (this Zbl. **64**, 219) in the one-pion approximation for pion-nucleon scattering of the scalar meson theory. In this article the author shows that the same thing is true for pion production by nucleon-pion collision in the charged scalar theory: The integral equation for the production amplitude is reduced in the same approximation to the Riemann-Hilbert boundary problem and the complete solution is obtained.

Z. Koba.

Imamura, Tsutomu and Keizo Kobayakawa: Field theoretical interpretation of multiple meson production. *Progress theor. Phys.* **21**, 477—478 (1959).

This is a preliminary communication of the authors' later work [Progress theor. Phys. **23**, 137 (1960)]. The cross section of multiple pion production is worked out (in the case of pion-nucleon collision with symmetrical pseudoscalar interaction) based on the following assumptions: 1. The interaction is effective only during a finite time interval. 2. During this interval the free Hamiltonian is regarded as a C -number. 3. The renormalization procedure (which gives relative cross-sections) is valid.

Z. Koba.

Milechin (Milekhin), G. A.: On the hydrodynamic theory of multiple production of particles. *Soviet Phys., JETP* **35** (8), 682—684 (1959). Übersetzung von *Žurn. eksper. teor. Fiz.* **35**, 978—981 (1958).

The symmetry in the angular and the energy distribution of secondary particles, which is by no means self-evident in the case of nucleon-nucleus collision, is studied in the framework of Landau's hydrodynamical theory of multiple particle production. The author shows, in the case of the nucleons in the target nuclear tube being less than 3.7, that in a certain coordinate system which is very close to the c. m. s. the symmetry of the secondary particles does appear, except a small disturbance due to the running wave region. *Z. Koba.*

Emel'janov (Emel'yanov), A. A.: Viscosity in the hydrodynamic theory of multiple particle production. *Soviet Phys., JETP* **36** (9), 1100—1102 (1959), Übersetzung von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **36**, 1546—1549 (1959).

In Landau's hydrodynamical theory of multiple particle production the expansion process of the nucleon-meson cloud is treated as a relativistic ideal fluid. This article studies possible effects of the presence of viscosity on this solution. Under certain simplifying assumptions but still after a complicated calculation the author obtains an asymptotic solution of a one-dimensional equation with viscosity, whence he concludes that the fastest particles will possess relatively lower energy, a smaller fraction of the particles will be emitted at small angles and the angular distribution will be less an isotropic, in better agreement with experiment. Finally the works of Hamaguchi (this *Zbl.* **73**, 452; **78**, 207) on the same topic are criticized. *Z. Koba.*

Isida, Shin: Remarks on the final state interaction in Fermi's theory of multiple particle production. *Progress theor. Phys.* **22**, 207—212 (1959).

A method of modifying Fermi's statistical theory of multiple production is proposed in order to take into account the effects of strong interaction among created particles. Following Fermi's original picture the author expresses the probability of a certain process as the product of final state density and absolute square of the free particle wave function integrated over the effective interaction volume. Then he changes this wave function into that of interacting particles and in this way obtains the modified formula. The application to pion-nucleon interaction gives only 10% correction, while application to deuteron formation gives better agreement with experiment. (Essentially the same idea was later used by other people for this problem.) The author further criticizes Belenky's formulation (*S. Z. Belenky*, this *Zbl.* **73**, 451), pointing out that a factor is overlooked by him, which would lead to cancellation of the effects. *Z. Koba.*

Magalinskij (Magalinskii), V. B.: Angular momentum and parity conservation laws in the statistical theory of multiple production. *Soviet Phys., JETP* **36** (9), 67—69 (1959), Übersetzung von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **36**, 93—97 (1959).

The method of microcanonical distribution is employed to calculate the number of independent states of a many particle system obeying an arbitrary statistics, under the restrictions: total number, total angular momentum and total parity are specified, orbital angular momentum of each particle is less than a definite value. In the case of Boltzmann statistics a general computation formula is obtained. The reviewer thinks that, except the problem of isospin combination, it would be necessary to introduce the energy conservation connected with orbital angular momenta before it could be applied to the statistical treatment of multiple production. *Z. Koba.*

Ramakrishnan, Alladi, N. R. Ranganathan and S. K. Srinivasan: Meson production in nucleon-nucleon collisions. *Nuclear Phys.* **10**, 160—165 (1959).

The reaction amplitude for the process: nucleon + nucleon \rightarrow nucleon — nucleon + pion is worked out based on the scattering theory of Low (*F. E. Low*, this *Zbl.* **64**, 219). It is further reduced, by restricting the intermediate states to those containing at most two particles, to a simpler form which includes nucleon-nucleon and nucleon-pion scattering amplitudes, nucleon vertex operator. *Z. Koba.*

Gilinsky, Victor and Jon Mathews: Decay of bound muons. *Phys. Review*, II, Ser. **120**, 1450—1457 (1960).

The decay rate of bound muons from the K shell is calculated for elements up to lead. The muon is represented by a relativistic wave function for a point nucleus with parameters adjusted for finite-nuclear-size effects. The outgoing electron is represented by a Sommerfeld-Maue wave function. The decay rate is found to be a monotonically decreasing function of the atomic number. An estimate of the error is obtained by comparing with an exact calculation for the lowest electron angular state. The spectrum and angular distribution of the electrons are also presented.

Zusammenfassung der Autoren.

Sokolow, A. and B. Kerimow: Zur Theorie der Dirac-Teilchen mit orientiertem Spin. *Ann. der Physik*, VII. F. 2, 46—53 (1958).

In the theory of Dirac particles with oriented spins, the auxiliary condition satisfied by the free-particle wave function Ψ is $(s - \vec{\sigma} \cdot \vec{V}/i \sqrt{(-V^2)}) \Psi = 0$, where $s = \pm 1$ indicates the spin along, and opposed to, the direction of motion of the particle, respectively. The theory is applied to the cases of β - and π -meson decays. It predicts different polarizations of the decay-electron in the β -decay of non-oriented nuclei for S , T and V , A couplings. Similarly, in the bremsstrahlung emitted by relativistic electrons with oriented spin, the emission of circularly polarized photons is predicted by the theory. Both these cases have been experimentally verified. In π -meson-decay, the emitted neutrinos should be completely polarized in the direction of motion.

G. Field.

Feinberg, G., P. Kabir and S. Weinberg: Transformation of muons into electrons. *Phys. Review. Lett.* 3, 527—530 (1959).

The fact that several electromagnetic and weak reactions among leptons such as $\mu \rightarrow e + \gamma$ or $\mu \rightarrow 3e$ do not occur while no known selection rule should forbid them, is one of the outstanding puzzles of particle physics. A possible explanation for such a situation is proposed in the present work along the following lines. If one constructs the only two possible parity conserving non renormalizable, gauge and Lorentz-invariant interactions among electrons, muons and photons and assumes those two terms as the only ones which describe such interactions, then it turns out that the transition probability of the first reaction is zero at all orders of approximation, owing to the fact that, by using a suitable unitary transformation, the actual Lagrangian is transformed in another one in which the muon and electron terms are completely disconnected. The same transformation is then applied to weak interactions for which it is initially postulated that: a) the free fields and electromagnetic interactions are invariant for interchange of muon and electron; b) the weak interactions break this symmetry by involving only one (say the μ) of these two fields c) that there are no off diagonal terms; this brings the weak interactions into a form in agreement with the experimental fact that the β and μ decays have about the same unrenormalized coupling constant.

N. Dallaporta.

Nakanishi, Noboru: A theory of clothed unstable particles. II. *Progress theor. Phys.* 20, 822—834 (1958).

Der kürzlich (dies. Zbl. 89, 220) vorgeschlagene physikalische Zustand instabiler Teilchen wird abgeleitet als der Zustand, der auf Grund der Streutheorie von Gell-Mann und Goldberger in einem endlichen Zeitintervall erzeugt wird; auch der exakte Zustand wird aus dem physikalischen Zustande durch einen geeigneten Grenzübergang erhalten. Für die Prozesse, die instabile Teilchen einschließen, wird eine S -Matrix-theoretische Berechnung vorgeschlagen. (Zusammenfassung des Autors.)

W. Wessel.

Physik vieler Teilchen:

Uhlhorn, U.: On statistical mechanics of non-equilibrium phenomena. *Ark. Fys.* 17, 193—232 (1960).

In this long paper the author discusses first of all the phase space structure appropriate to an experiment. This is done in four sections: 1. The energy-structure function; 2. Generalized structure functions; 3. Repeated observations and the corre-

sponding structure functions; 4. The phase space of an infinite series of observations. The "structure" arrived at consists of a phase space Ω with a class of measurable subsets F , and a measure μ ; a measure preserving point transformation u , generating an incompressible flow in Ω ; and a measure preserving involuntary transformation τ expressing the invariance of the equations of motion under time reversal. The rest of this paper (2 sections and an appendix) serves to this cases the properties of this structure. Problem of recurrence, irreversibility and ergodicity are touched on. This is on the whole a mathematician's rather than a physicist's attempt to formulate the mathematical framework which allows for the representation of non-equilibrium states. The same remark applies to the following paper. *P. T. Landsberg.*

Uhlhorn, Ulf: Macroscopic observables and generalized canonical ensembles. Ark. Fys. 17, 233—256 (1960).

Matters not discussed in this paper include the microscopic theory of irreversible phenomena and dynamic considerations such as the development of macroscopic observables in time. Instead the paper deals with the generalized canonical distribution connecting macroscopic and microscopic descriptions, and the probability distributions for macroscopic observables, generalized thermodynamic relations and stability conditions are deduced. Certain asymptotic properties are also considered.

P. T. Landsberg.

Uhlhorn, U.: On the foundations of the linear theory of irreversible processes. I, II. Ark. Fys. 17, 257—272, 273—314 (1960).

Systems are considered which can be characterized by a finite number of thermodynamic coordinates, and whose development in time is given by linear phenomenological equations. After an outline of the phenomenological theory, the author proceeds to a representation in a complex vector space in which a Hermitian scalar product is defined. This is linear in its right argument and antilinear in its left argument. An entropy operator and a time reversal operator are defined in this space. In the important last section of the first paper dissipation functions are discussed, and connections with principles of minimum entropy production are established. The second part concerns itself with the relation between the phenomenological theory of irreversible processes on the one hand, and its probabilistic interpretation and its connection with statistical mechanics on the other hand. A mathematical framework for the statistical description is established, and turns out to be similar to the Hilbert space formalism of quantum mechanics. The known distribution between deterministic and non-deterministic stationary stochastic processes is shown to correspond closely to the distinction between reversible and irreversible processes. In the last section (on the probabilistic interpolation of irreversible processes) the connection with the Langevin equation is also indicated. There are two appendices on the Radon-Nikodym decomposition of a spectral measure and on a relation due D. H. Weyl.

P. T. Landsberg.

Uhlhorn, Ulf: Statistical mechanical approach to non equilibrium thermodynamics. Ark. Fys. 17, 343—360 (1960).

A new proof of Onsager's reciprocal relations is presented in this paper, which generalizes the treatment of non-equilibrium processes given by Bergmann and Lebowitz. Time reversal invariance of the mechanical equations of motion is the main assumption entering the argument.

P. T. Landsberg.

Uhlhorn, U.: Onsager's reciprocal relations for non linear systems. Ark. Fys. 17, 361—368 (1960).

A proof of Onsager's reciprocal relations for non-linear systems is presented. The assumptions needed include time reversal invariance of the mechanical equations of motion, as in the linear case. An additional assumption concerns the behaviour

of a certain probability distribution for macroscopically small time differences. It is not assumed that this distribution corresponds to a Markoff process.

P. T. Landsberg.

Simons, S. and P. J. Higgins: An extension of Boltzmann's H -theorem. *Philos. Mag.*, VIII. Ser. 4, 1282—1283 (1959).

Es wird gezeigt, daß die Entropie eines Gases, das sich in einem endlichen Kasten mit starren Wänden befindet, niemals abnehmen kann. Dazu wird eine Verteilungsfunktion eingeführt, mit deren Hilfe der Streuvorgang an der Wand beschrieben werden kann. Das allgemeine Prinzip der mikroskopischen Reversibilität wird als gültig angenommen, und mit Hilfe der Boltzmann-Gleichung wird das Vorzeichen von $\partial H/\partial t$ berechnet.

G. Kelbg.

Edwards, S. F.: The statistical thermodynamics of a gas with long and short-range forces. *Philos. Mag.*, VIII. Ser. 4, 1171—1182 (1959).

Die Zustandsgleichung eines Gases, dessen Moleküle neben der Coulombwechselwirkung einen harten Kern besitzen, wird berechnet. Dazu wird die große Verteilungsfunktion verwandt. Die Exponentialsumme zum Coulombanteil wird in einer Näherung als Funktionalintegral geschrieben und der Übergang zum Kontinuum vollzogen. Für die Zustandsgleichung ergibt sich folgende Formel

$$pV = 2NkT \left[1 + (r_0/d)^3/24\pi - (d/r_0)^3(64\pi/3) - (r_0/\lambda_D)^6/128 + (r_0/\lambda_D)^3(d/\lambda_D)^2/8\pi - 8(d/\lambda_D)^3 \right].$$

d ist der Radius des harten Kerns, $\lambda_D = (8\pi N e^2/V k T)^{-1/2}$ der Debye-Hückelsche Radius, $r_0^3 = V/N$. Die Formel gilt im Bereich $\lambda_D > r_0 > d$.

G. Kelbg.

Résibois, P.: Théorie formelle du scattering classique. *Physica* 25, 725—732 (1959).

Auf Grund der Liouville-Gleichung wird ein Integralformalismus zur Behandlung des Zwei-Körperproblems entwickelt. Die Gleichungen für die Streuung nehmen eine sehr übersichtliche Form im Ortsraum an und die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeit steht in engem Zusammenhang zur stationären Lösung der Liouville-Gleichung bei passender Wahl der Randbedingungen. Außerdem wird eine formale Analogie mit der S -Matrix der Quantenmechanik aufgezeigt.

P. Urban.

Proserpi, G. M. and A. Scotti: An improved version of an ergodic theorem in quantum mechanics. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 17, 267—268 (1960).

In this letter we intend giving an improved version of a theorem established in a previous paper [ibid. 13, 1007—1012 (1959)]. The new version is stronger than the older one and conceptually more satisfactory.

Aus der Einleitung.

Tulub, A. V.: The relativistic correction to the Maxwell distribution. *Vestnik Leningradsk. Univ.* 12, Nr. 10 (Ser. Fiz. Chim. Nr. 2) 65—67, engl. Zusammenfassung 67 (1957) [Russisch].

Ausgehend von der Gleichung

$$\partial \varrho(r, r', \beta) / \partial \beta + \mathbf{H} \varrho(r, r', \beta) = \delta(\beta) \delta(r - r'), \quad \text{mit } \beta = 1/kT$$

für die Dichtematrix $\varrho(r, r', \beta) = \langle r | \exp(-\beta \mathbf{H}) | r' \rangle$ wird gezeigt, daß die Zustände negativer Energie in Diracs Theorie des Positrons durch eine Verteilung mit negativer absoluter Temperatur beschrieben werden müssen.

G. Wallis.

Goldberger, M. L.: On the second virial coefficient. *Phys. Fluids* 2, 252—255 (1959).

Verf. beschreibt ein neues Verfahren zur Berechnung der zweiten Virialkoeffizienten für Quantengase. Die Differenz der Verteilungsfunktionen eines Zweiteilchensystems mit und ohne Wechselwirkung (H, H_0) läßt sich als Schleifenintegral in einer komplexen z -Ebene darstellen. Der Integrand wird durch das Verhältnis der Determinanten von $z - H$ und $z - H_0$ gebildet. Bekannte Ergebnisse der Streutheorie lassen sich benutzen. Der wesentliche Anteil zum Virialkoeffizienten ergibt sich als Determinante einer S -Matrix.

G. Kelbg.

● **Vuylsteke, Arthur A.:** *Elements of maser theory.* Princeton, N. J.-Toronto-New York-London: D. van Nostrand Company, Inc. 1960. XIII, 362 p. \$ 9,50.

This book contains eight chapters: 1. Introduction, 2. Quantum theory, 3. Statistical mechanics, 4. The interaction of radiation and matter, 5. The maser. Two-level excitation, 6. Maser levels in electron paramagnets, 7. The maser. Three-level excitation, 8. Maser noise. There are also three appendices on classical mechanics, exchange energy and spin-orbit splitting. It is seen that the proper subject matter of the book is discussed in chapters 5 to 8 and in a part of chapter 1. This means that a little more than half the book is devoted to incidental developments and discussions which aim at making the book self-contained. On the whole this somewhat daring undertaking has been successful, and the more experienced reader will be able to omit parts of the earlier sections. The explanations given are careful and conscientious (though not brilliantly suggestive), and lapses, such as the unsatisfactory introduction of the crucial concept of saturation (p. 26), are rare. There are not many misprints (example: equation (8. (6))). The book is to be strongly recommended for those intending to do research in this area.

P. T. Landsberg.

Woolley, Harold W.: *Thermodynamic properties of gases at high temperature: Chemical equilibrium among molecules, atoms and atomic ions considered as clusters.* J. Res. nat. Bur. Standards 61, 469—490 (1958).

Eine allgemeine Theorie der Gasmischungen auf der Basis einer erweiterten Ursellschen Clusterentwicklung wird gegeben, in der die Voraussetzung von Paarwechselwirkungen nicht eingeht. Als Grundeinheiten dienen nicht die Moleküle sondern eine Reihe von Grundcluster. Effektive Verteilungsfunktionen werden eingeführt mit deren Hilfe der Beitrag von Clustervereinigungen zur Gesamtverteilungsfunktion beschrieben werden kann. Untersuchungen über das Massenwirkungsgesetz und Bemerkungen über die ersten Virialkoeffizienten von Mischungen schließen sich an. Außerdem werden partiell ionisierte Gase im Rahmen der vorliegenden Theorie betrachtet.

G. Kelbg.

Chu, Boa-Teh: *Thermodynamics of electrically conducting fluids.* Phys. Fluids 2, 473—484 (1959).

In dieser wichtigen Arbeit werden die Grundgleichungen der Thermodynamik verallgemeinert auf den Fall elektrisch leitender Gase, die unter dem Einfluß elektromagnetischer Felder stehen. Dabei werden die Permeabilität und die Dielektrizitätskonstante nicht konstant sondern als beliebige Funktionen der Dichte und der Temperatur angesetzt. Bei der Diskussion der durch die elektromagnetischen Glieder erweiterten Zustandsgleichung gelingt eine sinnvolle Aufspaltung des Druckes, der Entropie, der inneren Energie und der Enthalpie in einen mechanischen und einen elektromagnetischen Anteil. Ähnliches gilt für die Herleitung und Diskussion der Volumenkraft und der Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie. Der Wert dieser Arbeit liegt weniger in der Herleitung neuer Ergebnisse als vielmehr in der einheitlichen, klaren Darstellung und physikalischen Deutung dieser Ergebnisse.

G. Jungclauss.

Glansdorff, P.: *On a non-linear law of the irreversible phenomena with stationary constraints.* Molecular Phys. 3, 277—283 (1960).

Es wird gezeigt, daß die von Prigogine und Glansdorff aufgestellte Gleichung $d_X P \leq 0$ für die Zeitableitung der Entropieproduktion P auch für Systeme gültig bleibt, die sich nicht im mechanischen Gleichgewicht befinden. Vorausgesetzt wird aber, daß ein mechanisch stationärer Zustand vorliegt.

G. Kelbg.

Meijer, Paul H. E. and Julius I. Bowen: *The solution of the steady state distribution in non-equilibrium processes.* Physica 26, 478—484 (1960).

In der master equation mit kontinuierlichen Variablen wird die Zeitabhängigkeit absepariert und der Kern mit Hilfe der Bedingung des detaillierten Gleichgewichts symmetrisiert. Der Kern und die gesuchte Lösung werden nach dem vollständigen

System der hermiteschen Funktionen, die zur Lösung im stationären Zustand orthogonal sind, entwickelt und die Entwicklungskoeffizienten als Zustandsparameter angesehen. Die Lösung im stationären Zustand wird für zwei schwach gekoppelte Systeme verschiedener Temperatur mit Hilfe der Störungsrechnung ausgerechnet und diskutiert.

J. Mertsching.

• **Bell, D. A.: Electrical noise. Fundamentals and physical mechanism.** London-Toronto-New York-Princeton, N. J.: D. Van Nostrand Company, Ltd. 1960. X, 342 p. 50 s.

Eine ausgezeichnete, allerdings oft vom Üblichen abweichende Darstellung der physikalischen Grundlagen und des bis 1959 erarbeiteten Wissens über Rauschprobleme. Das Buch ist infolge der vereinheitlichenden Gesamtsicht des Problemkreises durch den Verf., der sich mit einer großen Anzahl von Originalarbeiten einen anerkannten Platz auf diesem Gebiet erworben hat, nicht leicht zu lesen. In den Punkten, in denen seine Behandlungsweise vom Konventionellen abweicht, gibt er jedoch auch den Weg, der in den Originalarbeiten beschritten wurde, an, und der Leser kann dadurch eine Menge von Anregungen und ein tieferes Verständnis erlangen. In den ersten Kapiteln wird neben den mathematischen Hilfsmitteln und den physikalischen Grundlagen das thermische und das Schrotrauschen im Sinne einer vereinheitlichten Theorie ausführlich behandelt. Besonders hervorzuheben ist neben der ausführlichen Diskussion des Röhrenrauschens, der Raumladungseinflüsse und der Barkhausen-Sprünge die Deutung des $1/f$ -Rauschens von Halbleitern und Photohalbleitern als „Warte“-Effekt mit statistischem Abruf. Die Theorie scheint überzeugend, dürfte aber Widerspruch herausfordern. Als Nachschlagewerk kommt dem Buch auf Grund des schlechten Stichwortverzeichnisses leider nur geringe Bedeutung zu.

G. O. Müller.

Stahl, A.: Zur Anwendung des Informationsbegriffes in der statistischen Physik. Z. Naturforsch. **15a**, 655—662 (1960).

Durch Anwendung des Informationsbegriffs in der statistischen Physik wird der Versuch einer „subjektiven Begründung der statistischen Mechanik“ unternommen. Eine konsequente Ersetzung des schwer definierbaren Begriffs „Unordnung“ durch „Unkenntnis“ soll verhindern, daß durch Eliminierung des Beobachters die vielzitierten verborgenen Parameter eingeführt werden müssen. Nach Definition des Informationsmaßes werden klassische Systeme in stationären Zuständen betrachtet. Bei der Übertragung der erhaltenen Ergebnisse auf quantenmechanische Systeme braucht nur die Existenz komplementärer Größen berücksichtigt zu werden. Abschließend wird der Widerspruch zwischen dem Befund der Thermodynamik und der Invarianz der Entropie gegen eine Transformation durch die Bewegungsgleichungen behandelt.

G. Wallis.

Englman, R.: The discontinuities in the solutions of the transport equation and the variational principle. Proc. phys. Soc. **76**, 909—913 (1960).

In einer Arbeit von Garcia-Moliner und Simons [Proc. Cambridge philos. Soc. **53**, 848—855 (1957)] wurde die Transporttheorie in Festkörpern mit Hilfe von Variationsverfahren so erweitert, daß die exakte Berücksichtigung von Magnetfeldern und Oberflächen möglich ist. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß dabei sowohl bei der Ableitung der durch das Magnetfeld bedingten Veränderungen gegenüber der Kohlerschen Theorie als auch in den Oberflächentermen je ein Fehler gemacht wurde, die sich jedoch in der Kombination exakt kompensieren. Das Endergebnis von Garcia-Moliner und Simons bleibt also richtig.

W. Klose.

Toptygin, I. N.: Multiple scattering of polarized electrons. Soviet Phys., JETP **36** (9), 340—346 (1959). Übersetzung von Žurn. eksper. teor. Fiz. **36**, 488—498 (1959).

Multiple elastic scattering of polarized spin- $\frac{1}{2}$ particles in an isotropic homogeneous medium is considered. The kinetic equations determining the distribution function and polarization vector

of scattered particles are solved approximately. A solution which is valid for both small and large scattering angles has been obtained as a series expansion in spherical harmonics and spherical vectors.
Zusammenfassung des Autors.

Crowe, A.: Transport of energy and momentum by phonons in fluids. Proc. phys. Soc. **75**, 789—792 (1960).

Durch geeignete Transformation des Hamiltonoperators werden unter Verwendung allgemeiner Relationen (von Eisenschitz) Ausdrücke für Energie- und Impulsfluß abgeleitet, die mit dem Phononenmodell in Einklang stehen. *W. Koeppel.*

Eisenschitz, R. and A. R. Boot: The thermal conductivity of monatomic dielectric liquids. Proc. phys. Soc. **74**, 208—216 (1959).

Ist die Temperaturverteilung nicht gleichförmig, so führt die Annahme, daß die radiale Verteilungsfunktion nur von den relativen Koordinaten abhängt, zu gewissen Schwierigkeiten. Für die makroskopische Wärmeströmung leiten die Verf. eine Formel ab, in die eine radiale Verteilungsfunktion eingeht, die noch zusätzlich von den Schwerpunktskoordinaten abhängig ist. Vergleiche mit den Theorien von Born-Green und Irving-Kirkwood werden durchgeführt. *G. Kelbg.*

Holter, Øivin: On the effect of a magnetic field upon extremely low frequency (ELF) wave packets. Astrophys. Norvegica **6**, 131—145 (1960).

In this paper, considering wave packets formed by superposition of plane waves in the extensively low frequency region, the mode of the propagation is studied in terms of the propagation angles. It is found that, making a number of simplifying assumptions such as the macroscopic approximation, different components, the stationary and homogeneous magnetic field, the transverse propagation and others, the path of the extraordinary wave-packets calculated in the quasi-transverse approximation coincides with the magnetic lines of force. In the increasing region of validity of the quasi-transverse approximation by lowering the wave frequency, the packets are guided all the more along a magnetic field in a plasma. For the ordinary wave, however, the propagation does not depend upon the magnetic field.

S. Ueno.

Hettner, G. und H. Wagner: Fourier-Analyse des elektrischen Mikrofeldes in einem Plasma. II. Ann. der Physik, VII. F. **5**, 405—413 (1960).

Während in der vorangehenden Mitteilung I (dies. Zbl. **86**, 234) die Bewegung der geladenen Teilchen als kräftefrei angesehen wurde, wird hier der Einfluß der Plasmainen auf die Elektronenbewegung berücksichtigt. Dabei wird insbesondere die Wirkung der stark gekrümmten Teile der Elektronenbahnen auf das Frequenzspektrum untersucht, welche hauptsächlich Beiträge zu den höchsten Frequenzen liefern. Hierbei ergibt sich, daß das Fourier-Amplitudenspektrum der elektrischen Feldstärke wieder eine Gauß-Verteilung darstellt, die jedoch für hohe Frequenzen gegenüber der in I gefundenen nach größeren Amplituden verschoben ist.

W. Legler.

Consoli, Téreazio et Dimitri Lepechinski: Méthode de détermination de la densité électronique d'un plasma par la vitesse de groupe. C. r. Acad. Sci., Paris **250**, 2694—2696 (1960).

Es wird die Gruppengeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle in einem Plasma als Funktion der Frequenz untersucht, wobei die Elektronendichte N_e und die Magnetfeldstärke B als Parameter auftreten. Diese Funktion zeigt in der Umgebung der Frequenz $\frac{1}{4}f_c$ ein flaches Maximum ($2\pi f_c = Be/m$). Die Größe des Maximums hängt sehr empfindlich von der Elektronendichte N_e ab. Daraus wird ein Prinzip zur Messung von N_e abgeleitet.

W. Legler.

Rother, H.: Theorie der Diffusionswellen. II: Amplifikationsbedingungen in Niederdruckentladungen. Ann. der Physik, VII. F. **5**, 252—267 (1960).

Aus den im ersten Teil der Arbeit (dies. Zbl. **88**, 454) entwickelten Grundgleichungen der positiven Säule wird für kleine Störungen eine Dispersionsgleichung

abgeleitet, die unter Verwendung geeigneter Näherungen ausführlich diskutiert wird. Notwendig zur Verstärkung der Störungen ist ein Energiespeicher der Entladung in der Form von angeregten Atomen, deren Konzentration mit der Konzentration der Elektronen ansteigt. Außerdem gelten noch für Trägererzeugung, Elektronentemperatur, elektrisches Feld und Radius bestimmte Bedingungen, durch die laufende Schichten in Edelgasentladungen auf den Druckbereich 0,1–10 Torr beschränkt werden.

K. G. Müller.

Kalman, G.: Nonlinear oscillations and nonstationary flow in a zero temperature plasma. I: Initial and boundary value problems. II: General characteristics of the motion. *Ann. of Phys.* **10**, 1–28, 29–61 (1960).

I. Zwei konkurrierende Prozesse, die individuelle Teilchenbewegung und das kontinuumsähnliche Verhalten, bestimmen die allgemeine Bewegung eines Plasmas der Temperatur Null. Es wird gezeigt, daß dem Fall der sehr starken Wechselwirkung die lineare Näherung entspricht. Im allgemeinen wird jedoch die Bewegung durch nichtlineare Gleichungen bestimmt. Durch Anwendung der Lagrange-Methode und durch Transformation der Gleichungen in das Teilchen-Koordinatensystem kann das Problem exakt gelöst werden. Die so gewonnene allgemeine Lösung kann an beliebige Rand- und Anfangswerte angepaßt werden. Sie wird auf die Fälle des geschwindigkeitsmodulierten Stromes, der Oszillationen nach Störungen und der räumlichen Geschwindigkeitsmodulation angewandt. Reihenentwicklung der allgemeinen Lösung führt auf die bekannten Näherungslösungen. Bei bestimmten Werten der Parameter ist die Bildung elektrostatischer Stoßwellen möglich. Das Kriterium für das Eintreten solcher Stoßwellen wird angegeben, und gewisse Eigenschaften ihrer Bewegung werden beschrieben. Die Struktur der transformierten Differentialgleichung zeigt, daß es im Teilchen-Koordinatensystem keine wellenähnlichen Ausbreitungserscheinungen gibt und daß im allgemeinen keine neuen Teilchen an der Bewegung teilnehmen. Das Konzept der unverzerrten Schwingung, das Ergebnis der linearen Theorie, ist bei der exakten Behandlung unhaltbar. Im II. Teil werden allgemeine nichtlineare Effekte bei Plasmabewegungen auf der Grundlage des I. Teils untersucht. Es wird eine Wanderwellen-Lösung behandelt, und die zugehörigen Rand- und Anfangsbedingungen für deren Anregung werden untersucht. Die Dispersionsrelation ist in jeder Ordnung der Näherung die gleiche wie in der linearen Theorie. Es kann jedoch mit Hilfe einer Störungsrechnung gezeigt werden, daß im Falle einer Geschwindigkeitsverteilung, d. h. bei von Null verschiedener Temperatur, dieses Resultat nicht mehr gilt, da dann nichtlineare Effekte die Dispersionsrelation verändern. Danach wird die Verteilung der Energie auf die Teilchen und das Feld untersucht und ein Gleichverteilungssatz abgeleitet. Schließlich wird die Weiterentwicklung eines ursprünglich gegebenen Wellenzahl- und Frequenzspektrums berechnet. Dabei wird ein Verfahren angegeben, um Beiträge beliebiger Ordnung zu diesem Spektrum zu berechnen. Das Spektrum kann nach höheren Harmonischen der Plasmafrequenz analysiert werden, und der einzige nichtlineare Effekt in der Entwicklung des Wellenzahlspektrums ist das Auftreten von höheren Harmonischen. Ein Zerfall des Spektrums findet nicht statt, und es existiert auch keine nichtlineare Dispersionsrelation. Eine Analyse der zeitlichen Veränderung des Energieinhalts des Spektrums zeigt ein Verhalten, welches in Analogie zur „Konstanz großer Wirbel“ bei hydrodynamischer Turbulenz steht.

W. Legler.

Bourret, R. C.: Velocity autocorrelations of charged particles in a magnetoelectric medium with applications to turbulent diffusion. *Canadian J. Phys.* **38**, 1213–1223 (1960).

Unter Ausklammerung der kollektiven Schwingungen eines Plasmas werden die Geschwindigkeitskorrelationen berechnet, die sich im Falle der „turbulenten Diffusion“ ergeben. Hierbei wird unter turbulenter Diffusion eine solche verstanden, bei der die Teilchenbewegungen über bestimmte Raum- und Zeitgebiete kohärent erfolgt. *G. Wallis.*

Banos jr., A. and R. Vernon: Large amplitude waves in a collision-free plasma. I: Single pulses with isotropic pressure. *Nuovo Cimento*, X. Ser. 15, 269—287 (1960).

Ein unendlich ausgedehntes, völlig ionisiertes Plasma in einem homogenen Magnetfeld wird unter Vernachlässigung der Stöße untersucht. Quasineutralität und isotroper Drucktensor für Ionen und Elektronen werden vorausgesetzt. Die Kontinuitätsgleichung, die ersten beiden Momentengleichungen für die beiden Trägerarten und für das Gesamtsystem und die Maxwellschen Gleichungen werden transformiert auf ein senkrecht zum Magnetfeld gleichförmig bewegtes Bezugssystem. Die wesentlichen Eigenschaften des Differentialgleichungssystems werden diskutiert. Dieser Teil I beschränkt sich auf das Studium der zeitunabhängigen eindimensionalen Lösungen, denen fortschreitende einzelne Impulse entsprechen. Als wesentliche Parameter treten die Alfvén-Machzahl und das Verhältnis des gesamten Plasmadrucks zu magnetischem Druck auf. Für verschiedene Werte dieser beiden Parameter werden die Geschwindigkeits- und Feldprofile dieser Impulse aufgezeichnet. Die Ausdehnung dieser Impulse kann wesentlich kleiner sein als die freie Weglänge.

K. G. Müller.

Hare, A.: The effect of viscosity on the stability of incompressible magneto-hydrodynamic systems. *Philos. Mag.*, VIII. Ser. 4, 1305—1310 (1959).

Die magneto-hydrodynamischen Bewegungsgleichungen und die Maxwellschen Gleichungen eines ideal leitenden, inkompressiblen, nichtviskosen Mediums werden für kleine Störungen linearisiert. Die Lösung kann auf ein Variationsproblem zurückgeführt werden, deren Auswertung kurz diskutiert wird. In Anwendung auf ein zylindrisches Plasma mit einem axialen Strom im Volumen zeigt sich Übereinstimmung mit den Ergebnissen anderer Autoren. Das Gleichungssystem wird erweitert auf viskose Medien. Die für den nichtviskosen Fall abgeleiteten Stabilitätsbedingungen bleiben dabei gültig.

K. G. Müller.

Tarasov, Ju. A. (Yu. A.): On the stability of plane Poiseuille flow of a plasma of finite conductivity in a magnetic field. *Soviet Phys., JETP* 37 (10), 1209—1212 (1960), Übersetzung von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* 37, 1708—1713 (1958).

The stability characteristics of parallel flows in the presence of a longitudinal magnetic field depend on three parameters: the hydrodynamic Reynolds number R , the magnetic Reynolds number R_m , and the Alfvén number $A = B_0/U_0 \sqrt{4\pi\rho}$. For a fluid with infinite conductivity ($R_m = \infty$), Velikhov [*Soviet Phys., JETP* 36 (9), 848—855 (1959) *Žurn. éksper. teor. Fiz.* 36, 1192—1202 (1959)] has shown that complete stabilization of plane Poiseuille flow is achieved for $A_{cr} = 0,1$. The present paper gives the generalization of this result for fluids of finite conductivity with $R_m \lesssim 1$. The curves of neutral stability are given for $R_m = 1$ and various values of A ; for $0 < A < A_{cr}$ these curves are closed and resemble the usual curves of constant amplification. The dependence of A_{cr} on R_m is also given.

W. H. Reid.

Greenberg, O. W., H. K. Sen and Y. M. Trève: Hydrodynamic model of diffusion effects on shock structure in a plasma. *Phys. Fluids* 3, 379—386 (1960).

Für das Modell einer Zweiteilchenflüssigkeit werden unter der Voraussetzung, daß beide Komponenten die gleiche Temperatur in jedem Punkt des Stoßwellenprofils besitzen, und unter Vernachlässigung aller übrigen dissipativen Effekte die Diffusions-einflüsse auf das Profil berechnet. Es tritt Ladungstrennung auf. Hierfür ergeben sich Lösungen zweier verschiedener Typen, von denen die eine oszilliert. Bei der anderen ist der Dichteanstieg in der Front nicht monoton, da der sich aus der Rankine-Hugoniot ergebende Dichtesprung in der Front überschritten wird.

G. Wallis.

● **Busbridge, I. W.: The mathematics of radiative transfer.** (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. No. 50). Cambridge: At the University Press 1960. VII, 143 p. 30 s. net.

Twenty-six years have passed since the publication of the Cambridge Tract by E. Hopf (now out of print) inaugurated a new subject for the mathematical theory of radiative transfer. In spite of the increasing subjects and the solutions of several outstanding problems, the rigorous consideration concerning the existence and uniqueness of solutions has been taken only by a few authors. The book under review is a timely account for a simple and rigorous treatment of some mathematical problems appearing in the transfer theory of radiation in the field of astrophysics. The solutions in the transfer will often be applied in the solutions of similar problems in the theory of neutron diffusion and of the temperature-wave flow in solids. In the principal part of this book the rigorous theory of radiative transfer based on the combined Ambarzumian technique extended exclusively by Dr. Busbridge is ingeniously and clearly elucidated. However, the probabilistic method developed recently by Sobolev and Ueno, respectively, is not considered in detail, in order to avoid the redundancy of some analysis common to the probabilistic and the Ambarzumian technique. This book is divided into two parts. Part I opens with three chapters devoted to the auxiliary mathematics as follows: The Milne integral equation, the net flux, the K -integral, the solution of the H -equation, their moments, and the new integral operators for the general phase function. Part II, composed of seven chapters, treats the Milne equation in several transfer problems. In Chapter 4, taking account of the conservative case, the iterative solutions of the Milne equation, i. e. the N -solutions, are considered. In Chapter 5, with the aid of the Wiener-Hopf method, the solution of the homogeneous Milne equation is dealt with. In Chapter 6 the Ambarzumian technique combined with the theory of N -solutions is rigorously explained in the case of semi-infinite atmospheres. This chapter provides the basis for the theory of finite atmospheres in the following chapters. In Chapter 7 the introductory theory of finite atmospheres concerning the generalized truncated Hopf operator and the N -solution of non-homogeneous equations is discussed, allowing for the derivative of the solution of a Milne equation. Chapter 8 treats with the problem of uniqueness of the X - and Y -functions of S. Chandrasekhar in conjunction with the N -solution of the auxiliary equation. In Chapter 9, with the aid of τ_1 -transforms, the solutions of the non-homogeneous Milne equation for some special forms of the source function are given explicitly. In Chapter 10, starting from the appropriate auxiliary equation, the integral equation governing the anisotropic scattering function in the axially symmetric case of a semi-infinite atmosphere is treated and is shown to have solutions in terms of H -functions. The book ends with an appendix devoted to the discussion of incompletely solved problems as follows: polarization, inhomogeneous atmospheres, the formation of absorption lines, time-dependent problems and spherical atmospheres. For the astrophysicist, as well as for the meteorologist in the field of atmospheric radiation and the engineer in the field of neutron diffusion, this book can be recommended unhesitatingly. This is also true for the applied mathematician and the theoretical physicist who are interested in the classical treatment of multiple scattering of particles. *S. Ueno.*

Wolf, E.: A scalar representation of electromagnetic fields. II. Proc. phys. Soc. 74, 269—280 (1959).

In an earlier paper, by using appropriately the Lorentz condition of electromagnetic theory, Green and Wolf (this Zbl. 53, 154) described the free electromagnetic radiation field in terms of a single complex "scalar" potential. In the present paper, developing some further aspects of this new representation, the author constructed a new model for energy transport: Considering two mutually incoherent scalar waves as a carrier of energy, each of which is due to contributions of circularly polarized plane wave components of definite helicity, the energy density and the energy flow vector of each of the two partial waves in a monochromatic field are stationary and the orthogonality between the energy flow and the surface of constant

phase of the wave holds irrespective of the frequency. Furthermore, the author asserts that, based on the very simple model of an unpolarized, monochromatic field obtained as an immediate consequence of the preceding analysis, under usual conditions a light disturbance of the classical scalar diffraction theory in optics may be identified with the complex potential of the representation, because the proportionality between the optical intensity and the squared amplitude of the complex wave function is obtained.

S. Ueno.

Roman, P.: A scalar representation of electromagnetic fields. III. Proc. phys. Soc. **74**, 281—289 (1959).

In recent years Green and Wolf (cf. this Zbl. **53**, 154 and the preceding review) obtained a (generally complex) scalar representation of the electromagnetic field which is useful, when dealing with diffraction phenomena. In the present paper, the transformation properties in a proper gauging of the two-component quantity in their theory is discussed. The scalar theory of electromagnetism is covariant under a combined Lorentz and gauge transformation, whereas the Belinfante method is of Lorentz covariance. It can be inferred from the fact that in the scalar theory the Fourier coefficients of the scalar potential are linear combinations of the first and second components of a vector. Furthermore, using the Lagrangian in terms of the two-component field function and referring to the Belinfante tensor, the physical energy-momentum tensor is evaluated. It is particularly found that in application of optics the difference between the canonical and the physical energy flow density is a divergence-free vector, while the canonical energy density is equal to the physical ones.

S. Ueno.

Proceedings of the international congress on many-particle problems. Utrecht, June, 13—18, 1960. Physica 26, Bijvoegsel 1—217 (1960).

Solořev, V. G.: The equations for the wave function of an n -particle system in the many-body problem. Soviet Phys., Doklady **4**, 631—635 (1959), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR **126**, 755—758 (1959).

Während bei Fock den Teilchen eines Vielteilchensystems unabhängige Einzelwellenfunktionen zugeordnet werden, werden nach dem neueren Verfahren von Bogoljubov Korrelationen zwischen Teilchenpaaren eingeschlossen. In der vorliegenden Arbeit wird diese Methode erweitert auf Korrelationen zwischen Gruppen von N Teilchen. Die Ausgangsgleichungen werden einer Arbeit von Bogoljubov [Uspechi fiz. Nauk **67**, 549—580 (1959)] entnommen, wobei an Stelle der gemischten Dichtefunktionen von 2 Teilchen solche von N Teilchen treten, deren zeitliche Änderung betrachtet wird. Diese Bewegungsgleichungen werden für 2 Spezialfälle genauer angeschrieben, nämlich für a) Einzelenergiebeiträge (d. h. „kinet.“ Anteile) ortsabhängig, Wechselwirkungsenergie zwischen je 2 Teilchen abstands- und spinabhängig, b) Einzelenergiebeiträge impulsabhängig, Wechselwirkung in allgemeiner, impulserhaltender Form.

H. Volz.

Zyrjanov (Zyrianov), P. S.: Generalized self-consistent field equations. Soviet Phys., JETP **35** (8), 309—311 (1959), Übersetzung von Žurn. éksper. teor. Fiz. **35**, 448—451 (1958).

Die für nichtstationäre Zustände verallgemeinerten Hartreegleichungen [P. S. Zyrianov, Soviet Phys., JETP **2**, 236—240 (1956), Übersetzung von Žurn. éksper. teor. Fiz. **29**, 344 (1955)] werden noch erweitert durch Einbeziehung kurzreichweitiger Korrelationen, die als Funktionen der Streuamplituden angesetzt werden. Es wird daraus eine quantenkinetische Bewegungsgleichung erhalten, die im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ in die quasiklassische Gleichung von Landau für eine Fermiflüssigkeit übergeht.

H. Volz.

Möbius, P.: Introduction of many-particle variables for the treatment of special translationally invariant many-body problems. Nuclear Phys. **16**, 278—303 (1960).

Für spezielle translationsinvariante Probleme vieler Körper lassen sich geeignete neue Variable einführen, die eine Separation ermöglichen auf das Pauliprinzip automatisch berücksichtigen. Diese Methode wird angewandt auf durch Oszillatorpotential gekoppelte Systeme. Das Spektrum wird berechnet und mit dem Spektrum eines Systems von Oszillatoren (ohne Wechselwirkung) verglichen. Die Abtrennung der Schwerpunktsbewegung für allgemeine Potentiale wird untersucht und darauf hingewiesen, daß im allgemeinen Fall das Potential nicht nur von den inneren Koordinaten abhängt.

H. Kümmel.

Lipkin, Harry J.: Collective motion in many-particle systems. I: The violation of conservation laws. Ann. of Phys. 9, 272—291 (1960).

A method for treating collective motion is proposed which allows the use of wave functions violating conservation laws which are valid for the system. The method is illustrated by application to center-of-mass motion, the electron gas in the random phase approximation, nuclear rotation, and the violation of the conservation of the number of particles. For the case of center-of-mass motion the Hamiltonian of a system of N particles interacting with two-body forces is given by

$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i < j} V_{ij}$. The Hamiltonian is translation-invariant, and its eigen-

functions are eigenfunctions of the total momentum $P = \sum_i p_i$ which is canonically

conjugate to the center-of-mass coordinate $X = \sum_i \frac{x_i}{N}$. The eigenfunctions are

$\psi_{kn}(x_i) = e^{iK \cdot X} \psi_{0n}(x_i)$, where $p \psi_{kn} = \hbar K \psi_{kn}$ and $p \psi_{0n} = 0$. The eigenvalue corresponding to the state ψ_{kn} is $E_{kn} = E_n + (\hbar K)^2 / 2Nm$. The nuclear shell model violates momentum conservation by using localized wave functions which are not eigenfunctions of the total momentum. The Hamiltonian is modified to obtain a new Hamiltonian for which the localized wave function is an exact eigenfunction. The center-of-mass kinetic energy is subtracted from the original Hamiltonian;

$$H' = H - \frac{P^2}{2Nm} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i < j} V_{ij} - \sum_{ij} \frac{p_i \cdot p_j}{2Nm}.$$

Since $\psi_{kn}(x_i)$ are eigenfunctions of the total momentum P , they are also eigenfunctions of H' . The eigenvalue of H' for the state ψ_{kn} is independent of K and is equal to the eigenvalue E_n . A linear combination $\psi_n = \sum_k a_k \psi_{kn}$, which is a localized wave function, is therefore also the eigenfunction of H' with the same eigenvalue E_n . The modified Hamiltonian H' thus defines an eigenvalue problem which is equivalent to the original problem except for the center-of-mass motion, and in which it is possible to use localized wave functions. Other cases are treated analogously.

H. Kanazawa.

Gross, Eugene P.: Quantum theory of interacting bosons. Ann. of Phys. 9, 292—324 (1960).

Some qualitative features of the ground state of the system of interacting bosons are discussed using wave functions suggested by the semiclassical theory of a boson wave field. Approximate wave functions of the form $\Phi = U \Phi_0$ are used, where U is a unitary transformation suggested by the semiclassical theory and Φ_0 is a state of the noninteracting boson system. For the case of repulsive interactions one takes $U = e^{S_1} e^{S_2}$ where $S_1 = |f_0| (e^{iR} \psi_0^\dagger - e^{-iR} \psi_0)$ with R any real number and $S_2 = \sum_k \left(\frac{\sigma_k}{2} \right) (e^{2iR} \psi_k^\dagger \psi_{-k}^\dagger - c. c.)$. ψ_k are the Fourier components of the boson

field operator $\psi(x, t)$. For a given R the wave function refers to an indefinite number of particles. The parameters $|f_0|$ and σ_k are determined by minimizing the energy subject to the constraint that the mean number of particles is N . The wave function for each

value of R leads to the same energy and by superposing the functions with equal weight one can construct a wave function which is an exact eigenfunction of the number operator. The result is a variational extension of Bogolyubov's work. A finite fraction of the N particles is in the zero momentum plane wave state. The factor e^{S_2} , which represents the dynamic correlation, describes the spread over other momentum states arising from the presence of excited pairs of particles of opposite momenta. It arises physically from the zero point motions of phonon excitations of the system, which in turn are due to the binary collisions of the particles. When attractive forces play a decisive role, two cases are found. In one case a finite fraction of particles occupies a single particle state, which is periodic in space. The dynamic correlations are described as a generalization of pair excitations which is different in character for excitation momenta of the order of the inverse of the range of the attractive forces. The single particle state and dynamic correlations are codetermined in a systematic way. The approximate ground state shows long range order which is destroyed at finite temperatures. The fundamental assumption, common to repulsive and attractive cases is that there is a finite fraction of particles in is some one particle state. A second case where attractive forces are important is the solid state of the boson system. The ground state has the property that of the order of N orthogonal single particle states are occupied, each with an average of approximately one particle.

H. Kanazawa.

Sawada, Katuro: Ground-state energy of Bose-Einstein gas with repulsive interaction. Phys. Review, II. Ser. **116**, 1344—1358 (1960).

Die Grundzustandsenergie eines Bosegases der Dichte ρ mit abstoßenden Zweikörperkräften wird berechnet. Zunächst wird eine neuartige Entwicklung des Potentials nach der Streulänge α angegeben, bei der auch die Reichweite a als weiterer typischer Potentialparameter definiert wird (mit $\alpha = a$ für das Potential: $V = \text{const}$ für $r \leq a$, sonst Null). Dann wird die übliche störungstheoretische Entwicklung nach der Kopplungsstärke so umgeordnet, daß eine Entwicklung

$$E_0 = N \frac{2\pi\rho a}{m} \left\{ 1 + \frac{32\sqrt{2}}{15\pi} (8\pi\rho a^3)^{1/2} + G_1 (8\pi\rho a^3)^{1/2} (8\pi\rho a^2 \alpha)^{1/2} \right. \\ \left. + G_2 8\pi\rho a^3 + G_3 8\pi\rho \alpha^3 \ln 8\pi\rho \alpha a^2 + \dots \right\}$$

resultiert. Die Größen G_i wurden bis $i = 3$ berechnet. G_1 hängt von der Form des Potentials ab, $G_2 = \frac{8}{\pi^2}$ und $G_3 = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi}$.

H. Kümmerl.

Kretzschmar, Martin: Gruppentheoretische Untersuchungen zum Schalenmodell. II: Zum Problem der Translationsinvarianz. Z. Phys. **158**, 284—303 (1960).

Eine vorhergehende Arbeit (dies. Zbl. **87**, 442) wird auf die Translationsinvarianz des Hamilton-Operators im Schalenmodell mit reinharmonischem Oszillatorpotential ausgedehnt. Es ergibt sich sogleich das einfache Schalenmodell (der Grundzustände); die Quantenzahlen und Symmetrieeigenschaften der Grundzustände und einiger angeregter Zustände werden ausführlich abgeleitet. Wenn man die Translationsinvarianz unterdrückt, tauchen jene „unphysikalischen“ Scheinzustände auf, deren Verständnis bisher fehlte. Die für kollektive Kernmodelle typische, vereinfachende Annahme eines raumfesten Potentials birgt also unerwartete formale Tücken.

E. Breitenberger.

Gross, Eugene P.: Collective rotations of nuclei. Nuclear Phys. **14**, 389—397 (1960).

Bei der Berechnung kollektiver Nukleonenbewegungen unter Anwendung von Projektionsoperatoren schafft die auftretende Schwerpunktsbewegung Schwierigkeiten. Hier wird gezeigt, daß man irreführende Scheinzustände unterdrücken kann, indem man Wellenfunktionen $\psi \exp(2\pi i S/\hbar)$ ansetzt und das Geschwindigkeitspotential S geeignet variiert. Nullte Näherungen für S können aus gewissen be-

kannten, exakten Wellenfunktionen abgelesen werden. Auf die Kernrotation angewandt, ergibt das Verfahren die Kernträgheitsmomente von Inglis. — Zu dem eigenartigen Problem der Scheinzustände vgl. auch M. Kretzschmar (vorstehendes Referat).

E. Breitenberger.

Arvieu, Robert et Marcel Vénéroni: Quasi-particules et états collectifs des noyaux sphériques. C. r. Acad. Sci., Paris **250**, 992—994 (1960).

En vue d'applications aux noyaux on utilise une méthode analogue à celle employée par Bogoljubov dans l'étude des excitations collectives d'un état superconducteur. On obtient un hamiltonien tenant compte des corrélations de paires et susceptible de décrire les modes collectifs d'un système de fermions en interaction dans un potentiel moyen sphérique.

Zusammenfassung des Autors.

Sawicki, J.: Note on the target exchange corrections in Watson's theory of the optical model potential. Nuovo Cimento **15**, 606—613 (1960).

Verf. diskutiert die durch die Antisymmetrisierung hereinkommenden Korrekturen zum optischen Potential. Dabei benutzt er jedoch Theorien, die, wie Bell kürzlich gezeigt hat, fehlerhaft sind, weil sie das Problem der Antisymmetrisierung nicht lösen.

H. Kümmel.

Sugie, Atsushi: The imaginary part of the optical potential. Progress theor. Phys. **21**, 681—695 (1959).

The imaginary part of the optical potential is derived as an operator for the finite nucleus by reducing the Schrödinger equation approximately. This is essentially a second-order calculation, justified by the intermediate coupling model and the assumption of random signs of the non-diagonal elements of the interaction matrix. The imaginary part of the optical potential thus obtained is non-local and almost separable. This may be interpreted as corresponding to a process in which the incident nucleon jumps down to an unoccupied single particle state below the incident energy and excites the target nucleus, with near-conservation of total energy. The imaginary part may become abruptly stronger as the shape resonance is passed, since in this case there is a single particle state just below the incident energy and the corresponding excited states of the target nucleus are near the ground state. A result similar to that of Bloch [see this Zbl. **77**, 436 and Nuclear Phys. **3**, 137—162 (1957)] is obtained when calculating the single particle strength function.

G. Field.

Rodberg, Leonhard S.: The optical model and inelastic scattering. Ann. of Phys. **9**, 373—390 (1960).

Nach C. A. Levinson und M. K. Banerjee [Ann. of Phys. **3**, 67—90 (1958)] muß in der Theorie der direkten Wechselwirkung für inelastische Streuung von Protonen an Kernen ein schwächeres optisches Potential eingesetzt werden als es für elastische Streuung notwendig ist. Das kommt dadurch zustande, daß man vom optischen Potential den Einfluß des Zielkern-Nukleons subtrahieren muß, mit dem die direkte Wechselwirkung stattfindet. Dies scheint zunächst nur eine kleine 1/4-Korrektur zu sein. Jedoch zeigt eine nähere Untersuchung, daß die kurze Reichweite, die Spin- und Symmetrieabhängigkeit der Kernkräfte diesen Beitrag so groß machen, daß die Verkleinerung des optischen Potentials verständlich wird. Man hat dabei die *t*-Matrix statt der eigentlichen Nukleon-Nukleon Wechselwirkung zu benutzen. Damit wird auch die absolute Größe der Wirkungsquerschnitte für inelastische Prozesse mit direkter Wechselwirkung erstmalig richtig wiedergegeben.

H. Kümmel.

Foland, W. D. and R. D. Present: Hydrodynamic theory of spontaneous fission. Phys. Review, II. Ser. **113**, 613—621 (1959).

Based on the liquid drop model and further applying classical hydrodynamics to the motion of the nucleons during deformation of a nucleus, the penetration factor for the spontaneous fission of heavy nuclei is worked out. This factor is obtained by solving the many nucleon Schrödinger equation by the WKB method; the

Gamow integral over the nucleon coordinates can then be transformed into an integration over deformation parameters a_n , — deformation is expressed as $\sim 1 + \sum a_n P_n(\cos \theta)$ — with an integrand involving an effective mass m^* and the potential energy v . m^* is evaluated from the kinetic energy of irrotational flow of nucleons along classical stream-lines, because this kind of motion gives the smallest m^* and the largest penetration factor for a given barrier. v consists of surface and Coulomb energies of deformation. (Out of all a_n 's only a_2 is retained; the kinetic and the potential energies are expanded in powers of a_2). In view of several uncertainties in the estimation of the potential barrier, to which the penetration factor is very sensitive, the authors compare their results not with the half-life time of a specific nuclide but with the variation of the penetration factor and half-life time produced by variation in the barrier height for nuclides of highest Z ($Z = 100$, $Z^2/A \approx 39$), and find close agreement with the empirical formula of Swiatecki [Phys. Review, II. Ser. **100**, 937 (1955)].

Z. Koba.

Širkov (Shirkov), D. V.: On the compensation equation in superconductivity theory. Soviet Phys., JETP **36** (9), 421—424 (1959), Übersetzung von Žurn. éksper. teor. Fiz. **36**, 607—612 (1959).

A relation between the matrix elements of the variational derivatives of the scattering matrix and the energy operator is established. With its aid the kernel of the integral equation for the compensation of "dangerous" diagrams is expressed in terms of the usual Green functions.

Zusammenfassung des Autors.

Čeń Čuń-sjań (Chen Chun-sian) and Čzou Si-šiń (Chow Shih-hsun): The basic compensation equation in superconductivity theory when the Coulomb interaction is taken into account. Soviet Phys., JETP **36** (9), 885—889 (1959), Übersetzung von Žurn. éksper. teor. Fiz. **36**, 1246—1253 (1959).

Fröhlich's model is studied by the Bogolyubov method taking the Coulomb interaction into account. A partial summation of the perturbation theory series is performed by approximate second quantization in order to eliminate the infrared divergence. The basic compensation equation for dangerous diagrams and an expression for the renormalized single fermion excitation energy for the case when the Coulomb interaction is taken into account are obtained in explicit form as a result and are discussed.

Zusammenfassung des Autors.

Wentzel, Gregor: On the phase transition of a superconductor. Helvet. phys. Acta **33**, 859—871 (1960).

In previous studies of the statistical mechanics of a superconductor, only the "reduced Hamiltonian" of the BCS theory [cf. Bardeen et al., Phys. Review, II. Ser. **108**, 1175—1204 (1957)] has been used which ignores the vast majority of the electron-electron interactions. Here, the Hamiltonian is extended by including the other interactions as perturbations up to the second order. As a preliminary step, omitting all but the first-order terms in the Hamiltonian, we derive a rigorous expression for the free energy. Then, to take account of the second-order perturbations, a variational method is used. Particular attention is paid to the behaviour of the energy near the critical temperature. Effects of the lattice periodicity are not examined in this paper.

Zusammenfassung des Autors.

Emery, V. J. and A. M. Sessler: Possible phase transition in liquid He^3 . Phys. Review, II. Ser. **119**, 43—49 (1960).

Verff. betrachten das flüssige He^3 als Fermiflüssigkeit und wenden darauf eine Verallgemeinerung der Theorie der Supraleitung von Bardeen, Cooper und Schrieffer an. Dabei ergibt sich die Möglichkeit einer Phasenumwandlung im flüssigen He^3 . In diesem Zusammenhang wird speziell die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme untersucht. Es ergibt sich eine Übergangstemperatur von etwa $0,05 \dots 0,1^\circ\text{K}$, die jedoch stark von der Form des intermolekularen Potentials abhängt, das mit in die Rechnung eingeht. Bis zu $0,085^\circ\text{K}$ herunter, der bisher tiefsten Temperatur die bei Experimenten angewandt wurde, konnten keine Anzeichen für eine Phasenumwandlung festgestellt werden, was jedoch nicht im Widerspruch zu den hier durchgeführten Betrachtungen steht, wenn man insbesondere bedenkt, daß der oberhalb der Übergangstemperatur vorausgesagte lineare Verlauf der spezifischen Wärme tatsächlich vom Experiment geliefert wird.

W. Koeppe.

Goldstein, Louis: Some thermal properties of liquid helium three. *Phys. Review* **117**, 375—381 (1960).

In Fortsetzung früherer Arbeiten über das leichte Heliumisotop He^3 werden das Molvolumen und der thermische Ausdehnungskoeffizient des flüssigen He^3 berechnet. Dabei werden nicht nur die vom Kernspinsystem herrührenden Beiträge berücksichtigt, die zu den bekannten Anomalien der thermischen Eigenschaften des flüssigen (und festen) He^3 Anlaß geben, sondern auch Beiträge, die von anderen Freiheitsgraden geliefert werden. Bei der Rechnung wird von der Annahme ausgegangen, daß alle Beiträge rein additiv wirken. Mit vorläufigen Experimenten scheint gute Übereinstimmung zu bestehen.

W. Koepe.

Bernardes, N. and H. Primakoff: Theory of solid He^3 . *Phys. Review*, II. Ser. **119**, 968—980 (1960).

Unter der Annahme, daß die interatomaren Kräfte im festen He^3 einem Lennard-Jones-6,12-Potential genügen, werden verschiedene Eigenschaften des festen He^3 berechnet, und zwar für Temperaturen unterhalb 1 °K und Drucke von etwa 30 Atm. Die Berechnungen lassen die Möglichkeit einer Änderung der magnetischen Eigenschaften bei etwa 0,1 °K und höheren Drucken offen. Weiterhin wird ein Minimum in der Schmelzkurve bei 0,37 °K und ein Maximum bei etwa 0,08 °K sowie ein negativer thermischer Ausdehnungskoeffizient des festen He bei tiefen Temperaturen vorausgesagt; diese Voraussagen wurden inzwischen (mit Ausnahme des Maximums) experimentell bestätigt.

W. Koepe.

Bonch-Bruich, V. L. and Sh. M. Kogan: On the theory of the temperature Green's functions. *Ann. of Phys.* **9**, 125—138 (1960).

Die Greensche Funktion eines quantenmechanischen Mehrkörpersystems wird am Beispiel der Spin-1/2-Teilchen mit elektromagnetischer Wechselwirkung für endliche Temperaturen — im wesentlichen mit den Standard-Methoden für solche Probleme — untersucht. Das Spektraltheorem vom Lehmannschen Typus wird abgeleitet und dessen Anwendung auf spezielle Greensche Funktionen diskutiert. Für das Elektronengas im Festkörper erhält man das Anregungsspektrum der Plasmaschwingungen mit Dämpfung. Diese ist für typische Fälle bemerkenswert groß.

H. Kümmel.

Cén Čun-sjañ (Chen Chun-sian) and Čzou Si-sin (Chow Shin-hsun): Energy spectrum of a high density electron gas. *Soviet Phys., JETP* **7**, 1080—1085 (1958), Übersetzung von *Žurn. eksper. teor. Fiz.* **34**, 1566—1573 (1958).

Von Gell-Mann und Brueckner (dies. Zbl. **80**, 445) und von Sawada (dies. Zbl. **80**, 446) wurde das Elektronengas mit Wechselwirkung in der Weise behandelt, daß die höchstdivergenten Anteile sämtlicher Ordnungen der Störungsrechnung aufsummiert werden. In der vorliegenden Arbeit wird eine Modell-Hamiltonfunktion aufgestellt, welche gerade diesem Vorgehen entspricht. Diese wird nach dem Verfahren von Tjablikov (zitiert in „N. N. Bogoljubov, Vorlesungen über Quantenstatistik Kiew 1949) diagonalisiert. Die Korrelationsenergie wird in Integralform angegeben. Es wird gezeigt, daß sie auch die langreichweitigen Anteile, also die Plasmaschwingungen, enthält. Mit Hilfe einer ähnlichen, um ein Elektron-Loch-Paar erweiterten Modell-Hamiltonfunktion kann auch das Spektrum der Anregungsenergien angegeben werden. Ihr Einfluß auf die spezifische Wärme wird in Form einer Entwicklung für große Dichte angegeben.

H. Volz.

Pincherle, L.: Band structure calculations in solids. *Phys. Soc., Rep. Progr. Phys.* **23**, 355—394 (1960).

Die quantitative Berechnung von Energieniveaus und Wellenfunktionen der Elektronen in festen Körpern nimmt einen immer größeren Raum unter den Arbeiten zur Festkörperphysik ein. Im vorliegenden Übersichtsartikel werden die diversen Methoden, die zur Behandlung dieses Problems entwickelt wurden, vom Prinzipiellen her kritisch beleuchtet und miteinander verglichen. Mathematische Einzelheiten

werden nicht gegeben, es wird durchweg das Bändermodell als streng gültig vorausgesetzt. Der Artikel ist sehr gut lesbar, er verschafft dem auf diesem Gebiet Arbeitenden einen ausgezeichneten Überblick und gibt dem Neuling durch die reichlichen Zitate die Möglichkeit, sich schnell einarbeiten zu können. *W. Klose.*

Elliott, R. J. and R. Loudon: Group theory of scattering processes in crystals. *Phys. Chem. Solids* **15**, 146—151 (1960).

Diese Arbeit ist zu notieren als Quelle der vollständigen Charaktertafeln der Raumgruppen des Diamantgitters, die den Punkten X , W der Brillouin-Zone und Ebenen durch sie zugehören. *W. Klose.*

Bross, Helmut: Zur Richtungsabhängigkeit physikalischer Eigenschaften in Kristallen mit besonderer Berücksichtigung der galvano- und thermomagnetischen Effekte. *Z. Naturforsch.* **15a**, 859—874 (1960).

Für Mathematiker interessant dürften die in dieser Arbeit tabulierten Funktionen sein. Es handelt sich um solche Linearkombinationen von Kugelflächenfunktionen, die zu den Darstellungen T_1 (identische Darstellung) und T_1' (eindimensionale Darstellung, die den reinen Drehungen 1, den Spiegelungen -1 zugeordnet) der verschiedenen Kristallklassen gehören. *W. Klose.*

Streitwolf, H. W.: Zur Theorie der Sekundärelektronenemission von Metallen. Der Anregungsprozeß. *Ann. der Physik*, VII. F. **3**, 183—196 (1959).

Zur theoretischen Untersuchung des Anregungsprozesses der Sekundärelektronen-Emission in Metallen verwendet Verf. die Blochschen Einelektronenfunktionen und die abgeschirmte Wechselwirkung zwischen Metallelektronen und Primärelektronen, und läßt den Austausch außer Betracht, was für große Primärenergien (> 1000 eV) gerechtfertigt ist. Für die Nicht-Umklapp-Prozesse wird das Matrixelement durch den konstanten Wert ersetzt, welchen es für freie Elektronen sowie für sehr kleine Impulsübertragung besitzt, im übrigen aber die Auswertung ohne Vernachlässigungen durchgeführt. Es ergibt sich eine von Baroody (dies. Zbl. **72**, 238) halbklassisch abgeleitete Formel. Die Anregungsfunktion der Umklapp-Prozesse läßt sich nicht geschlossen berechnen. *Walter Franz.*

Stolz, Hubertus: Zur Theorie der Sekundärelektronenemission von Metallen. Der Transportprozeß. *Ann. der Physik*, VII. F. **3**, 197—210 (1959).

Die Winkel- und Energieverteilung der aus einem Metall austretenden Sekundärelektronen wird mittels der Boltzmann-Gleichung berechnet. Dabei wird der Einfluß der Oberfläche auf die Prozesse im Inneren des Metalls vernachlässigt, was eine Beschränkung auf Primärenergien > 1 kV bedeutet. Als Anregungsprozesse werden die Nichtumklapp-Prozesse nach den Formeln von Streitwolf (s. vorstehendes Referat) berücksichtigt. Das Ergebnis der Rechnung stimmt mit Messungen von Jonker [*Philips Research. Rep.* **12**, 249 (1957)] nicht überein; die Gründe hierfür können zum Teil in den nicht berücksichtigten Umklapp-Prozessen, wahrscheinlich aber in noch anderen unbekannten Anregungsprozessen vermutet werden. *Walter Franz.*

Cohen, Morrel H., Michael J. Harrison and Walter A. Harrison: Magnetic-field dependence of the ultrasonic attenuation in metals. *Phys. Review*, II. Ser. **117**, 937—952 (1960).

Es wird eine halbklassische Theorie der Ultraschallabsorption von Metallen in der Näherung freier Elektronen angegeben. Aus den Maxwell-Gleichungen und der Boltzmann-Gleichung, die nach der kinetischen Methode von Chambers integriert wird, werden die elektrischen Felder und Ströme und daraus unter der Voraussetzung der lokalen Mitnahme der Fermifläche („collision-drag“) die Absorption berechnet. Dabei werden die verschiedensten Bedingungen, die die relativen Größenordnungen von Wellenlänge, freier Weglänge und Skintiefe betreffen, und verschiedene Orientierungen vom Ausbreitungs-, Polarisations- und Magnetfeldrichtung betrachtet. Wenn die Relaxationszeit der Elektronen groß gegen die reziproke Larmorfrequenz

ist, ergibt sich eine oszillatorische Abhängigkeit der Absorption vom reziproken Magnetfeld, und zwar durch Zyklotronresonanz, wenn die Larmorfrequenz von der Größenordnung der Schallfrequenz ist, und durch geometrische Resonanz, wenn der Bahnradius von der Größenordnung der Schallwellenlänge ist. Bei longitudinalen Schallwellen tritt bei hohen Schallfrequenzen und Magnetfeldern eine Magneto-plasma-Resonanz auf. Die durch die Quantisierung der Elektronenzustände im Magnetfeld bedingten Oszillationen des Absorptionskoeffizienten sind in der Theorie nicht enthalten. Außer den Resonanzen sind auch die Grenzfälle geringer und hoher Magnetfelder untersucht.

J. Mertsching.

Langer, J. S.: Theory of impurity resistance in metals. Phys. Review, II. Ser. **120**, 714—725 (1960).

A many-body technique is developed for the calculation of the *dc* resistivity of a Fermi fluid in the presence of a few, randomly scattered, fixed, impurities. A certain class of graphs yields an expression for the conductivity which is similar in form to the standard classical transport coefficient; but the decay time is determined by the scattering of single particle-like excitations at the Fermi surface by screened impurities. A propagator method similar to that used in field theory is employed throughout the paper, and the perturbation-theoretic interpretation of this method is examined in some detail.

Zusammenfassung des Autors.

Mattis, D. C.: Steady-state distribution function in dilute electron gases. Phys. Review, II. Ser. **120**, 52—57 (1960).

Normalerweise wird für die optisch erzeugten Leitungselektronen in Halbleitern angenommen, daß sie mit einer Boltzmann-Verteilung statistisch verteilt seien. Verf. weist nun nach, daß das nicht der Fall sein kann und gibt mittels eines Variationsverfahrens eine Lösung des Problems, die a) von der Boltzmann-Verteilung verschieden ist und b) Widersprüche zwischen bisheriger Theorie und Experimenten beseitigt. Die die Größe

$$\Phi = \sum_{\mathbf{p}} \left\{ g(\mathbf{p}) x(\mathbf{p}) - \frac{1}{2} x^2(\mathbf{p}) e^{-\epsilon/kT} / \tau(\mathbf{p}) - \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{p}'} S(\mathbf{p}, \mathbf{p}') [x(\mathbf{p}) - x(\mathbf{p}')]^2 \right\}.$$

zu einem Maximum machende Funktion $x(\mathbf{p})$ liefert mit $x(\mathbf{p}) \cdot e^{-\epsilon/kT} = f(\mathbf{p})$ die der Boltzmann-Gleichung genügende gesuchte Verteilungsfunktion der Elektronen:

$$g(\mathbf{p}) - \frac{f(\mathbf{p})}{\tau(\mathbf{p})} + \sum_{\mathbf{p}'} S(\mathbf{p}, \mathbf{p}') [e^{\epsilon'/kT} f(\mathbf{p}') - e^{\epsilon/kT} f(\mathbf{p})]$$

Es ist: $g(\mathbf{p})$ die optische Erzeugungsrate, $\tau(\mathbf{p})$ die Relaxationszeit für Elektronenvernichtung $\epsilon(\mathbf{p})$, $\epsilon'(\mathbf{p}')$ Elektronenenergie zu den Impulsen \mathbf{p} , \mathbf{p}' , $S(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = S(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ ein symmetrischer Kern.

W. Klose.

Ham, F. S. and D. C. Mattis: Electrical properties of thin-film semiconductors. IBM J. Res. Develop. **4**, 143—151 (1960).

Die Boltzmann-Gleichung

$$-\dot{\mathbf{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\mathbf{r}} f_1(\mathbf{f}, \mathbf{r}) + (e/\hbar c) (\dot{\mathbf{r}} \times \mathfrak{H}) \cdot \vec{\nabla}_{\mathbf{r}} f_1(\mathbf{f}, \mathbf{r}) - f_1/\tau(E) + (e/\hbar) \mathfrak{F} \cdot \vec{\nabla}_{\mathbf{r}} f_0(E) = 0$$

($f_0 = C \exp \{ -E(\mathbf{f})/k_0 T \}$; \mathfrak{F} elektrisches Feld, \mathfrak{H} Magnetfeld; E Energie) wird für ellipsoidische Energieflächen $E(\mathbf{f}) = \alpha_1(k_x^2 + k_y^2) + \alpha_2 k_z^2$ und die Randbedingungen: $f_1(\mathbf{f}, x = +d) = 0$ wenn $\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}} < 0$, $f_1(\mathbf{f}, x = -d) = 0$ wenn $\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}} > 0$ (mit \mathbf{n} als Normale auf dem Film) gelöst.

W. Klose.

Keldyš (Keldysh), L. V.: Behavior of non-metallic crystals in strong electric fields. Soviet Phys., JETP **6**, 763—770 (1958). Übersetzung von Žurn. éksp. teor. Fiz. **33**, 994—1003 (1957).

Die Theorie der inneren Feldemission (Zener-Emission) wird neu behandelt. Eine interessante Verbesserung der Houstonschen Theorie besteht darin, daß die Diagonal-Elemente der Band-Band-Übergangs-Matrixelemente wegtransformiert werden. Sodann weist der Verf. nach, daß die Houstonschen Matrixelemente an einem Band-Verzweigungspunkt der komplexen Wellenzahlebene einen Pol besitzen, so daß die vom Ref. (Handbuch der Physik Bd. 17) vorgenommene Aus-

wertung der Theorie revidiert werden muß [Anm. des Ref.: Dies wurde vom Ref. in Z. Naturforsch. 14, 415—418 (1959; dies. Zbl. 88, 151) durchgeführt. Gleichzeitig wird dort ein Fehler korrigiert, welcher dem Verf. bei der Auswertung eines komplexen Integrals unterlaufen ist]. Weiter betrachtet Verf. erstmalig Feldemissionsprozesse mit gleichzeitiger Emission oder Absorption mehrerer Phononen. *Walter Franz.*

Courary, B. S. and A. A. Maradudin: Absorption and emission spectra of an electron in a one-dimensional deep trap. *Phys. Chem. Solids* 13, 88—104 (1960).

The wave functions and the energies of the bound states of an electron in a special one-dimensional deep trap are calculated. Only two essential approximations are made in the course of the treatment, namely the Born-Oppenheimer approximation for the separation of the electronic and the nuclear motions, and the harmonic approximation for the lattice energy. Further approximations are also made, but these are not essential to the calculation and they can be avoided, if necessary. Green's function techniques are employed in the solution of the electronic and the lattice-vibration problems, and they make possible the treatment of both the localized and the extended lattice-vibration modes and their influence on the electronic absorption (emission) spectrum. The first two moments of the absorption and emission spectra are then calculated. The principal utility of this work lies in providing a test case for more approximate theories, although a generalization of the method to three dimensions and to more realistic potentials should also be possible. *Zusammenfassung des Autors.*

Kane, E. O.: Phonon broadening of impurity lines. *Phys. Review, II. Ser.* 119, 40—42 (1960).

Die Theorie der großen Linienbreiten der Elektronen an einer Verunreinigung (Lax, Burstein, dies. Zbl. 64, 239) treffen bei Ge und Si für flach unter der Bandkante liegende Verunreinigungsniveaus nicht zu. Wegen der schwachen Elektron-Phonon-Kopplung in Ge und Si ändert der optisch angeregte Elektronenübergang am Verunreinigungszentrum nichts am Phononzustand des Gitters. *W. Klose.*

Takeuti, Yoshihisa: Electronic structure of exciton. *Suppl. Progress theor. Phys. Nr. 12*, 75—110 (1959).

Zusammenfassender Bericht.

Muto, Toshinosuke: Exciton problem and a new approach to its electronic structure. *Suppl. Progress theor. Phys. Nr. 12*, 3—39 (1959).

Zusammenfassender Bericht.

Horie, Chiuji: Exciton and plasmon in insulating crystals. *Progress theor. Phys.* 21, 113—134 (1959).

The relation between an exciton and a plasmon in insulators is investigated from a viewpoint of an electron-hole pair approximation. It is shown that the usual exciton model is valid in the insulator having appreciably localized wave functions and that if the wave functions are not appreciably localized but rather extended, a plasmonlike excitation becomes possible and appears above the continuum pair-band besides the exciton level below it. These behaviours are discussed in comparison with experimental facts. *Zusammenfassung des Autors.*

Davis, H. L.: New method for treating the antiferromagnetic ground state. *Phys. Review, II. Ser.* 120, 789—800 (1960).

A perturbation expansion for the ground-state energy of an antiferromagnetic spin system is obtained in terms of a linked-spin-cluster expansion similar to Goldstone's linked-Feynman-diagram expansion for the interacting fermion system. From the energy perturbation series, perturbation series for the long- and short-range order may be obtained. Using these perturbation series, the ground-state properties are calculated through seventh order and compared with the results obtained by other investigators. In all cases, the values obtained here for the ground-state energy are lower than those which have been obtained by purely variational means. The results for the long-range order are radically different from the variational results but agree qualitatively with those obtained by spin-wave theory; however, the method is free of the usual objections which are voiced to spin-wave treatments of antiferromagnetism. The present work is incomplete in that limits on the error introduced by using only a finite number of terms of the perturbation series to calculate the physical properties are not obtained. But the author feels that the merit of the present work is in the method rather than in the results since it provides a consistent framework both to settle the convergence question and to treat the antiferromagnetic spin system at finite temperatures. *Zusammenfassung des Autors.*

Morita, Tohru: Equation of state of high temperature plasma. *Progress theor. Phys.* 22, 757—774 (1960).

Die Debye-Hückelsche Theorie für ein vollionisiertes Plasma soll abgeleitet werden. Bei Verwendung der klassischen Mechanik ergeben sich Schwierigkeiten, da der Boltzmannfaktor bei Annäherung eines Elektrons an ein Ion unendlich wird und so zu einer Divergenzstelle der Verteilungsfunktion führt. Die quantenmechanische Rechnung läßt sich mit Hilfe einer Entwicklung nach Mayer und durch Benutzung eines effektiven Potentials zweier Teilchen auf die übliche klassische Form zurückführen. Das sich ergebende effektive Potential bleibt bei der Annäherung von zwei ungleich geladenen Teilchen endlich. Wegen der Coulombschen Wechselwirkung der Teilchen bei größeren Abständen läßt sich die übliche Virialentwicklung nicht anwenden. Erst eine geeignete Summation führt zu einer brauchbaren Entwicklung, deren erste Näherung (ring approximation) die Debye-Hückelsche Näherung ergibt. Die nächsthöhere Näherung (water melon approximation) liefert einen Korrekturterm, der jedoch klein ist gegenüber der ersten Näherung. Die Grenzen der Debye-Hückelschen Näherung werden angegeben.

K. G. Müller.

Vedenov, A. A. and A. I. Larkin: Equation of state of a plasma. Soviet Phys., JETP 36 (9), 806—821 (1959), Übersetzung von Žurn. éksper. teor. Fiz. 36, 1133—1142 (1959).

Die thermodynamischen Funktionen eines Systems mit Coulombscher Wechselwirkung sollen berechnet werden. Hierzu wird unter Verwendung von Teilchen-erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Hamiltonoperator aufgestellt und mit Hilfe einer Diagrammtechnik ausgewertet. Diese Diagrammtechnik führt zu einem Näherungsverfahren, bei dem, beginnend mit der Zweiteilchenwechselwirkung, nacheinander die höheren Wechselwirkungen berücksichtigt werden. Für ein System aus Ionen und Elektronen wird die freie Energie für die beiden Fälle hoher und niedriger Temperatur berechnet. Neben dem bekannten Debye-Hückelterm ergeben sich noch weitere Zusatzglieder.

K. G. Müller.

Volkov, T. F.: A stationary plasma density distribution in an electromagnetic field. Plasma Physics and the Problem of controlled thermonuclear Reactions. 3, 395—405 (1959).

Im Hinblick auf die Begrenzung und Aufheizung eines Plasmas wird das Verhalten eines Plasmas in einem elektromagnetischen Feld untersucht. Als Ausgangsgleichungen werden die Maxwellschen Gleichungen, die Bewegungsgleichungen der Elektronen unter Vernachlässigung der Stöße und die Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht verwendet. Hierbei sollen die Ionen im Hochfrequenzfeld keine Verschiebung erleiden. Bei fehlendem äußerem Magnetfeld ergibt sich für die Dichteverteilung ein Ausdruck analog zur barometrischen Höhenformel, wobei das effektive Potential durch die stehende elektromagnetische Welle bedingt ist. Der Druck des Plasmas und der der stehenden Welle sind einander gleich. Der Ansatz für die Amplitude des elektromagnetischen Feldes wird durch zwei Konstanten bestimmt, die durch die Randbedingungen festgelegt werden. Für drei charakteristische Fälle der Wahl der Konstanten werden Dichte- und Feldverteilung demonstriert. Es zeigt sich, daß das Plasma aus dem Gebiet hoher Feldstärken herausgedrückt wird. Durch geeignete Wahl des Feldes kann die Plasmadichte im Gebiet hohen Feldes auf beliebig kleine Werte verringert werden. Die Lösung ermöglicht einen Anschluß an eine stehende elektromagnetische Welle im Vakuum. Eine entsprechende Rechnung für ein konstantes äußeres Magnetfeld führt wieder zu einer exponentiellen Dichteverteilung. Die potentielle Energie besteht jedoch aus zwei Anteilen, die der Zerlegung der Welle in eine ordentliche und eine außerordentliche Welle entsprechen. Oberhalb einer bestimmten Frequenz wechselt die potentielle Energie ihr Vorzeichen, so daß das Plasma in den Bereich hohen Feldes hineingezogen wird. Abschließend wird eine Plasmaschicht zwischen zwei ideal leitenden parallelen Ebenen untersucht. Die Eigenfrequenzen liegen zwischen den Frequenzen des leeren

Resonators als untere Grenze und den Frequenzen eines von homogenem Plasma erfüllten Resonators als obere Grenze. *K. G. Müller.*

Gambirasio, Giorgio: On the electrical behavior of an ideal plasma. *Phys. Fluids* **3**, 299—302 (1960).

Das Verhalten eines idealen Plasmas, ohne Druck- und Gravitations-Gradienten in einem konstanten magnetischen Feld, wird beim plötzlichen Einschalten eines starken elektrischen Feldes, das senkrecht zum Magnetfeld steht, untersucht. Die Lösungen werden mit Hilfe von Laplace-Transformationen gefunden. Für verschiedene Zustände des Plasmas und der äußeren Felder werden Näherungsformeln angegeben, die eine Auswertung der umständlichen allgemeinen Ausdrücke vereinfachen. Die Impedanz, die das Plasma gegenüber der Spannungsquelle besitzt, wird errechnet und ein Netzwerk angegeben, das die gleichen elektrischen Eigenschaften wie das Plasma besitzt. *C. Passow.*

Sagdeev, R. Z.: Containment of a plasma by the pressure of a standing electromagnetic wave. *Plasma Physics and the Problem of controlled thermonuclear Reactions.* **3**, 406—422 (1959).

Das Gleichgewicht zwischen einem einseitig begrenzten, aufgeheizten Plasma und einer stehenden elektromagnetischen Welle in einem sich anschließenden Vakuumgebiet wird untersucht. Die räumliche Verteilung aller Größen soll nur durch eine Ortskoordinate z bestimmt sein. Als erstes wird eine zirkular-polarisierte Welle ohne statisches Magnetfeld behandelt. Für Ionen und Elektronen wird die Boltzmann-Gleichung ohne Stoßglied unter Berücksichtigung des eigenen elektromagnetischen Feldes aufgestellt. Hierbei wird nur derjenige Anteil der Kraft auf die Ionen berücksichtigt, der von der Ladungstrennung herrührt. Für ein schnell veränderliches elektromagnetisches Feld werden die Bewegungsgleichungen eines Elektrons in x - und y -Richtung durch die ersten Glieder einer Reihenentwicklung angenähert. Die zeitlich gemittelte Bewegung eines Elektrons in z -Richtung kann durch ein effektives Potential beschrieben werden, das neben dem gewöhnlichen elektrischen Potential noch einen Anteil des Hochfrequenzfeldes besitzt. Mit Hilfe dieser mittleren Elektronenbewegung wird aus dem Gleichungssystem die Geschwindigkeitsverteilung der Ionen ermittelt, die noch an die Randbedingungen angepaßt werden muß. Die Randbedingung, daß bei $z \rightarrow +\infty$ allein das Plasma und bei $z \rightarrow -\infty$ allein die elektromagnetische Welle existieren, führt zu einer stationären Lösung, wenn die Ionengeschwindigkeitsverteilungsfunktion oberhalb einer endlichen Maximalgeschwindigkeit v_{\max} verschwindet. Für das Übergangsgebiet lassen sich asymptotische Lösungen für $z \rightarrow +\infty$ und $z = 0$ berechnen. $z = 0$ bezeichnet die Stelle, an der die Ionen mit v_{\max} durch die Wirkung des elektromagnetischen Feldes umkehren. Hier sind der Druck des Plasmas und der Welle einander entgegengesetzt gleich. Unter dem Einfluß von Stößen bilden sich jedoch auch Ionen mit einer Geschwindigkeit oberhalb von v_{\max} , so daß eine geringe Zahl von Ionen in die Vakuumzone eindringen kann. Für ein langsam veränderliches Feld läßt sich eine ähnliche Betrachtung des Übergangsgebiets Plasma-Welle (skin-layer) anstellen. Die Untersuchung für ein überlagertes konstantes Magnetfeld in z -Richtung beschränkt sich auf die Frequenzen, die wesentlich kleiner als die Larmor-Frequenz der Elektronen sind. Unter Verwendung der Driftnäherung für die Elektronenbewegung läßt sich wiederum ein effektives Potential herleiten, dessen Wert jedoch von dem Vorzeichen von ω und damit von dem Drehsinn der zirkular polarisierten Welle abhängt. Abschließend wird die Konfiguration Plasma-Welle auf Instabilitäten untersucht. Die linearisierten magnetohydrodynamischen Gleichungen des gestörten Plasmas und die Randbedingungen für den Übergang Plasma -Welle führen zu einem Stabilitätskriterium. Hiernach können durch Oberflächenstörungen mit einer Wellenlänge, die mit derjenigen der stehenden Welle vergleichbar ist, Instabilitäten auftreten. Gegen kurzwelligere Störungen ist die Konfiguration stabil. *K. G. Müller.*

Firsov, O. B.: A plasma in a "magnetic grid". Plasma Physics and the Problem of controlled thermonuclear Reactions. 3, 386—394 (1959).

Verschiedene zeitlich konstante Magnetfeldanordnungen werden diskutiert, die den Kontakt eines eingeschlossenen Plasmas mit den äußeren Wänden möglichst gering halten. Drei spezielle ebene Anordnungen werden im Hinblick auf die experimentelle Anwendung der entsprechenden rotationssymmetrischen Anordnungen angegeben. Da aus Stabilitätsgründen das Magnetfeld zur Wand hin anwachsen soll, schneiden wegen der Existenz der Maxwellschen Gleichungen die Kraftlinien an einigen Stellen die Wand. An diesen Stellen besitzt das Magnetfeld eine Art Spalt, durch den das Plasma die Wand erreichen kann. Die Verluste durch einen Spalt werden berechnet. An der Wand stellt sich ein solches Potential ein, das Elektronen und Ionen das Innere des Plasmas in gleicher Zahl mit der thermische Geschwindigkeit der Ionen verlassen. Die effektive Spaltbreite ergibt sich als das Vierfache des Larmor-Radius der Elektronen. Die Diffusion senkrecht zu den Feldlinien durch den Einfluß von Stößen vergrößert die Spaltbreite. Abschließend wird der zeitliche Verlauf des Plasmas im Inneren und die Intensität einer thermonuklearen Reaktion berechnet.

K. G. Müller.

Jankov (Yankov), V. V.: Behavior of a conducting gaseous sphere in a quasi-stationary electromagnetic field. Soviet Phys., JETP 36 (9), 388—391 (1959), Übersetzung von Žurn. éksp. teor. Fiz. 36, 560—564 (1959).

Als erstes wird das Verhalten einer ideal leitenden Plasmakugel in einem homogenen elektromagnetischen Feld untersucht. Die Störung der kugelförmigen Gestalt wird durch eine Entwicklung der die Oberfläche beschreibenden Funktion nach Kugelflächenfunktionen erfaßt. Mit Hilfe dieser Entwicklung lassen sich die Energie der Kugel im äußeren Feld und die Kräfte auf die Oberfläche berechnen. Aus der Gesamtenergie, die sich aus dieser Feldenergie und der inneren Energie der sich adiabatisch verhaltenden Plasmakugel zusammensetzt, kann das Stabilitätsverhalten abgeleitet werden. Die Untersuchung des homogenen Feldes läßt sich auf ein quasi-homogenes Feld übertragen.

K. G. Müller.

Guradjan (Gurzadyan), G. A.: The electron temperature of a medium in the presence of synchrotron radiation. Soviet Phys., Doklady 5, 17—19 (1960), Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 130, 287—289 (1960).

Unter der Voraussetzung der Stationarität des Systems und des Strahlungsgleichgewichts wird die Elektronentemperatur der langsamen Elektronen aus der Synchrotronstrahlung bestimmt, wobei für die relativistischen Elektronen ein Potenzspektrum vorgegeben ist.

G. Wallis.

Volkov, T. F.: Ion oscillations in a plasma. Soviet Phys., JETP 37 (10), 302—304 (1960), Übersetzung von Žurn. éksp. teor. Fiz. 37, 422—426 (1959).

Der Einfluß eines elektromagnetischen Hochfrequenzfeldes auf die Ionenoszillation in einem Plasma wird in kinetischer Beschreibungsweise behandelt. Abschließend werden die sich daraus ergebenden Möglichkeiten von Instabilitäten behandelt.

G. Wallis.

Bonnevier, B. and B. Lehnert: The motion of charged particles in a rotating plasma. Ark. Fys. 16, 231—236 (1960).

Das Magnetfeld einer Stromschleife wird als magnetischer Spiegel zum Einschließen eines Plasmas vorgeschlagen. Das Plasma soll um die Symmetrieachse der Anordnung rotieren. Hierdurch wird der Trägerverlust zu den Stromzuführungen im achsennahen Gebiet verringert und die Einschließung des Plasmas verbessert. Zur Berechnung dieser Anordnung wird ein um diese Symmetrieachse rotierendes Bezugssystem verwendet. Die Bewegungsgleichungen eines Ladungsträgers in dem Magnetfeld der Stromschleife und in einem zusätzlichen elektrischen Feld werden diskutiert. Durch die Wirkung der Zentrifugal- und Corioliskräfte existieren für

Ladungsträger mit bestimmten Anfangsbedingungen sog. verbotene Gebiete, die von den Teilchen nicht erreichbar sind. Der so bedingte Einfang von Teilchen wird an einem Zahlenbeispiel demonstriert.

K. G. Müller.

Penrose, Oliver: Electrostatic instabilities of a uniform non-Maxwellian plasma. *Phys. Fluids*, **3**, 258—265 (1960).

Auf Grund der Vlasov-Gleichung wird eine Bedingung für die Stabilität eines Plasmas mit nicht Maxwellscher Geschwindigkeitsverteilung abgeleitet. Hierzu wird die Dispersionsbeziehung hinsichtlich der Modes untersucht, die zeitlich exponentiell anwachsen. Als Anwendungsbeispiele werden einfache Beam-Plasma-Modelle durchgerechnet.

G. Wallis.

Kvasnica, J.: Losses through Bremsstrahlung in relativistic and ultra-relativistic region of electron temperatures of plasma. *Czechosl. J. Phys.* **10**, 261—267 (1960).

Die Energie, die ein Plasma aus Wasserstoff- oder Deuteriumionen mit Elektronen einer sehr hohen Energie infolge von Bremsstrahlungsprozessen abstrahlt, wird errechnet. Während die Bremsstrahlung bei Stößen zwischen zwei Ionen vernachlässigt werden kann, wird sowohl der Beitrag aus den Ionen-Elektronen Stößen wie aus den Elektronen-Elektronen Stößen mit berücksichtigt. Für die Bremsstrahlungswirkungsquerschnitte werden die von Bethe-Heitler errechneten Formeln eingesetzt. Die Betrachtungen werden für Gase mit unendlichem Debye-Hückel-Radius durchgeführt. Der Verf. zeigt, daß zur Beschreibung der Energieverteilung die Boltzmann-Verteilung eingesetzt werden kann, da die Fermi-Grenze zu vernachlässigen ist. Es werden Ergebnisse für den Fall, daß die Elektronenenergien $E \gtrsim mc^2$ und $E \gg mc^2$ sind — wenn m die Ruhemasse des Elektrons ist —, angegeben. Die Dichteveränderung des Plasmas in Folge sekundärer Paarerzeugungsprozesse kann nach Angabe des Verf. bei der Ausstrahlungsenergieberechnung vernachlässigt werden.

C. Passow.

Tidman, D. A.: Radio emission by plasma oscillations in nonuniform plasmas. *Phys. Review*, II. Ser. **117**, 366—374 (1960).

Die Umwandlung longitudinaler Plasmaschwingungen in transversale elektromagnetische Schwingungen wird für ein Wellenpaket von Plasmaschwingungen in einem Plasma mit nicht verschwindendem Dichtegradienten nach der WKB-Methode für den Fall kleiner Amplituden berechnet.

G. Wallis.

Temperley, H. N. V.: Statistical mechanics of non-crossing chains. I. *Trans. Faraday Soc.* **53**, 1065—1069 (1957).

Die Anzahl von sich selbst nicht kreuzenden, statistischen Wegen von der Schrittlänge 1 (eindimensional bzw. auf bestimmten Gittertypen) soll abgezählt werden. Dies geschieht durch Aufstellung von Produkten aus Faktoren $h_{i,i+1}$, die zum Ausdruck bringen, daß die „Schrittlänge“ 1 (bzw. < 1) ist, und Faktoren der Form $(1 - h_{ik})$, die das Produkt zu null machen, wenn irgend ein Punkt k mit einem vorhergehenden Punkt i zusammenfällt. Wenn ein „erlaubter“ Weg vorliegt, wird das Produkt gleich 1. Die gesamte Anzahl erlaubter Wege von bestimmter Schrittlänge bekommt man, indem man die Variablen 2 bis n über ihren gesamten Wertebereich integriert. Durch Ausmultiplizieren des Produktes entstehen Ausdrücke, die sämtliche Faktoren $h_{i,i+1}$, dazu noch mehr oder weniger Faktoren h_{ik} ($k \neq i+1$) enthalten. In einem entsprechenden Diagramm sind die ersteren die Seiten, die letzteren die Diagonalen verschiedener Länge, die sich in den Weg einzeichnen lassen. Es wird angenommen, daß es sinnvoll ist, mit einem Mittelwert des Integrals für einen solchen Einzelausdruck zu arbeiten, welcher von der Zahl der Schritte und der Zahl der berücksichtigten Diagonalen abhängen soll, und es wird versucht, Aussagen über einen solchen Mittelwert zu machen. Zunächst erkennt man weitgehende Ähnlichkeiten mit den Mayerschen Ausdrücken für vollständige cluster-Integrale und damit Beziehungen zu den Virialkoeffizienten des entsprechenden

„Zustandsgleichungsproblems“. Es zeigt sich, daß gewisse reduzible Integrale sich in Faktoren aufspalten lassen, daß Beziehungen zwischen „Ring-“ und „Kettenintegralen“ bestehen, es werden für kleine Schrittzahlen die tatsächlichen Streubreiten der betreffenden Integrale ermittelt, auch allgemeinere Abschätzungen scheinen die gemachte Annahme zu rechtfertigen. Für den eindimensionalen Fall wird eine exakte Formel zur Berechnung des betreffenden Mittelwerts, für allgemeine Fälle eine Näherungsformel angegeben, und auch diese wieder für geringe Schrittzahlen mit maschinell ermittelten Werten verglichen. Die Möglichkeit, mit der geschilderten Methode in etwas konsistenterer Weise als bisher an das Problem der Zustandsgleichung- und der Virialkoeffizienten heranzukommen wird diskutiert.

H. Volz.

Temperley, H. N. V.: The equation of state of a gas of elastic spheres. Proc. phys. Soc. **71**, 238—246 (1958).

Es wird modellmäßig angenommen, daß die Abstoßung zwischen ausgedehnten Teilchen eine Abstandswahrscheinlichkeit von der Form $1 - f_{12} = 1 - A \exp(-r_{12}^2/a^2)$ bewirkt („weiche“ elastische Kugeln). Für $A = 1$, womit weiterhin gerechnet wird, ist ein Zusammenfallen der beiden Teilchen ausgeschlossen. Es wird weiterhin von den Beziehungen zwischen dem Problem, eine geschlossene Form der Zustandsgleichung aufzustellen, und dem Problem der Abzählung der Konfigurationen einer sich nicht selbst überschneidenden Kette (vgl. vorhergehendes Referat) Gebrauch gemacht. Es handelt sich also darum, asymptotische Abschätzungen von Größen der Art $f_{12} f_{23} f_{34} \cdots f_{N1} (1 + f_{13}) \cdot (1 + f_{24}) \cdots$, integriert über die Variablen $2 \cdots N$, zu finden. Die bei Ausmultiplikation entstehenden einzelnen Summanden lassen sich nach einfachen Regeln integrieren. Das Resultat hängt von der sog. Komplexität des betreffenden Ausdrucks, und diese von der Zahl der Seiten und der verschiedenen Diagonalen und deren topologischer Anordnung in dem betreffenden Ausdruck ab. Eine Abschätzung zeigt, daß es nicht sinnvoll ist, mit Mittelwerten der Komplexität zu arbeiten, welche nur von der Zahl der Seiten und der Diagonalen abhängt. Man kann im vorliegenden Fall die Rechnung verfeinern, indem man sie noch nach der Zahl der Diagonalen bestimmter Länge unterteilt und für diese dann Mittelwerte sucht. Es wird dafür eine erzeugende Funktion angegeben, aus deren Koeffizienten sich die Komplexitäten berechnen lassen. Auf diese Weise können asymptotische Werte für Komplexionen mit verschiedener Diagonalenstruktur angegeben und damit die Verminderung der Komplexionszahl durch die Nichtüberlagerbarkeit verschiedener Moleküle angegeben werden. Diese „Entropie“ strebt pro „Kettenglied“ im dreidimensionalen Fall für große N einem Grenzwert zu. Die Mayerschen clusters hängen mit den obigen Komplexionen dadurch zusammen, daß sie nicht mehr in jedem Fall die volle Zahl der Seiten enthalten. Der kombinatorische Zusammenhang zwischen den einen und den anderen Größen wird angegeben, und Vergleiche zwischen dem vorliegenden „Ketten“-Verfahren und der Mayerschen Berechnung der Virialkoeffizienten gezogen. Durch Wahl eines Wertes $A < 1$ läßt sich weitgehende Übereinstimmung erreichen.

H. Volz.

Mathur, V. Swarup: Equation of state of elements from the relativistic Thomas-Fermi theory. Proc. nat. Inst. India, Part A **23**, 430—437 (1957).

Es wird eine Zustandsgleichung der Elemente bei sehr hohen Drucken auf Grund der von Rudkjøbing (dies. Zbl. **47**, 239) auf der „Dichte der Zustände“ aufgebauten relativistischen Thomas-Fermi-Gleichung gegeben. Die extrem relativistische, sowie die extrem unrelativistische Approximation werden diskutiert. Es wird jedoch nur auf den Fall der extremen Entartung eingegangen und die Wirkung des Austausches wird vernachlässigt, denn die Gültigkeit der Resultate wird dadurch bei hohen Drucken und hohen Atomnummern nicht beeinflusst.

J. Antal.

Ikenberry, E.: The evaluation of collision integrals, using Grad's representation of the distribution function. Arch. rat. Mech. Analysis **3**, 123—132 (1959).

Verf. knüpft an eine Arbeit von Grad (dies. Zbl. 36, 41) an, in der die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion eines verdünnten Gases nach verallgemeinerten Hermiteschen Polynomen entwickelt wird. In vorliegender Untersuchung wird gezeigt, wie für die auftretenden Stoßintegrale der Maxwell-Boltzmannschen Gleichung im Falle kugelsymmetrischer Moleküle exakte Entwicklungen gewonnen werden können. Dabei werden sechs der notwendigen acht Quadraturen ausgeführt. Es verbleiben lediglich Integrale über die Relativgeschwindigkeit und den Streuwinkel. Bei r^{-n} -Wechselwirkungen kann die Integration über die Relativgeschwindigkeit auch durchgeführt werden, während bei starren Kugeln alle Quadraturen bewerkstelligt werden können.

G. Kelbg.

Katsura, S. and K. Harumi: A note on the Born-Green linearized integral equation. *Proc. phys. Soc.* 75, 826—832 (1960).

Das Verhalten der linearisierten Born-Green-Gleichung wird untersucht. Ein Vergleich mit der exakten Lösung von Gurney für ein eindimensionales Gas, dessen Moleküle nach einem Herzfeld-Goeppert-Mayer-Potential wechselwirken, wird durchgeführt. Es lassen sich Aussagen über den Gültigkeitsbereich der B-G-Gleichung machen. Es zeigt sich, daß die Singularität der B-G-Gleichung nichts mit Phasenumwandlungen zu tun hat. Die Gleichung ist nur sinnvoll für hohe Temperaturen und niedrige Drücke.

G. Kelbg.

Brudner, Harvey J. and Sidney Borowitz: Thomas-Fermi technique for determining wave functions for alkali atoms with excited valence electrons. *Phys. Review*, II. Ser. 120, 2053—2063 (1960).

Erma, Victor A.: Zur Thomas-Fermischen Gleichung bei hohen Temperaturen. *Ann. der Physik*, VI. F. 20, 345—348 (1957).

Verf. gibt eine semi-konvergente Entwicklung für das Thomas-Fermische Potential bei hohen Temperaturen und untersucht ihre Konvergenzeigenschaften.

J. Antal.

Bau der Materie:

Racah, G.: Use of the WEIZAC in theoretical spectroscopy. *Bull. Res. Council Israel*, Sect. F 8, 1—14 (1959).

Electronic computer programs for theoretical calculations in atomic spectroscopy are described.

Zusammenfassung des Autors.

Dobronravov, Ju. A. (G. A.): Supplementary integrals of motion for the hydrogen atom. *Vestnik Leningradsk. Univ.* 12, Nr. 10 (Ser. Fiz. Chim. Nr. 2) 5—10, engl. Zusammenfassung (1957) [Russisch].

Demeur, M. et Ch. Joachain: Remarques sur une méthode de sommation de la théorie des perturbation. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. 46, 225—232 (1960).

The summation method developed by Dalgarno and Lewis (this Zbl. 65, 449) has been extended to degenerate states. The limitations and some simplifications of the method are examined.

[Zusammenfassung des Autors.]

DeWit, M., C. R. Fischer and W. Zickendraht: Compensations in electron excitation effects in p - p and p - n scattering. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 45, 1047—1052 (1959).

Die in Streuversuchen unvermeidliche, gelegentliche Coulomb-Anregung von Atomhüllen sollte sich bei hinreichend kleinen deBroglie-Wellenlängen in der Richtungsverteilung der gestreuten Teilchen nicht bemerkbar machen. Hier wird in einer asymptotischen Näherung gezeigt, daß sie auch bei großen Wellenlängen vernachlässigt werden kann.

E. Breitenberger.

Pearman, H. S.: The relativistic theory of K ionization by electrons. *Proc. phys. Soc.* 76, 623—640 (1960).

Relativistic cross sections for the K shell ionization of light to heavy atoms by fast electrons are developed using the Møller interaction. The effect of electron exchange and the validity of the Born approximation are discussed. Suitable kinds of wave function for the K electrons are considered.

Aus der Zusammenfassung des Autors.

Fogarassy, B. and G. Németh: A new potential function for diatomic molecules. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* **11**, 265—275 (1960).

In der vorliegenden Arbeit wird eine neue Potentialfunktion für zweiatomige Moleküle angegeben, die gewissen, physikalisch plausiblen Grenzbedingungen genügt und außerdem eine exakte Lösung der Schrödingergleichung erlaubt. Die erhaltenen Energiewerte haben genau die für die Interpretation von Schwingungsspektren erforderliche Form.

W. Koepe.

Ansbacher, F.: A note on the overlap integral of two harmonic oscillator wave functions. *Z. Naturforsch.* **14 a**, 889—892 (1959).

Zu den einzelnen Potentialen $V_1 = \frac{1}{2} K_1 X^2$ und $V_2 = \frac{1}{2} K_2 (X - D)^2$ werden die entsprechenden Wellenfunktionen $\varphi_m^{(1)}, \varphi_n^{(2)}$ mit Hilfe der Hermiteschen Polynome ausgedrückt. Deren Überlappungs-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m^{(1)} \varphi_n^{(2)} dX$ wird hier in einer

von derjenigen von M. Wagner (dies. Zbl. **84**, 238) verschiedenen Form dargestellt, und zwar durch eine endliche Summe von neuartigen Polynomen. Der Übergang zu der Entwicklung von Wagner wird hergeleitet. Verf. erhält Rekurrenzrelationen für das Überlappungs-Integral, sowie die Ableitung desselben nach dem Trennungsparameter.

J. Hersch.

Ljubimov (Liubimov), G. P. and R. V. Chochlov (Khokhlov): Polarization of a beam of molecules in an alternating field with variable amplitude and phase. *Soviet Phys., JETP* **33** (6), 1074—1079 (1958), Übersetzung von *Žurn. éksper. teor. Fiz.* **33**, 1396—1402 (1957).

Das Verhalten eines Molekülstrahles in einem alternierenden Feld wird unter der Annahme untersucht, daß das Feld amplituden- und phasenmoduliert ist, um die in einem Versuch realisierten Verhältnisse möglichst genau zu beschreiben. Die durch ein Cavity fliegenden Moleküle geben Energie an das Cavity ab, in dem sie in niedrigere Anregungszustände übergehen. Der Zustand der Moleküle wird durch ihre Polarisations-Funktion beschrieben. Es werden Näherungs-Lösungen für den Fall einer schnellen wie auch einer langsamen Änderung der Amplituden und der Phasen gegeben, die entsprechend für große bzw. kleine Durchfluggeschwindigkeiten der Moleküle gültig sind. Eine exakte Lösung kann für den Fall angegeben werden, daß die Frequenz des alternierenden Feldes mit der Eigenfrequenz der Energiesprünge des Moleküls übereinstimmt.

C. Passow.

Peretti, Jean: Some remarks about frequency spectra of crystal lattices. *Phys. Chem. Solids* **12**, 216—232 (1960).

Die Frequenzen eines Kristallgitters werden durch die Säkulargleichung $\text{Det } |C - \omega^2 I| = 0$ gegeben. C ist dabei die in den Wellenvektorraum der Normalschwingungen transformierte dynamische Matrix. $g(\omega)$ ist die „Frequenzverteilung“, genau: $g(\omega) = 2\omega k(\omega^2)$, wobei $k(\omega^2)$ die Dichte der Eigenwerte ω^2 als Funktion

des Wellenvektors w . — Nun wird eine neue Funktion eingeführt: $F_0(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{z - x} dx$,

wobei alle Frequenzen ω so normiert sind, daß $\omega_{\max} = 1$ ist. $F_0(z)$ läßt sich noch anders an die Frequenzen anschließen:

$$F_0(z) \sim \text{Sp} \int_0^{2\pi} \int \frac{d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}_3}{z - \Gamma(w)}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ iC & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $0, \pm i$ Diagonalmatrizen der Dimension von C sind. Die Funktion $F_0(z)$ ist analytisch überall in der z -Ebene, ausgenommen das Gebiet $-1 \leq z \leq 1$ auf der reellen Achse. Mit Hilbert-konjugierten Funktionen, Laplace-Transformationen.

allgemeinen linearen Transformationen wird aus $F_0(z)$ die interessante Funktion $g(z)$ berechnet; (z. B.: $g(x) = -\pi^{-1} \operatorname{Im} F(x + i0)$). Es wird: $g(x)$ für spezielle Gitter berechnet (einf. kubisch), die Singularitäten des Spektrums untersucht, die analytische Form des Spektrums eindimensionaler Gitter betrachtet und eine Methode langer Wellen entwickelt. W. Klose.

Bjork, Robert L.: Impurity-induced localized modes of lattice vibration in a diatomic chain. Phys. Review, II. Ser. 105, 456—459 (1957).

Es wird der Einfluß eines Verunreinigungsatoms auf die Frequenzen der Eigenschwingungen einer zweiatomigen linearen Kette untersucht. Diese enthält zwei Atome der Massen m_1 und m_2 , aber nur eine Federkonstante. Eins der Atome ist durch ein Atom mit anderer Masse (Verunreinigung) ersetzt und durch eine geänderte Federkonstante mit seinen Nachbarn verbunden. Die Kette ist an den Enden eingespannt, der Einfluß dieser Randbedingung auf das Frequenzspektrum ist zu vernachlässigen. Dieses wird (praktisch) völlig exakt berechnet. Je nach den Werten der drei Parameter des Modells (zwei Massenverhältnisse und das Verhältnis der Federkonstanten) treten in der Lücke zwischen dem akustischen und dem optischen Zweig 0 bis 3 neue Frequenzen auf. Die zugehörigen Schwingungen sind um die Verunreinigung lokalisiert; der Faktor, um den die Amplitude bei Entfernung um eine Zelle (zwei Atome) von der Verunreinigung abnimmt, kann nicht größer sein als m_2/m_1 (bzw. m_1/m_2). Oberhalb des optischen Zweiges treten, ebenfalls abhängig von den Werten der Parameter, null bis zwei neue Frequenzen auf, für den Grad ihrer Lokalisierung gibt es keine allgemeingültige Grenze. — Je stärker die Verunreinigungsschwingungen lokalisiert sind, mit desto geringerer Amplitude nimmt das Verunreinigungsatom an den normalen Gitterschwingungen teil. G. Schottky.

Babuška, I., E. Vitásek and F. Kroupa: Some applications of the discrete fourier transform to problems of crystal lattice deformation. I. Czechosl. J. Phys. 10, 419—427 (1960).

The theory of the discrete Fourier transform is applied in solving a system of difference equations describing the positions of atoms in a deformed crystal lattice. The crystal lattice is approximated by the Born-Kármán model modified to include the internal energy of the undeformed crystal. Zusammenfassung der Autoren.

Aleksandrov, K. S.: Fortpflanzung elastischer Wellen längs der ausgezeichneten Richtungen in Kristallen. Kristallografija 1, 718—728 (1957) [Russisch].

This paper presents a theoretical study of the propagation of elastic waves in crystals along special directions belonging to the different groups of the symmetry of the tensor of elastic moduli. Using Borgnis method the equations are derived which determine the special directions of this propagation in rhombohedrons. It is shown that those directions coinciding with all three crystallographic axes are the special directions of the wave propagation independent of the relations among the elastic moduli of the crystal. By means of different simplifications these equations can be obtained for several other kinds of crystals: tetrahedrons, hexahedrons and cubic systems. The properties of the directions of different groups are demonstrated by means of stereographic projection. Further, experimental investigations of ultrasonic vibrations along these special directions of different crystals are given. In all these cases there exists an analogy between the propagation of elastic waves in crystals and light vibrations. This analogy gives the possibility to classify the different directions in crystals into several groups in dependence of the conditions of propagation of elastic waves along each direction.

D. Rašković.

Sawada, M. and C. H. Shaw: Calculation of the transmission factor in X-ray scattering. J. appl. Phys. 29, 1344—1347 (1958).

Analytical equations have been derived for the transmission factor applicable to the case of a rather weakly absorbing sample of circular cross section and larger than the x -ray beam. Calculations are presented for liquid nitrogen and it is shown that under certain practicable conditions the transmission factor is constant for a rather wide range of the scattering angle.

Zusammenfassung des Autors.

Solov'ev, S. P., Ju. N. Veneveev und G. S. Ždanov: Über eine Methode der Berechnung der inneren Felder in komplizierten Dipolstrukturen. *Kristallografija* 5, 718—725 (1960) [Russisch].

Ein Verfahren zur Berechnung der inneren Felder in komplizierten Dipolstrukturen wird vorgeschlagen. In der allgemeinen Form läuft die Aufgabe der Berechnung der Felder auf die Lösung eines Systems linearer Gleichungen mit $3m$ Unbekannten hinaus, wo m die Zahl der Atome in der Elementarzelle ist. Die Berücksichtigung der Symmetrie der Struktur gestattet, die Zahl der Unbekannten bis auf $3n$ zu vermindern, wo n die Zahl der Komplexe, $n \cdot m$, ist. Zur Berechnung aller bei der Ausrechnung der Felder erforderlichen Struktursummen läßt sich die Methode von Ewald mit Erfolg anwenden.

Zusammenfassung des Autors.

Lajzerowicz, Janine et Joseph Lajzerowicz: Théorie de l'information et détermination des structures. *C. r. Acad. Sci., Paris* 251, 744—746 (1960).

Ausgehend von der Kenntnis der chemischen Zusammensetzung, der Zahl der Atome pro Elementarzelle und der Absolutwerte der Strukturfaktoren wird unter Ausnutzung einiger Ergebnisse der Informationstheorie eine Wahrscheinlichkeitsdichte für die Lage der Atome abgeleitet.

G. Wallis.

● Low, William: Paramagnetic resonance in solids. (Solid State Physics. Advances in Research and Applications.) New York and London: Academic Press 1960. VIII, 212 p. \$ 7,50.

Die paramagnetische Elektronenresonanz hat in den letzten Jahren zunehmende Bedeutung erlangt. Dessen ungeachtet sind bisher auf diesem Gebiet nur sehr wenige Bücher erschienen. Deshalb stellt das vorliegende Buch eine wünschenswerte Ergänzung der vorhandenen Literatur dar. Das Buch ist in 6 Kapitel unterteilt, wovon das erste Kapitel als Einleitung gedacht ist, in der Grundkenntnisse über die Übergangsmetalle, über die paramagnetische Resonanzspektroskopie im allgemeinen und über die Merkmale der paramagnetischen Resonanzspektren im besonderen besprochen werden. Im zweiten Kapitel werden der allgemeine Hamilton-Operator des freien Ions und der Effekt des statischen elektrischen Kristallfeldes besprochen. Es wird sowohl auf das Kramersche Theorem als auch auf den Jahn-Teller-Effekt und die Hyperfeinstrukturaufspaltung, die winkelabhängigen Variationen der Spektren und die Berechnung von Linienparametern eingegangen. Das dritte Kapitel enthält eine eingehende Diskussion der Elektronen-Spin-Resonanzspektren der Übergangselemente in Einzelkristallen. Es wurden sowohl die Elemente der Eisen-, Palladium- und Platingruppe als auch die Lanthaniden und Aktiniden untersucht. Die optischen Spektren sind in einigen Fällen ebenfalls erwähnt, was zu einer Ergänzung des Gesamtbildes der elektronischen Eigenschaften dieser Elemente erforderlich ist. Das vierte Kapitel ist den Methoden der Relaxationszeitmessungen und der Messung der Linienbreite der Elektronen-Spin-Resonanzspektren gewidmet. Experimentelle Methoden werden beschrieben, und eine kurze Beschreibung der Maser ist hinzugefügt. Farbzentren und Fehlstellen in Kristallen sind im fünften Kapitel besprochen. Es werden auch organische und plastische Materialien betrachtet. Das letzte Kapitel beschreibt verschiedene Spektrometertypen und gibt auch einige Empfindlichkeitsbetrachtungen. Der ENDOR-Spektrometertyp ist ebenfalls erwähnt. Das Buch ist klar geschrieben und als ein fortgeschrittener Text gedacht. Es enthält viele wertvolle theoretische und experimentelle Ergebnisse. Auch wenn das Buch, wie Verf. selbst sagt, nicht als eine umfassende Enzyklopädie gedacht ist, sind jedoch an verschiedenen Stellen erhebliche Literaturmängel nachzuweisen, z. B. sind u. a. bei der Diskussion der paramagnetischen Resonanzspektren der Übergangsmetalle in Einkristallen die eingehenden Untersuchungen von K. A. Müller nicht aufgeführt. Außerdem werden die Arbeiten der sowjetischen Schule nur sehr sparsam er-

wähnt. Die technische Ausführung des Buches ist sehr gut und fast druckfehlerfrei. Dieses Buch wird sicherlich eine sehr nützliche Informationsquelle für alle diejenigen sein, die mit der Elektronen-Spin-Resonanzmethode arbeiten. *Cl. Nicolau.*

Sierro, Jérôme et Roger Lacroix: Résonance paramagnétique dans des fluorures de l'ion Gd^{3+} soumis à un champ cristallin tétragonal. C. r. Acad. Sci., Paris 250, 2686—2687 (1960).

Es wurden paramagnetische Elektronenresonanzmessungen an einem Gadolinium Fluorid Einzelkristall (Gd^{3+} Gehalt = 0,01%) bei 9200 MHz durchgeführt. Infolge der Wirkung des tetragonalen Kristallfeldes wird der Grundzustand in 4 Dubletts aufgespalten, die den Quantenzahlen $|m| = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2$ entsprechen. Wenn man den Hamiltonoperator $V + G\beta \bar{H} \cdot S$ diagonalisiert, wo V die Matrix ist, die die Wirkung des Kristallfeldes beschreibt, erhält man die Energieabweichungen: $\Delta E_1 = E_{3/2} - E_{1/2}$, $\Delta E_2 = E_{5/2} - E_{3/2}$. Es wurden Messungen auch an natürlichen Gadoliniumfluoriden durchgeführt. Es befanden sich in diesen Kristallen 40% tetragonale Gd Stellen und 60% kubische Gd Stellen. Nach Erhitzung auf 1000° C erhält man Proben mit 90% tetragonalen und 10% kubischen Stellen. Diese Feststellung bestätigt die früheren Interpretationen von Baker, Bleaney und Hayers hinsichtlich der Symmetrie dieser Gd-Fluoride. *Cl. Nicolau.*

Corciovei, A.: On the ferromagnetism of thin films. Czechosl. J. Phys. 10, 568—578 (1960).

In this paper the magnetic properties of ferromagnetic thin layers are studied by calculating the partition function for the magnetic system in Kirkwood's approximation of the second order. The results obtained for the Curie temperature and the magnetization are in somewhat better agreement with the experiment than those obtained by Valenta. Zusammenfassung des Autors.

Coffa, H.: Ferrimagnetic spin-wave resonance. Acta phys. Polon. 19, 193—198 (1960).

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

● **Struve, Otto, Beverly Lynds and Helen Pillans:** Elementary astronomy. London: Oxford University Press 1959, 396 p. 55 s. net.

Die Absicht des bekannten Astronomen Otto Struve, weniger ein vollständiges Textbuch der beschreibenden Astronomie zu geben, sondern vielmehr eine elementare, aber möglichst allgemeine Grundlage für die Anwendungen physikalischer Grundprinzipien auf das Universum — diese Absicht ist auf einem phänomenologischen Niveau der Stoffbehandlung in ausgezeichnete Weise durchgeführt worden. Die vielen vorbildlichen Abbildungen vor allem, verbunden durch einen klaren Text und einige grundlegende Formeln, tragen wesentlich zu einem Verständnis der vielen Möglichkeiten bei, wie die Materie im Kosmos verteilt sein kann und ihre thermodynamischen sowie Strahlungseigenschaften variieren. Der Stoff umfaßt unser Planetensystem, die Sonne (wobei neben dem Zustand der „ruhigen Sonne“ auch die „Sonnenaktivität“ und die in steigender Bedeutung befindlichen „Solar-terrestrischen Beziehungen“ behandelt werden), die Sternklassifikationen, die interstellare Materie und die verschiedenen Formen der Galaxien. *G. Wallis.*

● **Kurth, Rudolf:** Introduction to the mechanics of the solar system. London-New York-Paris-Los Angeles: Pergamon Press 1959. IX, 177 p. 42 s. net.

Dieses kleine Buch stellt eine empfehlenswerte Ergänzung zu den bereits existierenden „Einführungen“ (z. B. zu der von F. R. Moulton und zu der schon recht ausführlichen von W. M. Smart, Celestial mechanics, London 1953) dar; Verf. hielt es äußerlich in dem Stil und Niveau seiner vor 2 Jahren im gleichen Verlag erschienenen Einführung in die Mechanik von Sternsystemen (dies. Zbl. 84, 238). Die längst fällige Benutzung der Vektor-Analyse (die Hamilton-Jacobi-Theorie ist bewußt nicht einbegriffen, im Gegensatz zu der Himmelsmechanik von F. Freundlich, London 1958), die Stellung und Behandlung von Übungsaufgaben sowie das Ein-

gehen auf die prinzipiell wichtigen Einzelprobleme (Periheldrehung des Merkur, säkulare Änderungen der Bahnelemente, Störungen im 3-Körperproblem) machen das Buch geeignet besonders für Studierende. Die komplizierte Mondbewegung wird weniger ausführlich gebracht als etwa bei Smart, dafür findet sich abschließend ein Kapitel: Die Planeten und der Mond als starre Körper. *W. Strohmeier.*

Klemperer, W. B.: Satellite librations of large amplitude. *ARS J.* 30, 123—124 (1960).

Contributing to the question of libration oscillations of satellites or of pendulous devices aboard artificial satellites, the author discusses the relatively simple exact solution of the simplified differential equation of motion of a dumbbell-shaped instrument carried aboard a satellite in a circular orbit and allowed to swing in the plane of the orbit. *E. Rabe.*

Baker jr., Robert M. L.: Librations on a slightly eccentric orbit. *ARS J.* 30, 124—126 (1960).

Untersuchung der Rotationsbewegung eines hantelförmigen Satelliten, der sich auf einer schwach exzentrischen Bahn um die Erde bewegt. Die Rotation ist nicht gleichförmig, sondern wird von kleinen periodischen Schwankungen (Librationen) überlagert. Das Problem führt auf Mathiesche Differentialgleichungen; seine Lösung gilt genähert auch für ellipsoidförmige Körper. *K. Stumpff.*

London, Howard S.: Some exact solutions of the equations of motion of a solar sail with constant sail setting. *ARS J.* 30, 198—200 (1960).

On the basis of earlier investigations by T. C. Tsu and R. H. Bacon, the author studies the orbital motion of a solar sail with constant sail setting. Using the exact differential equations of motion instead of the approximate equations applied by Tsu, logarithmic spiral trajectories emerged again as one class of solutions. The range of values of spiral angle ψ and sail setting θ for which these solutions exist depends upon the value of α , the acceleration due to radiation pressure for radial sail setting ($\theta = 0$) at Earth's orbit. For the particular case of radial sail setting, conic sections are obtained as another set of solutions. The latter case is equivalent to a purely gravitational solution, in which the sun's gravitational attraction has been corrected for the effect of the radiation pressure. *E. Rabe.*

Kustaanheimo, Paul: On vector methods in spherical astronomy. *Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math.* 24, Nr. 4, 12 p. (1959).

For the computational solution of problems in spherical astronomy, the author proposes a method using unit vectors, which in turn are expressed in terms of a certain non-orthogonal vector basis. This three-dimensional vector basis is fully determined by any two unit vectors involved in the given problem. After this is done, any problem in spherical astronomy can be so formulated that certain dot and box products of unit vectors are given, and certain other dot and box products are required. All the steps in the solution are then reduced to the computation of consecutive dot and box products by means of three given formulae. Several examples illustrate the main advantage of this method, namely the fact that only a minimum number of numerical values has to be recorded in the course of the computations, provided that a desk calculator is used in the most expedient manner. Also, no artificial auxiliary quantities need to be introduced. *E. Rabe.*

Ivanov, V. V.: On the fluctuations in the star counts. *Vestnik Leningradsk. Univ.* 12, Nr. 13 (Ser. Mat. Mech. Astron. Nr. 3) 169—177 (1957) [Russisch].

The fluctuations in the star counts caused by the irregularities in the distribution of absorbing matter in the Galaxy are considered in this paper. The correlation between the numbers of stars brighter than limiting magnitudes m_1 and m_2 , which are observed in the same direction, is investigated in the first part of the paper. Absorbing matter is assumed to be distributed continuously with the fluctuations of density. In the second part there has been found the mean-square fluctuations in the number of stars brighter than a limiting magnitude m for the case when the absorption is caused by discrete clouds. *Zusammenfassung des Autors.*

Elsässer, H.: Zur Theorie der astronomischen Szintillation. II. Z. Astrophys. 50, 278—295 (1960).

Im Anschluß an Teil I (vgl. Verf. und Siedentopf, dies. Zbl. 86, 238), in dem die Szintillationserscheinungen auf geometrisch-optischer Grundlage behandelt werden, bildet hier die Wellenoptik den Ausgangspunkt der Untersuchungen. Eine von Obuchow gegebene Lösung der Wellengleichung wird benutzt, um Formeln für die Richtungs- und Helligkeitsszintillation abzuleiten. Der Vergleich mit den Formeln des Teils I zeigt, daß für zenitnahe Sterne die Näherung der geometrischen Optik gültig ist; im Falle der Richtungsszintillation sind die beiden Formeln für die Zenitdistanz $z = 0$ sogar identisch. In Horizontnähe können dagegen die Brechungseffekte nicht vernachlässigt werden. Die beobachtete Abhängigkeit der Szintillation von der Zenitdistanz läßt sich nur durch den Einfluß von Turbulenzelementen verschiedener Größe erklären. Wie schon in Teil I gezeigt wurde, nimmt der Beitrag der Atmosphärenschichten zur Richtungsszintillation exponentiell mit der Höhe ab, während der Hauptbeitrag zu den Helligkeitsschwankungen aus etwa 8 km Höhe ü. M. kommt. Die Tatsache, daß sich die Zenitdistanzabhängigkeit der Helligkeits- und Richtungsszintillation nicht durch das gleiche Schlierenspektrum erklären lassen, führt auf eine Abhängigkeit des Schlierenspektrums von der Höhe in der Atmosphäre. In Übereinstimmung mit der Beobachtung zeigt die Theorie, daß die Zunahme der Szintillation mit der Zenitdistanz stark von der Teleskopöffnung abhängt.

W. Ströhmeier.

• Jardetzky, Wenceslas S.: Theories of figures of celestial bodies. New York and London: Interscience Publishers 1958. XI, 186 p. \$ 6.50.

Das mit einem Vorwort des bekannten Astrophysikers Otto Struve versehene Buch wendet sich sowohl an Mathematiker als auch an Astronomen. Es bietet eine Darstellung hauptsächlich neuerer Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Der erste Teil enthält zunächst in Kap. 1 und 2 eine leichtfaßliche Einführung in die Problemstellung und einen knappen Abriß der älteren Theorie (Maclaurinsche und Jacobische Ellipsoide, die Clairautsche Gleichung, Untersuchungen von Dirichlet und Riemann), die folgenden vier Kapitel geben sodann die neueren Methoden der Theorie der Gleichgewichtsfiguren (d. h. homogener bzw. heterogener gravitierender Flüssigkeitsmassen, die wie starre Körper mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine Achse rotieren) von Poincaré, Liapunov, Lichtenstein und Wavre in ihren wesentlichen Zügen wieder. — Der zweite Teil ist weiteren unveränderlichen und darüber hinaus auch veränderlichen Figuren gewidmet. So bringt Kap. 7 interessante eigene Untersuchungen des Verf. über Figuren „zonal rotierender“ Flüssigkeiten, deren Teilchen eine Winkelgeschwindigkeit besitzen, die von ihrer Entfernung von der Rotationsachse abhängt. Diese zonale Rotation wurde in unserem Sonnensystem tatsächlich an der Sonne selbst, an Jupiter und Saturn festgestellt. Das nächste Kapitel enthält einige Bemerkungen über kleine Schwingungen um eine stabile Figur und fortschreitende Verformungen, wie z. B. allmähliche Verlagerung der Rotationsachse. Die folgenden beiden Kap. 9 und 10 beschäftigen sich mit Systemen, die aus flüssigen und festen Bestandteilen zusammengesetzt sind, und des weiteren mit Flüssigkeitsmassen, die von mehreren Attraktionszentren angezogen werden. Ein Kapitel über Figuren, die aus kompressiblen Massen bestehen (nebst Bemerkungen über das Doppelsternproblem) beschließt das Buch, das sich freilich bei dem beschränkten Rahmen nicht zur Aufgabe stellen konnte, die mathematischen Entwicklungen bis in alle Einzelheiten zur Darstellung zu bringen. Dafür ist es mit einem ausführlichen Schrifttumsverzeichnis ausgestattet. V. Garten.

• Lehnert, B. (edited by): Electromagnetic phenomena on cosmical physics. International Astronomical Union, symposium no. 6, held in Stockholm, August 1956. Cambridge: At the University Press 1958. XIII, 545 p. 50 s. net.

Sponsored by the International Astronomical Union, the Symposium on Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics was held in Stockholm and Saltsjobaden on August 27—31, 1956. In this book the valuable papers presented at the symposium are recorded, together with some additional contributions intimately connected with the subjects of the symposium. Furthermore, the detailed summaries of a number of session discussions contained are particularly of current interest. This volume is divided into seven parts: Part I, Magnetohydrodynamics (11 papers), A. Theory, B. Experiments, C. Ionized gas in a magnetic field; Part II, Solar electrodynamics; Part III, Stellar magnetism; Part IV, Solar and interplanetary magnetic fields (7 papers); Part V, Electromagnetic state in interplanetary space (14 papers), A. Theories of magnetic storms, B. Cosmic ray methods of exploring interplanetary space; Part VI, High current discharges (3 papers); Part VII, Additional contributions (7 papers). In a new field such as cosmical electrodynamics, from theoretical, experimental and observational points of view, the exchange of ideas in many different research groups are necessary. The book under review definitely fulfills the need. It gives an excellent survey of the present state of research and tries to synthesize the experimental observations with the theoretical results. This book will be undoubtedly useful, not only to astronomers, but also to physicists and engineers who are concerned with new results bearing on interplanetary space.

S. Ueno.

Lehnert, B.: Plasma physics of cosmical and laboratory scale. Nuovo Cimento, Suppl., X. Ser. 13, 59—107; Discussion. Ibid. 107—110 (1959).

Auf der Grundlage von makroskopischen Plasmagleichungen werden die charakteristischen Eigenschaften der Plasmen in Sonnenflecken, in der Ionosphäre und in stromschwachen sowie stromstarken Entladungen miteinander verglichen. Insbesondere wird die Kopplung zwischen Plasma und Neutralgas untersucht. Den Abschluß bildet die Diskussion einiger Plasmaexperimente.

G. Wallis.

Nariai, Hidekazu On the cosmic turbulence. I, II. Sci. Reports Tôhoku Univ., I. Ser. 39, 213—235 (1957); 40, 40—52 (1957).

Es handelt sich um einen Versuch, eine allgemeine Theorie der homogenen kosmischen Turbulenz, unter der Berücksichtigung des Einflusses der kosmischen Dehnung zu begründen. Die diesbezüglichen Untersuchungen von v. Weizsäcker [dies. Zbl. 31, 383; Astrophys. J. 114, 165—186 (1951); Problems of Cosmical Aerodynamics, Ohio 1951] und von G. Gamow [Danske Vid. Selsk., mat-fys. Medd. 27, Nr. 10 (1953)] betrachtet der Verf. als unzureichend. Zu dem Zweck werden, ausgehend von den allgemeinen relativistischen hydrodynamischen Gleichungen, verallgemeinerte Navier-Stokesche Gleichungen für das sich dehnende Weltall unter der Annahme, daß die Geschwindigkeit des Fluidums klein ist im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit, abgeleitet. Der Begriff der Quasi-Inkompressibilität wird ähnlich wie der Begriff der Kompressibilität in der Newtonschen Hydromechanik eingeführt. Das so konstruierte Weltall-Modell soll das einzig mögliche sein, wenn die zeitliche Veränderlichkeit des Zähigkeitskoeffizienten berücksichtigt werden soll. Im zweiten Teil wird dann eine allgemeine Theorie der homogenen Turbulenz für das vorhin definierte quasi-inkompressible Fluidum entwickelt. Drei mögliche Typen der kosmischen Turbulenz werden besprochen und verschiedene Besonderheiten, wie z. B. die Nichtbeständigkeit der großen Wirbel infolge der kosmischen Dehnung oder die Frage der Ähnlichkeit, hervorgehoben. In Teil II versucht der Verf. die im ersten Teil erhaltenen und in gewissen Sinne nur qualitativ begründeten Resultate auch in quantitativer Hinsicht zu erweitern. Als Ziel setzt er sich, die in Chandrasekhars Sinn (dies. Zbl. 64, 437) im ersten Teil entwickelte phänomenologische Theorie der kosmischen Turbulenz in eine heuristische zu verwandeln. Diese heuristische Theorie soll uns dann erlauben, das Energiespektrum $E(k)$ auf ähnliche Weise wie Heisenberg (dies. Zbl. 34, 269) zu bestimmen. Und tatsächlich gelingt es,

die grundlegende Integralgleichung zur Bestimmung von $E(k)$ aufzustellen, aber sie konnte selbst nach Zurückführung auf eine gewöhnlich Differentialgleichung vierter Ordnung numerisch nicht gelöst werden. Eine ausführliche Erörterung aber wird durchgeführt und das Spektralgesetz bestimmt. Verf. erwartet von dieser heuristischen Form seiner Theorie brauchbare Resultate bei der Anwendung auf das Problem der Entstehung der Galaxien. Schließlich wird auch die Möglichkeit der Aufstellung einer deduktiven Theorie der kosmischen Turbulenz, wieder in Chandrasekhars Sinn, erörtert.

T. P. Angelitch.

Laird, M. J.: Magneto-hydrostatics of stellar atmospheres. I: The stability of the axially symmetric case. Monthly Not. roy. astron. Soc. **121**, 197—200 (1960).

Nach einer Störungsmethode wird ein Stabilitätskriterium für die Lösungen folgender, durch Berücksichtigung einer Rotationsbewegung mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω erweiterten magnetostatischen Gleichung

$$\rho \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) + \nabla p = \rho \mathbf{g} - \frac{1}{4} \pi^{-1} \mathbf{H} \times \text{curl } \mathbf{H}$$

angegeben. Folgende quadratische Form muß positiv definit sein:

$$-8\pi \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{b})^2}{b^2 H^2} \left(b^2 + \frac{1}{8\pi} \mathbf{b} \cdot \nabla H^2 \right) - \frac{\rho^2}{\gamma p} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{G})^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{G} \mathbf{v} \cdot \nabla p + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}}{H^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} \times \text{curl } \mathbf{b},$$

$$\text{wo } \mathbf{G} = \mathbf{g} - \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) \text{ und } \mathbf{b} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \times \text{curl } \mathbf{H} = \nabla p - \rho \mathbf{G}.$$

G. Wallis.

Bondi, H.: Magneto-hydrostatics of stellar atmospheres. II: The axially symmetric equilibrium configurations. Monthly Not. roy. astron. Soc. **121**, 201—207 (1960).

Es werden axialsymmetrische Lösungen der magnetostatischen Gleichung diskutiert und auf die Schichten von Sternatmosphären angewandt, in denen Gasdruck, Gravitation und magnetische Kräfte von gleicher Größenordnung sind.

G. Wallis.

Laird, M. J.: Magneto-hydrostatics of stellar atmospheres. III: The axially symmetric equilibrium configurations. Monthly Not. roy. astron. Soc. **121**, 208—212 (1960).

Die im vorhergehenden Teil der Arbeit gewonnenen allgemeinen Ergebnisse werden auf einige spezielle axialsymmetrische Gleichgewichtskonfigurationen angewandt.

G. Wallis.

Pacholczyk, A. G. and J. S. Stodólkiewicz: The magnetogravitational instability of an infinite homogeneous medium when a Coriolis force is acting and viscosity is taken into account. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **7**, 429—434 (1959).

Auf der Grundlage von Dispersionsbeziehungen wird die magneto-gravitative Instabilität eines unendlich ausgedehnten Mediums unter dem Einfluß einer Corioliskraft untersucht. Es zeigt sich, daß die kritische Wellenlänge der Störung in einem viskosen Medium nicht größer ist, als wenn man die Viskosität nicht mitberücksichtigt.

G. Wallis.

Pacholczyk, A. G. and J. S. Stodólkiewicz: The magnetogravitational instability of a medium in nonuniform rotation. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math. astron. phys. **7**, 503—507 (1959).

Das z. B. für die Bildung von Spiralarmen in Galaxien wichtige Problem der Gravitationsinstabilitäten in Systemen mit nicht uniformer Rotation wird für den Fall behandelt, daß das System zusätzlich einem äußeren Magnetfeld ausgesetzt ist. Hierbei wird ein ebenes isothermes Modell und die klassischen Voraussetzungen der Magnetohydrodynamik benutzt (Vernachlässigung der Reibung und Annahme unendlicher Leitfähigkeit). Aus dem Stabilitätskriterium ergibt sich eine obere Grenze für die magnetische Feldstärke.

G. Wallis.

Grigoraš, Z. K.: Eine Übersicht der Arbeiten, die dem Problem der Tsunami-Wellen gewidmet sind. *Trudy morsk. gidrofiz. Inst.* 10, 73—81 (1957) [Russisch].

● **Hess, Seymour L.:** *Introduction to theoretical meteorology.* New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1959. XIV, 362 p. \$ 8,50.

Die vorliegende Einführung in die theoretische Meteorologie stellt sich die Aufgabe, den Leser in übersichtlicher Weise an die Probleme der Beschreibung unserer Atmosphäre heranzuführen. Der Dreiklang: Thermodynamik, Strahlung, Strömungslehre steht hierbei im Vordergrund und zeigt von Anfang an, um was es hier geht. Das große pädagogische Geschick und die fachliche Qualifikation des Verf. greifen ineinander und führen den Leser schnell zu den aktuellen Problemen der modernen Meteorologie. Dadurch ist nicht nur ein ausgezeichnetes Lehrbuch für den Studenten entstanden, sondern überall bleibt auch noch viel Interessantes für den Fachmann. Die behandelten Themen gehen am besten aus dem Inhaltsverzeichnis hervor. Die einzelnen Abschnitte sind: Einführung, die Zustandsgleichung, die Prinzipien der Thermodynamik, die Thermodynamik von Wasserdampf und feuchter Luft, thermodynamische Diagramme, das hydrostatische Gleichgewicht, hydrostatische Stabilität und Konvektion; die physikalischen Grundlagen der Strahlung, Sonnen- und Erdstrahlung, die Strahlung im System Erde-Atmosphäre; die Bewegungsgleichungen auf der rotierenden Erde, ebene Bewegung im Gleichgewichtsfall, die Kinematik der Strömungsfelder, der Einfluß von Druckschwankungen, Unstetigkeitsflächen, Wirbelsätze, die Grundgleichungen mit dem Druck als unabhängiger Koordinate, Zähigkeit und Turbulenz, Energie und Stabilität, numerische Wettervorhersage, die allgemeine Zirkulation. Dem Verf. ist es vollauf gelungen, dieses reiche Programm klar darzustellen. Stets ist der Blick auf das physikalische Verständnis des Tatbestandes gerichtet — der Formalismus tritt in den Hintergrund. Dem Buch ist weite Verbreitung zu wünschen.

J. Zieryep.

Mieghem, Jacques van: *Le principe variationnel de la mécanique de l'atmosphère.* Beitr. Phys. Atmosph. 32, 135—152 (1960).

Verf. leitet ein allgemeines Variationsprinzip für die Bewegungsvorgänge in der Atmosphäre her. Es handelt sich hierbei um eine wesentliche Erweiterung der bekannten einschlägigen Betrachtungen, die vom Hamiltonschen Prinzip ausgehen und in den meisten Fällen nur inkompressible Strömungen betrachten. Das Wirkungsintegral des Verf. liefert durch Bildung der ersten Variation alle bisher betrachteten Bewegungsgleichungen als Spezialfälle. Im hydrostatischen Fall führt die Bildung der zweiten Variation zu einer eleganten Herleitung der Stabilitätsbedingungen. Es steht zu erwarten, daß die übersichtliche Form des Variationsintegrals des Verf. in der Meteorologie noch zu vielen Aussagen Anlaß geben wird.

J. Zieryep.

Gião, Antonio et Jean Roulleau: *Sur la variation avec l'altitude du gradient vertical moyen dans l'atmosphère libre.* C. r. Acad. Sci., Paris 250, 896—898 (1960).

Die Verff. zeigen in Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 82, 239) unter der Voraussetzung, daß die atmosphärischen Bewegungen im Mittel geostrophisch verlaufen und die Zustandsänderungen adiabatisch erfolgen, daß sich der zugehörige vertikale Temperaturgradient auf einfache Weise aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung bestimmen läßt. Die numerischen Rechnungen stimmen außerordentlich gut mit den Beobachtungsergebnissen überein.

J. Zieryep.

Hollmann, Günther: *Der mikroturbulente Vertikalaustausch von Masse und Wärme, ein Beitrag zur Lösung des Wärmeaustauschparadoxons von W. Schmidt.* Beitr. Phys. Atmosph. 32, 161—194 (1960).

Verf. beginnt mit dem Ergebnis von W. Schmidt, wonach in der Atmosphäre bei unteradiabatischem Temperaturgradienten ein abwärts gerichteter mikroturbulenter Wärmestrom vorhanden sein soll. Anschließend wird ausführlich über die Versuche anderer Autoren berichtet, dieses Wärmeaustausch-Paradoxon zu lösen. Verf. gibt dann eine eigene Theorie, die wohl als die z. Zt. befriedigendste angesehen

werden muß. Hierbei wird der Wärmestrom in zwei Anteile aufgespalten. Der eine ist abhängig vom mikroturbulenten Massenstrom, der andere von den mikroturbulenten Temperaturschwankungen. Für beide Komponenten werden Darstellungen gegeben, und es wird gezeigt, daß die Richtungen dieser beiden Ströme im allgemeinen entgegengesetzt sind. Es gelingt, für den resultierenden Wärmestrom eine übersichtliche Darstellung zu geben, in der der Austauschkoeffizient und der Temperaturgradient in allen vertikalen Niveaus unter der betrachteten Stelle eingehen und eine Mittelbildung in der Vertikalen vorzunehmen ist. Herrscht überall unteradiabatischer Gradient, so haben wir nach der Darstellung des Verf. wieder einen abwärts gerichteten Wärmestrom, dessen Betrag jedoch erheblich geringer ist als bei W. Schmidt. Herrscht in bodennahen Schichten überadiabatischer Gradient, so tritt ein aufwärts gerichteter Wärmestrom auf, der sich nach Meinung des Verf. noch über das Niveau erstreckt, von dem ab unteradiabatischer Gradient herrscht. Wie die Verhältnisse bei Mittelbildung über einen Tag liegen, ist damit jedoch mit Sicherheit nicht zu sagen. *J. Zieryep.*

● **Eliassen, E.: On the initial development of frontal waves.** (Publ. Danske Meteor. Medd. No. 13.) Charlottenlund 1960. 109 p. Diss.

Verf. untersucht die Wellenbewegungen, die in der Atmosphäre bei Polarfronten auftreten. Als einfaches Modell für eine solche Polarfront wird eine geneigte Diskontinuitätsfläche zwischen zwei homogenen inkompressiblen Medien in zonaler Strömung genommen. Als Berandungen fungieren zwei feste horizontale Flächen (Bodenfläche und Tropopause) und zwei vertikale Flächen, die den Abschluß des Strömungsfeldes im Norden und Süden liefern. Die Grundgleichungen werden in quasistatischer Form angesetzt und die Störungsgleichungen des Problems entwickelt. Durch Lösung eines Eigenwertproblems ergeben sich die Bestimmungsgrößen der auftretenden Wellen. Legt man den Rechnungen Werte des Dichte- und Geschwindigkeitssprunges über die Diskontinuitätsfläche zugrunde, wie sie häufig beobachtet werden, so ergibt sich ein exponentielles Anwachsen der Störung in zonaler Richtung. Das Maximum des Anwachsens liegt bei Wellenlängen von ca. 2000 km. Die Struktur dieser Wellen wird ausführlich untersucht. Die Arbeit liefert einen wichtigen Beitrag zum Verständnis der Bildung der Zyklonen in den gemäßigten Breiten. *J. Zieryep.*

Blinova, E. N.: On the forecasting of smoothed values of meteorological elements at the mid-level of the atmosphere. Doklady Akad. Nauk SSSR 123, 440—442 (1958) [Russisch].

Um im mittleren Niveau der Atmosphäre die ausgeglichene Bewegung voraussagen zu können, wird eine spezialisierte Form der Wirbelgleichung zur Eliminierung der Turbulenz einem Glättungsprozeß nach L. V. Keller unterworfen. [Über dieses Verfahren kann man sich in den Proc. 1st Internat. Congr. appl. Mech., Delft 1925, 395—405 unterrichten, vgl. auch Žurn. Geofiz. Meteorol. 2 (1925)]. Es wird vorgeschlagen, das resultierende Gleichungssystem zur Prognose des Zirkulationsindex zu verwenden. Lösungen sind nicht angegeben. *P. Mauersberger.*

Hofsommer, D. J., H. A. Lauwerier and B. R. Damsté: The influence of an exponential windfield upon a semicircular bay. Math. Centrum, Amsterdam, Afd. teogepaste Wiskunde, Report TW 56, 12 p. (1959).

Die Verff. setzen frühere Arbeiten über einen ähnlichen Gegenstand fort (siehe etwa TW 47, dies. Zbl. 87, 238). Hier wird der Einfluß eines äußeren Windfeldes (exponentielle Abhängigkeit von der Zeit) auf eine Flachwasserströmung in halbkreisförmiger Bucht untersucht. Das lineare inhomogene Ausgangsdifferentialgleichungssystem wird auf Polarkoordinaten umgeschrieben und mit der Laplace-Transformation gelöst. Der Einfluß des Windfeldes wird an numerischen Beispielen veranschaulicht. *J. Zieryep.*